

CHUZHONGSHUXUEJIETISHOUCE

初中数学 解题手册

陈守义 姬岫文 钟望贤

河南教育出版社

中国海洋出版社 (CHINA OCEAN PRESS)

初中数学 解题手册

初中数学教研组 编

中国海洋出版社

初中数学解题手册

陈守义 姬岫文 钟望贤

河南教育出版社

初中数学解题手册

陈守义 姬岫文 钟望贤

责任编辑 张国旺

河南教育出版社出版

河南第二新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本15.375印张 326千字

1988年2月第1版 1988年2月第1次印刷

印数1— 3; 550册

ISBN 7-5347-0262-3/C·228

定价 3.85 元

前 言

这套数学解题手册是为中、小学数学教学编写的辅助性工具书。其中小学、初中和高中各一种。其内容是以中、小学数学教学大纲为依据，配合现行教材，使学生更好地学习基础知识，掌握基本技能，提高他们综合运用数学知识和方法的能力。

本套书分别围绕提高学生解题能力这个中心，将中、小学数学各科的重要概念、法则、定理、公式的实际应用与基本的数学方法的灵活运用加以纵横联系。其中，不仅阐述中、小学数学解题的一般理论、方法和要求，同时，列举了各种典型、新颖的例题供读者学习参考。每种书的最后还提供适量的精选习题，供读者思考和练习。因此，这套书不仅有一定的理论高度，更具有较大的实用价值。

本书是这套书的初中部分。除在解题的理论和方法上予以指导之外，还系统介绍了各类具体题型的解题思路和方法。

为适应初中数学竞赛的需要，开拓读者视野，培养创造能力，特设有专节，讲解竞赛题型的特点、结构以及解这类题的思路和方法。

书的最后一部分，从全国、各省、市历年初中升学试题中精选出具有代表性的若干题目，分类编出；同时，也从国内、外历年数学竞赛试题中，选出初中知识范围内的一部分题目，也分类编出。供读者参考。

考虑到竞赛题的难度较大，所选题目都在附录中给出答案和必要的解题过程。

对于一些解题所必要的辅助内容，在每编的后面和书的最后以附录的形式提供给读者。

由于这套书是初次试编，尚有不完善或错误之处，敬请广大读者提出宝贵意见，以备再版时修缮。

编者

1987.10.

目 录

第一编 重要概念、法则、定理、 公式及运用技能 〔代数部分〕

第一章 实数	(1)
一、基础知识	(1)
二、运用技能	(5)
第二章 代数式	(10)
一、基础知识	(10)
二、运用技能	(20)
第三章 方程和方程组	(37)
一、基础知识	(37)
二、运用技能	(44)
第四章 不等式	(62)
一、基础知识	(62)
二、运用技能	(66)
第五章 指数和对数	(73)
一、基础知识	(73)
二、运用技能	(76)
第六章 函数及其图象	(84)
一、基础知识	(84)

二、运用技能·····	(88)
第七章 三角函数和解三角形·····	(100)
一、基础知识·····	(100)
二、运用技能·····	(106)
第八章 统计初步·····	(113)
一、基础知识·····	(113)
二、运用技能·····	(115)

〔几何部分〕

第九章 直线、相交线和平行线·····	(119)
一、基础知识·····	(119)
二、运用技能·····	(126)
第十章 直线形·····	(133)
一、基础知识·····	(133)
二、运用技能·····	(143)
第十一章 相似形·····	(171)
一、基础知识·····	(171)
二、运用技能·····	(175)
第十二章 圆·····	(191)
一、基础知识·····	(191)
二、运用技能·····	(199)
附 I 轨迹和作图·····	(229)

**第二编 解数学题的基本思路
和常用方法**

第十三章 解数学题的基本知识·····	(257)
---------------------	-------

一、解数学题的一般步骤·····	(257)
二、提高解题能力的途径·····	(259)
第十四章 解数学题的几种思考方法·····	(262)
一、综合法与分析法·····	(262)
二、演绎法和归纳法·····	(263)
三、反证法与同一法·····	(264)
第十五章 一些常用的解题方法·····	(268)
一、常用的代数解题方法·····	(268)
二、常用的几何解题方法·····	(287)
第十六章 辅助线的添设·····	(310)
附Ⅱ 近似计算·····	(314)

第三编 初中数学主要题型及其解题模式

第十七章 初中数学的主要题型·····	(319)
一、选择题型·····	(319)
二、计算题型·····	(331)
三、证明题型·····	(338)
四、求解题型·····	(355)
五、应用题型·····	(355)
六、作图题型·····	(355)
七、竞赛题型·····	(357)
第十八章 代数题的解法范例·····	(368)
一、选择题·····	(368)
二、计算题·····	(373)
三、证明题·····	(377)
四、求解题·····	(379)

五、应用题·····	(384)
六、描图题·····	(385)
第十九章 几何题的解法范例·····	(387)
一、选择题·····	(387)
二、计算题·····	(387)
三、证明题·····	(389)
四、作图题·····	(391)
第二十章 综合题的解法范例·····	(393)
一、选择题·····	(393)
二、计算题·····	(394)
三、证明题·····	(395)
四、求解题·····	(398)
五、应用题·····	(400)
附Ⅲ 常用的一些解题技巧·····	(404)

第四编 历年初中升学试题精选

第二十一章 选择题·····	(409)
第二十二章 计算题·····	(421)
第二十三章 证明题·····	(429)
第二十四章 求解题·····	(435)
第二十五章 应用题·····	(446)
第二十六章 作图题·····	(452)
第二十七章 竞赛题·····	(453)
附Ⅳ 竞赛题的答案或提示·····	(461)

附录

- V. 常用数学符号..... (473)
- VI. 重要常数..... (475)
- VII. 常用计量单位和换算表..... (476)
- VIII. 拉丁字母和希腊字母表..... (481)

第一编 重要概念、法则、 定理、公式及运用技能

〔代数部分〕

第一章 实 数

一、基础知识

1. 自然数

(1) **自然数** 我们把1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …这样的数叫做自然数, 自然数又叫做正整数。

自然数中的最小数是1, 但自然数无最大数。

(2) **质数和合数** 只能被1和它本身整除的自然数叫做质数, 如2, 3, 5, 7, 11等都是质数。质数又叫素数。

除了能被1和它本身整除外, 还能被其它的数整除的自然数叫做合数, 如4, 8, 15, 30等都是合数。

(3) **约数、公约数、最大公约数** 如果一个数 a 能被另一个数 b 整除, 则 b 叫做 a 的约数。几个数公有的约数, 叫做这几个数的公约数。其中最大的一个, 叫做这几个数的最大公约数。

(4) 倍数、公倍数、最小公倍数 两个自然数 a 与 b ，若 a 能被 b 整除，则 a 叫做 b 的倍数。几个数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数。其中最小的一个，叫做这几个数的最小公倍数。

(5) 互质 若两个自然数的最大公约数是1，则这两个自然数叫做互质。

(6) 自然数的运算 在自然数中，永远可以进行加法、乘法运算。自然数可以比较大小。

2. 整数

(1) 整数 正整数、零和负整数统称为整数，如0， ± 1 ， ± 2 ， ± 3 ，……都是整数。零既不是正整数，也不是负整数。

(2) 奇数和偶数 不能被2整除的整数叫做奇数，它可以表示为 $2n-1$ (n 为整数)。能被2整除的整数叫做偶数，它可以表示为 $2n$ (n 为整数)。

(3) 整数的运算 在整数中，永远可以进行加法、减法、乘法运算。零除了不能做除数外可以与其他数一起运算。

3. 有理数

(1) 有理数 整数和分数统称为有理数。

有理数 $\begin{cases} \text{整数} & \text{—— 正整数、零、负整数} \\ \text{分数} & \text{—— 正分数、负分数} \end{cases}$

(2) 任何有理数都可以表示成 $\frac{n}{m}$ (m 和 n 为互质的整数，且 $m \neq 0$)的形式 如果把有理数表示为小数，那么它一定是有限小数或无限循环小数。

(3) 数轴 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫

做数轴。数轴可以表示数，所有有理数都可以用数轴上的点来表示。原点右边的点表示正数，原点左边的点表示负数，原点表示零。画数轴时，原点、正方向和单位长度三者缺一不可。

(4) **相反数** 只有符号不同的两个数，叫做互为相反数。如+5和-5是互为相反的数，零的相反数是零。

(5) **绝对值** 数轴上表示一个数的点到原点的距离叫做这个数的绝对值。一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。 a 的绝对值可以用下面的关系式表述：

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a > 0 \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } a = 0 \text{ 时}), \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}). \end{cases}$$

要注意：实数的绝对值总是一个非负数，即 $|a| \geq 0$ 。

(6) **有理数大小的比较** 在数轴上表示的两个有理数，右边的数总比左边的数大。正数都大于零，负数都小于零，正数大于一切负数。两个负数，绝对值大的反而小。

(7) **有理数的运算** 有理数永远可以进行加法、减法、乘法、除法（除数不能为零）运算。

① **加法法则**：两数相加，同号的取原来的符号，并把绝对值相加；异号的取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值。

两个相反的数相加为零，一个数与零相加仍是这个数。

② **减法法则**：减去一个数，等于加上这个数的相反数。

③ **乘法法则**：两数相乘，同号得正，异号得负，并把

绝对值相乘。

任何数同零相乘，都得零。

几个不等于零的有理数相乘，积的符号由负因数的个数决定，当负因数有奇数个数时，积为负，当负因数有偶数个数时，积为正。

④ 除法法则：两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除。

零除以任何一个不等于零的数都得零。

4. 无理数

(1) 无理数 无限不循环的小数叫做无理数。

(2) 无理数的运算 任何一个无理数，都可以用任意精确度的有理数来近似的表示。一般说，在进行运算时可将它表示成一定精确度的近似数，再计算。

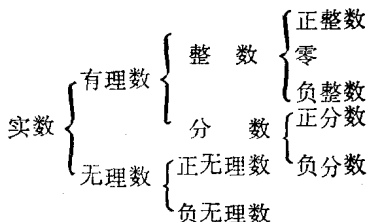
两个无理数的加、减、乘、除的结果不一定是无理数。

无理数不能表示为分数 $\frac{n}{m}$ (m, n 为整数, $m \neq 0$)。

5. 实数

(1) 实数 有理数和无理数统称实数。

(2) 实数的分类



(3) 实数与数轴上的点一一对应

(4) 实数的运算

① 运算顺序

(i) 有括号的式子，一般先作括号内的运算。

(ii) 没有括号的式子中，先乘方、开方，再乘除，最后加减。

(iii) 同一级运算中（加和减是第一级运算，乘和除，是第二级运算，乘方和开方是第三级运算），如没有括号，则先从左到右的顺序依次作运算。

(iv) 为了计算简便，可依据运算定律变更运算顺序。

② 运算定律（ a 、 b 、 c 、 m 均为实数）

(i) 交换律： $a+b=b+a$ ， $a \cdot b=b \cdot a$ ；

(ii) 结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$ ；
 $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ ；

(iii) 分配律： $m(a+b)=ma+mb$ 。

二、运用技能

例1 (1) 把2268分解成质因数的连乘积；

(2) 求360、432、792的最大公约数；

(3) 求54、90、162的最小公倍数。

解： (1)

2		2	2	6	8
2		1	1	3	4
3		5	6	7	
3		1	8	9	
		7	6	3	
					9

$$\therefore 2268=2^2 \times 3^2 \times 7 \times 9.$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad 2 \mid 360 \quad 432 \quad 792 \\
 \quad \quad 2 \mid 180 \quad 216 \quad 396 \\
 \quad \quad \quad 2 \mid 90 \quad 108 \quad 198 \\
 \quad \quad \quad \quad 3 \mid 45 \quad 54 \quad 99 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 3 \mid 15 \quad 18 \quad 33 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 5 \quad 6 \quad 11
 \end{array}$$

\therefore 360、432、792的最大公约数为 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$ 。

$$\begin{array}{r}
 (3) \quad 2 \mid 54 \quad 90 \quad 162 \\
 \quad \quad 3 \mid 27 \quad 45 \quad 81 \\
 \quad \quad \quad 3 \mid 9 \quad 15 \quad 27 \\
 \quad \quad \quad \quad 3 \quad 5 \quad 9
 \end{array}$$

\therefore 54、90、162的最小公倍数为 $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 9 = 2430$ 。

例2 (1) 写出小于5的非负整数；

(1) 求-4和6之间的所有整数(不包括-4和6)的积。

解: (1) 0, 1, 2, 3, 4;

(2) $(-3)(-2)(-1) \times 0 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 0$ 。

说明: 不要把(1)写成1, 2, 3, 4; 不要把(2)写成 $(-3)(-2)(-1) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = -720$ 。

例3 (1) $a > -a$ 对吗?

(2) 若 $x < 0$, $x + |x| = ?$ $x - |x| = ?$

(3) $\sqrt{(x-2)^2} = ?$

解: (1) 当 $a > 0$ 时, $a > -a$; 当 $a = 0$ 时, $a = -a$; 当 $a < 0$ 时, $a < -a$ 。所以说, 写成 $a > -a$ 不对。

(2) 当 $x < 0$ 时, $x + |x| = x - x = 0$, $x - |x| = x -$