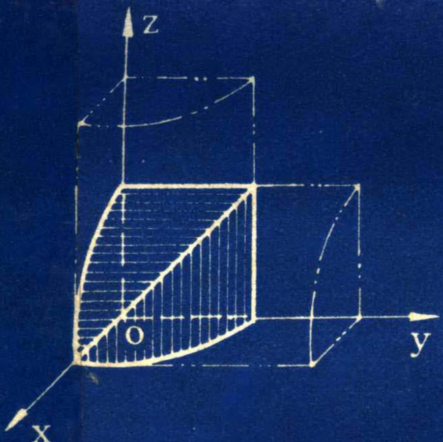
向量代数与空间解析几何解题指导

〔苏联〕 П.И.РУБАН И Е.Е.ГАРМАШ 著

钱宜康 林举翰 钱澄鉴 译编



华南工学院出版社

向量代数与空间解析几何
解题指导

〔苏联〕П. И. РУБАН И Е. Е. ГАРМАШ 著

钱宝康　林举翰　钱澄鉴　译编

华南工学院出版社

内 容 简 介

本书是根据〔苏联〕П·И·РУБАН和Е·Е·ГАРМАШ合著《解析几何解题指南》一书的空间解析几何部分译编的。内容包括行列式及线性方程组、向量代数基础与空间解析几何。全书共六章，每章有内容提要、例题分析、习题及习题的答案或解三个部分。例题是精选的，方法典型、富于启发，并有较多的图形分析、作法和说明。本书是理工科大学生、电大、函授及职大学生学习本课程和高等数学的辅导教材，也可供从事本课程教学的教师参考。

向量代数与空间解析几何解题指导

〔苏联〕 П·И·РУБАН И Е·Е·ГАРМАШ 著

钱宝康 林举翰 钱澄鉴 译编

责任编辑：林炳清

华南工学院出版社出版发行

（广州 五山）

广东省新华书店经销 华南工学院印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张：7.125 字数：161千

1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷

印数1—5000

统一书号：13410·007 定价：1.20元

译 编 序

向量代数是研究物理、力学、工程数学以及许多技术科学的重要工具之一，它在高等数学中主要是作为研究空间图形性质的一种工具。而空间解析几何在研究多元微积分学方面则起重要作用，它能使许多问题借助空间图形的直观变得易于解决。本书从初学者的实际出发，首先把每章解题时用到的知识进行简要的概括和小结，然后通过分析例题，启示读者如何把所学知识与所论问题联系起来，着重分析解题思路，揭示解题规律，使读者在掌握它的基本理论的同时学会思考问题的方法。每章之后还编排了适量的习题，并附有习题的答案或解。

在译编本书时，我们还结合自己的教学体会，对原书的内容作了少量的改动，对空间图形的作图问题作了详细的补充，使本书更能适合我国读者学习的需求。本书译完后，汪国强副教授审阅了全稿并提出许多宝贵的修改意见，蔡永[illegible]精心绘制了插图，在此表示衷心感谢。

译编者　　1986年5月

目　　录

第一章　行列式及线性方程组

介绍行列式及线性方程组的基本知识对学习向量代数与空间解析几何有重要的意义。

§1　二阶行列式

考察两个二元线性方程所组成的方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{1}$$

解这方程组，得

$$\begin{aligned} x&=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y&=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{aligned} \tag{2}$$

为了使公式（2）便于记忆，我们在下面引入二阶行列式的概念。

设已知四个数排成正方表

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix},$$

则数 $A_1B_2-A_2B_1$ 称为对应于这个表的二阶行列式。这个二阶行列式采用记号

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

表示，因此有定义

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1. \qquad (3)$$

数 A_1、A_2、B_1、B_2 称为行列式的元素，横排称为行，竖排称为列。元素 A_1、B_2 组成行列式的主对角线，而元素 A_2、B_1 组成次对角线。

$$\begin{array}{cl} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ & \times & \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \text{次对角线} \\ \\ \\ \text{主对角线} \end{array} \end{array}$$

为了计算二阶行列式，要把主对角线元素的乘积减去次对角线元素的乘积。

例如

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 6 = 50.$$

显然，利用行列式便可将方程组（1）的解（2）表示为

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (4)$$

分母的行列式是由方程组（1）未知数的系数所构成，这些系数的排列次序与方程组（1）相同，称这行列式为方程组（1）的系数行列式。

（4）式中分子的行列式，是在系数行列式中，用方程组的常数项依次地替换第一和第二列而得到的。

有时系数行列式用符号 Δ 表示，而分子的行列式依次地

用 Δ_x 和 Δ_y 表示，于是（4）式可以写成

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}\quad(\Delta\neq 0).$$

§2 三阶行列式

考察含有三个未知数的三个线性方程所组成的方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}\tag{5}$$

解这方程组，可得

$$x=\frac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1-d_1b_3c_2-d_2b_1c_3}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$$

$$y=\frac{a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_3d_2c_1-a_1d_3c_2-a_2d_1c_3}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$$

（6）

$$z=\frac{a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_3b_2d_1-a_1b_3d_2-a_2b_1d_3}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$$

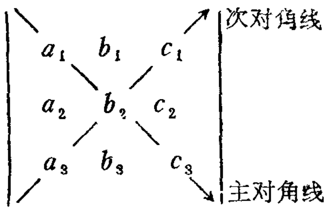
对于这三个分式的分子和分母的表示式，我们像上面引入二阶行列式那样引入记号，把分母表示成

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\tag{7}$$

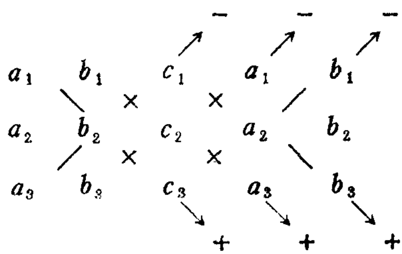
表示式（7）称为三阶行列式。

三阶行列式有9个元素，三行，三列，两条对角线——主对角线和次对角线。



式（7）表明，在行列式的展开式中含有6项．为了写出它们，介绍下面这个简单的方法：

把行列式的元素按照它在行列式中排列的次序全部写出，并且在它右边再写出行列式的第一、二列



（8）

在行列式主对角线上的元素的乘积取正号，在两条和主对角线平行的直线上所含有的三个元素的乘积也取正号．

在次对角线上元素的乘积，以及和它平行的两条直线上所含有的三个元素的乘积取负号．

这六个乘积的代数和给出三阶行列式的值．

参看图式（8）便可写出

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1$$

$$-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1.$$

也可采用另一种形式写出三阶行列式，只要用图式(9)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \nearrow & - \\
a_1 & & b_1 & & c_1 & & \\
 & \diagdown & & \diagup & & \nearrow & - \\
a_2 & & b_2 & & c_2 & & \\
 & \times & & \times & & \nearrow & - \\
a_3 & & b_3 & & c_3 & & \\
 & \times & & \times & & \searrow & + \\
a_1 & & b_1 & & c_1 & & \\
 & \diagup & & \diagdown & & \searrow & + \\
a_2 & & b_2 & & c_2 & & \\
 & & & & & \searrow & +
\end{array} \qquad (9)$$

代替图式（8），便有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 \\ -a_1b_3c_2-a_2b_1c_3.$$

上述计算三阶行列式的法则通常叫做对角线法则。

例如计算行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

利用对角线法则

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \nearrow & - \\
1 & & 2 & & 3 & & \\
 & \diagdown & & \diagup & & \nearrow & - \\
-1 & & 3 & & 4 & & \\
 & \times & & \times & & \nearrow & - \\
2 & & 5 & & 2 & & \\
 & \times & & \times & & \searrow & + \\
1 & & 2 & & 3 & & \\
 & \diagup & & \diagdown & & \searrow & + \\
-1 & & 3 & & 4 & & \\
 & & & & & \searrow & +
\end{array}$$

得

$$\Delta = 1\cdot3\cdot2+(-1)\cdot5\cdot3+2\cdot2\cdot4-2\cdot3\cdot3-1\cdot5\cdot4 \\ -(-1)\cdot2\cdot2=-27.$$

利用行列式，式（6）可以写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{\Delta_y}{\Delta},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (10)$$

§3 三阶行列式的主要性质

性质 1 如果把行列式的列换成行或行换成列，则它的值不变．如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质 2 对调行列式的两列或两行，它改变符号．如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质 3 任何一个数乘行列式，等于用这个数乘它的任何一行或任何一列的所有元素。
如

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质 4 如果在行列式中有两行或两列相同，则它等于零。如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 5 如果行列式的某一行或某一列的元素都是两项之和，则此行列式等于两个行列式之和。如

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3+a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一行或某一列的所有元素同乘以一个数后，加到另一行或另一列的对应元素上去，行列式的值不变。如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+kc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+kc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+kc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

按任一行或列的元素展开三阶行列式：

把行列式中某一元素所在的行和列划去后留下来的行列式称为这行列式对应于该元素的子行列式。例如，对应于元素 b_3 的行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

的子行列式是二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

设行列式中某一元素所在的行数为 i，列数为 j，将对应于该元素的子行列式乘上 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子称为对应于该元素的代数余子式。例如，行列式 Δ 对应于元素 b_3 的代数余子式为

$$B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

因为 b_3 在第 2 列第 3 行，而 $(-1)^{2+3} = (-1)^5 = -1$。某元素的代数余子式，我们用这个元素的大写字母并附以相同的下标来表示，例如元素 a_1 的代数余子式用 A_1 表示，b_2 的代数余子式用 B_2 表示，其他依此类推。

展开三阶行列式，并把含有第一列相同元素的项合并起来，便得到

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\ &\quad - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &\quad + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) \\ &\quad + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \end{aligned}$$

或 $$\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3. \qquad (11)$$

把三阶行列式表示为（11）式中等号右边的式子，称为行列式按第一列展开。同样也可以把行列式按任一行（或列）展开，这时需把该行（或列）的元素乘以其对应的代数余子式。

例如，按第二行展开下面的行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 25 - 16 = 11.$$

又如，按第二列展开下面的行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$+ 1\cdot(-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 0 + 60 - 27 = 33.$$

四阶行列式、五阶行列式等等也完全一样计算。如

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} - 0 = 18.$$

上面这个行列式是按第三行展开的。

§4 三元线性方程组的解

1. 三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{12}$$

如果方程组（12）的系数行列式$\Delta\neq0$，则方程组(12)有唯一确定的解

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

其中Δ_x，Δ_y，Δ_z是把行列式Δ中对应未知数的各系数换成常数项后的三阶行列式。

如果$\Delta=0$，但Δ_x，Δ_y，Δ_z至少有一个不等于零，则方程组（12）无解。

如果$\Delta=0$，且$\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，这时方程（12）可能无解，也可能有无穷多组解。

2. 两个三元线性方程的齐次组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases} \tag{13}$$

显然，$x=y=z=0$是方程组（13）的一组解，这组解称为（13）的零解。现在的问题是：方程组（13）除了这组零解以外，是否还有不全为零的解？如果有，如何求解？

（1）假定三个二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

中至少有一个不等于零，例如第一个不等于零，那末把z的

项移到右侧并关于 x 和 y 解出方程，得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}z,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}z,$$

其中 z 可以取任意值。

记
$$\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=k$$

则得

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}k,\quad y=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}k,\quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}k,\qquad (14)$$

其中 k 是任意常数．若取 $k\neq 0$，便得方程组（13）的 x，y，z 不全为零的解，叫做方程组（13）的非零解．如果第一个行列式等于零而第二个或第三个行列式不等于零时结论仍然成立．因此，若三个行列式中至少有一个不等于零，则齐次方程组（13）的解由公式（14）来确定．

如果式（14）等号右边的行列式都不等于零，可以把此式合并起来写成

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.\qquad (15)$$

这就是说，方程组（13）的任何一组解 x，y，z 必与上式中的三个分母成比例，又知道和它们成比例的任意三个数必定是方程组（13）的一组解．

（2）如果在公式（14）中的所有三个行列式都等于零，那末方程组（13）的对应系数成比例，因而组（13）变为一个方程

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,$$

假定有一个系数，比如 $a_1\neq 0$，便得

$$x=-\frac{b_1y+c_1z}{a_1},$$

其中 y 和 z 可以取任意值．因此，若三个行列式都等于零，齐次组（13）也一定有非零解．

3． 三个三元线性方程的齐次组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases} \tag{16}$$

有非零解的必要与充分条件是这方程组的系数行列式 $\Delta=0$．

§5 行列式在平面解析几何中的几个应用

1． 三角形的面积

由平面解析几何知道，以点 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3) 为顶点的三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值．}$$

2． 三点在一直线上的条件

如果三点在一直线上，则 $S=0$，反之亦然．因而三点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 在一直线上的条件是