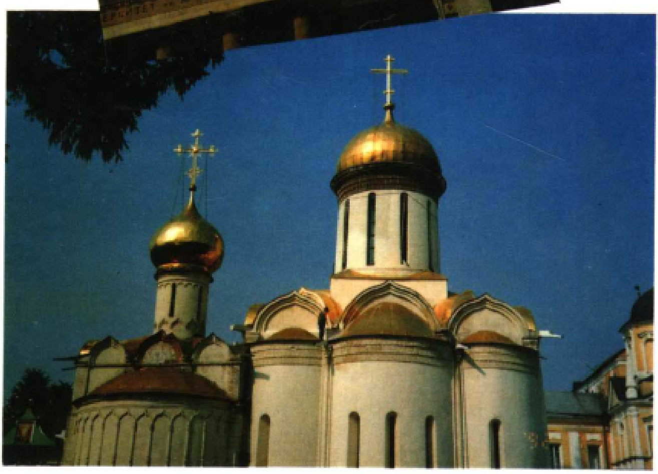
蘇聯青年數學科普叢書

7



反　演

王敬庚譯

九章出版社・開明(大陸)出版社　聯合出版

從 50 年代至 80 年代，前蘇聯爲提昇國民數學之素養，特聘包括多位科學院士在內的當代頗具崇高學術地位的數學家撰稿，出版了一系列的青年數學科普叢書。我們挑選了其中 45 本經典之作中譯重版，冀望藉本叢書豐富現代中學生及中學教師之視野。

內容簡介

本書第一章介紹反演的性質，以及反演在解初等幾何作圖題中的應用，並專門應用反演討論了各種圓束的結構。第二章揭示了平面上的各種初等變換：等距變換(包括平移、旋轉和軸反射)，伸縮及反演與複變量的線性函數及線性分式函數之間的密切聯繫。第三章介紹了幾何學的群論觀點，並用這種觀點簡要地建立起歐幾里得幾何學和羅巴切夫斯基幾何學，介紹了龐加萊用反演為羅氏幾何學提供的一個解釋(模型)。

本書可供中學生課外閱讀，並可作為中學數學教師為開拓學生視野而開設的課外講座的材料。

九章 · 開明

ISBN 957-603-157-5

00110

9 789576 031571

蘇聯青年數學科普叢書

7

反 演

ИНВЕРСИЯ

И.Я.БАКЕЛЬМАН 原著

王敬庚 譯

九章出版社 · 開明(大陸)出版社 聯合出版

國立中央圖書館出版品預行編目資料

反演 / I. Ya. Bakel'man 原著 ; 王敬庚譯. --
一版. -- 臺北市 : 九章, 1998[民87]
面 ; 公分. -- (蘇聯青年數學科普叢書
; 7)
譯自 : Iversions
ISBN 957-603-157-5(平裝)

1. 幾何

316 87004094

《蘇聯青年數學科普叢書》7

反演

Iversions

I. Ya. Bakel'man 原著

王敬庚 譯

出版者 / 九章出版社
地址 / 台北市信義路3段147巷15弄5-1號7樓
登記證 / 局版臺業字第2327號
電話 / (02)27048405、27045243、23257970
傳真 / (02)27067353
e-mail:ccmp@tptsl.seed.net.tw
發行人 / 孫文先
印刷者 / 九章文具印刷品有限公司
出版日期 / 1998年4月一版一刷
定價 /110元整
郵政劃撥 / 1053467-6 九章出版社
總經銷 / 學英文化事業有限公司
台北縣新店市中正路四維巷2弄5號5樓

查詢本社圖書目錄 /
http://www.hk.super.net/~phcheung/ccmp.html

内 容 簡 介

本書分為三章. 第一章介紹反演的性質,以及反演在解初等幾何作圖題中的應用,並專門應用反演討論了各種圓束的結構,本章最後還用反演的方法給出了平面幾何中著名的托勒密定理的一個不尋常的證明. 第二章揭示了平面上的各種初等變換:等距變換(包括平移、旋轉和軸反射),伸縮及反演與複變量的線性函數及線性分式函數之間的密切聯繫——它們可以互相表示. 第三章介紹了幾何學的群論觀點,即一種變換群下的不變量的集合構成一門幾何學,並用這種觀點簡要地建立起歐幾里得幾何學和羅巴切夫斯基幾何學,介紹了龐加萊用反演為羅氏幾何學提供的一個解釋(模型).

本書可供中學生課外閱讀,並可作為中學數學教師為開拓學生視野而開設的課外講座的材料.

前　　言

在平面幾何的研究中，幾何圖形的各種變換，常常起重要的作用．在這些變換當中，用初等方法最經常討論的是所謂的等距和伸縮．它們的一個重要性質是，保持幾何圖形的基本類別不變：直線還變成直線，圓還變成圓．反演是幾何圖形的更為複雜的變換，它可以把直線變換成圓，也可以把圓變換成直線．應用這種變換，對於初等幾何中的許多問題，特別是有關作圖和曲線束的問題，我們可以得到統一的解法．這樣，反演的理論為處理各類幾何圖形之間的相互關係，提供了一個較自然的工具．在這個理論中使用的方法，對於初等和高等的幾何中出現的邊界問題，也是有效的．我們還能應用它，在歐氏平面上，為羅巴切夫斯基幾何學提供一種解釋．反演和複數之間，或者更準確地說，反演和定義域與值域都是複數的初等函數之間，存在有趣的聯繫．

這本小册子，討論反演變換和它們的應用．為了提供盡可能最方便的表示，我們把材料分為三章．

第 1 章將研究反演變換和它們在初等幾何中的應

用. 在第 2 章中,我們將指出,可以把第 1 章中的變換,表示為複變量的線性函數和線性分式函數;反過來,我們將證實,每一個這樣的函數,決定平面上的一個變換,它可以分解為一系列的等距和反演. 第 3 章用群論的觀點給出幾何學的基礎;並採用這個基礎,依據第 1 章和第 2 章中的材料,簡要地建立起歐幾里得平面幾何學和羅巴切夫斯基平面幾何學.

對於在本書第 3 章中簡略論及的內容,讀者可以在 H. B. 葉菲莫夫的《高等幾何學》中,找到更為詳細的說明.

本書是以作者於不同時期對列寧格勒的學生們所作的講演為基礎寫成的.

目　録

第1章　反演和圓束

§1.1.　平面的初等變換

從一個幾何圖形變換成另一個幾何圖形的思想，在本書中將起主要作用．這裏，我們只討論平面上的圖形．首先，我們要精確地敘述幾何圖形的變換是什麼意思．考慮一個平面，假設我們有某個規則，使得對於平面上的每一個點 X，決定一個在同一平面上與它對應的點 X'，這個對應規則（我們稱呼它為 T）叫做平面的一個**變換**，對應於點 X 的點 X'，叫做 X 在 T 之下的**像**．平面的變換用大寫字母表示，如果 T 是平面的某個變換，且平面上某個點 X 在 T 之下的像是 X'，我們就記為 $X'=T(X)$．

給定平面的一個變換 T 及一個平面圖形 F（例如一條直線或一個圓），T 把圖形 F 上的每一點 X，變成它的像點 X'，由圖形 F 的所有點的像點組成的圖形 F'，叫做**圖形** F **在變換** T **之下的像**．我們通常把圖形 F' 記為 $T(F)$（見圖 1.1）．

通常，一個點和它的像是不重合的，當點 X 和它的像 $T(X)$ 重合時，我們就把點 X 叫做變換 T 的不動點.

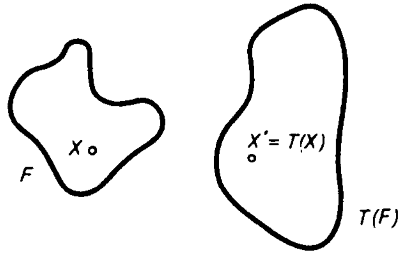


圖 1.1

把平面上每一點變成它自身的變換，叫做恒同變換. 換句話說，平面的一個變換是恒同變換，當且僅當平面上的所有點都是不動點. 我們將用字母 I 表示恒同變換.

如果一個圖形 F 在變換 T 之下的像和 F 重合，即

$$F = T(F),$$

就稱圖形 F 在變換 T 之下是不變的.

注意到如下事實是重要的：說一個圖形在某個變換下是不變的，並不要求這個圖形在該變換下有單個的不動點. 例如，若 T 是平面統一點 O 經過某個非零的固定角①的旋轉，則 T 的唯一的不動點是 O. 這樣，所有圓心在 O 的非退化的圓，在 T 之下都是不變的，但是它們之中沒有一個包含單個的不動點(圖 1.2).

① 非零角的意思是指這個角的弧度不是 2π 的整數倍.

下面我們更詳細地來考察平面的初等變換.

1.1.1. 關於直線的反射. 平面關於直線 l 的反射定義為:若點 X 在 l 上,則 X 變成它自身;若點 X 不在 l 上,則取 X 關於直線 l 的對稱點 X' 作為 X 的像(圖 1.3).

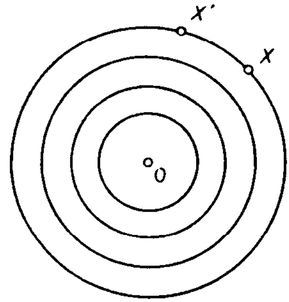


圖 1.2

所有以直線 l 為對稱軸的圖形,包括直線 l 自身,是在關於直線 l 的反射下不變的圖形. 圖 1.4 畫出了兩個這樣的不變圖形.

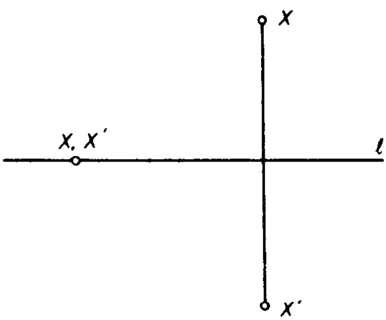


圖 1.3

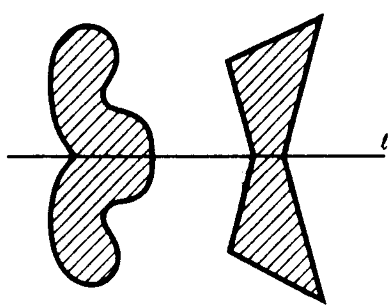


圖 1.4

直線 l 上的所有點，且只有這些點，是上述變換下的不動點.

1.1.2. **平移**. 平面的平移定義如下：假設直線 l 在平面上，在 l 上給定線段 AB，若點 X 不在直線 l 上，則它的像 X' 是以 AB 和 AX 為鄰邊的平行四邊形的第 4 個頂點；若點 X 在直線 l 上，則我們在 l 上取一點 X' 作為它的像，該點使得線段 AX 和 BX' 等長，且線段 XX' 和線段 AB 等長. 由此可見，平移把平面上的每一點，沿着從 A 到 B 的方向，移動距離 AB 這麼遠(圖 1.5). 若採用向量術語，就是沿向量 $\mathbf{AB}$ 移動平面上的每一點，也就是，對於平面上的每一點 X，向量等式 $\mathbf{XX'}=\mathbf{AB}$ 成立(圖 1.6).

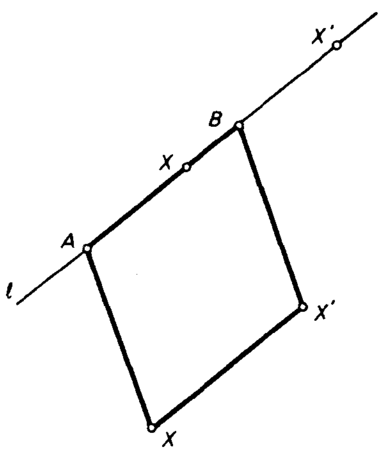


圖 1.5

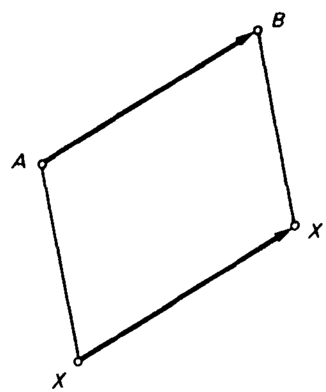


圖 1.6

若向量 $\boldsymbol{AB}$ 是零向量(即點 A 與點 B 重合),則沿向量 $\boldsymbol{AB}$ 的平移是恒同變換.

設 T 是沿非零向量 $\boldsymbol{AB}$ 的平移,顯然 T 沒有不動點. T 之下的不變圖形包括,例如所有與線段 AB 所在直線平行的直線,還有其他許多不變的圖形. 圖 1.7 和 1.8 描繪的圖形 L 和 Q,在 T 之下是不變的,此處曲線 L_k 和 Q_k 分别是曲線 L_{k-1}和 Q_{k-1}在 T 之下的像.

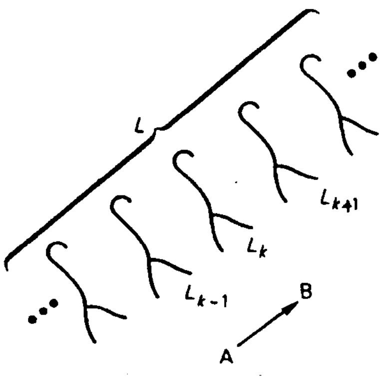


圖 1.7

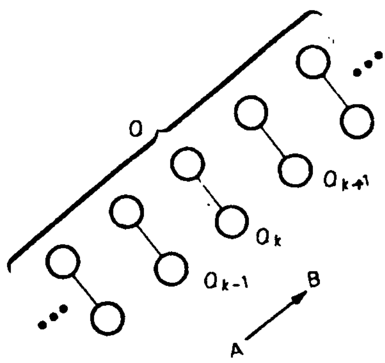


圖 1.8

1.1.3. 繞一點的旋轉. 設 O 是平面上的一個已知點,α 是一個已知角,我們用如下法則定義平面繞點 O 轉過角 α 的旋轉:對於平面上任意一點 X,我們將線段 OX 繞着點 O 旋轉,轉過角 α(若 $\alpha>0$,則沿逆時針方

向旋轉；若 $\alpha<0$，則沿順時針方向旋轉，轉過角 $|\alpha|$)，將所得線段的終點 X' 取作 X 的像，點 O 在這樣的旋轉下是不動點.

若 $\alpha=0$，則這個旋轉是恒同變換.

設 T 是繞點 O 轉過某個非零角 α 的旋轉，顯然這個變換 T 僅有的不動點是點 O，以 O 為中心的圓，是這個變換下的不變圖形，若角 α 的弧度是

$$\alpha=\frac{2\pi}{n},$$

此處 n 是自然數，則以 O 為中心的圓的內接正 m 邊形在 T 之下是不變的，當且僅當邊數 m 能被 n 整除(圖 1.9). 在圖 1.10 中，我們看到一個更複雜的不變圖形.

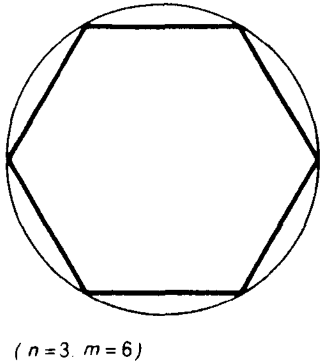


圖 1.9

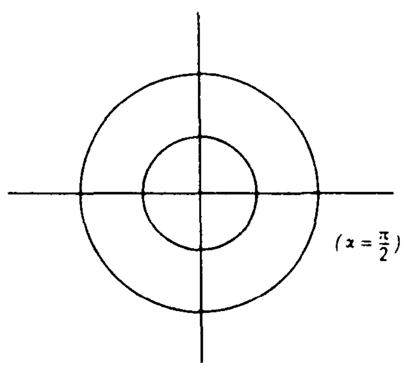


圖 1.10

1.1.4.　等距.　等距是保持兩點間距離不變的平面變換，也就是說，T 是等距當且僅當對於平面上的任意兩點 X 和 Y，線段 XY 和 $T(X)T(Y)$ 等長（或者等價地說，距離 XY 和 $T(X)T(Y)$ 相等）. 我們進一步要求變換 T 是一一的和滿映射，也就是，平面上的每一個點，都是其他某個點的像（T 是滿映射），並且，沒有兩個不同的點的像相同. 容易看到前面描述過的所有變換都是等距. 在如下意義上，我們也可以說，它的逆也是真的：我們能够證明，任何一個等距，或者是一個旋轉，或者是一個平移，或者是一個關於一條直線的反射，或者是它們的某個複合（連續施行）.

1.1.5.　伸縮.　設 O 是平面上的某個定點，$k>0$ 是某個定數. 具有中心 O 和係數 k 的伸縮[①]是平面的一個變換，它把點 O 變到自身，與點 O 不同的任一點 X 變到位於射線（半直線）OX 上的一點 X'，滿足

$$OX' = k \cdot OX.$$

當 $k=1$ 時，這個伸縮即為恒同變換. 當 $k\neq1$ 時，這個變換僅有一個不動點，即伸縮的中心，點 O. 我們注意到，當 $k<1$ 時，已知圖形在伸縮之下“縮小”，而當 $k>1$ 時，則“脹大”. 以伸縮的中心為起點的射線，在伸縮之下

---

① 這裏的伸縮，即我們通常所說的“位似變換”，中心 O 即位似中心，係數 k（k 可以小於零）即位似比. ——中譯者注.

顯然是不變的.

我們能够用非常簡單的方法,展現一個更加複雜的不變圖形. 設 F 是平面上的某個圖形,我們用 mF 表示圖形 F',它是 F 在具有中心 O 和係數 m 的伸縮之下的像(圖 1.11). 給定一個具有中心 O 和係數 k 的伸縮 T,我們考察圖形

$$\cdots,\frac{1}{k^m}F,\frac{1}{k^{m-1}}F,\cdots,\frac{1}{k}F,F,kF,\cdots,k^{m-1}F,k^mF,\cdots.$$

容易證明,由所有這些圖形的"併"表示的圖形 G(圖 1.12)在變換 T 之下是不變的.

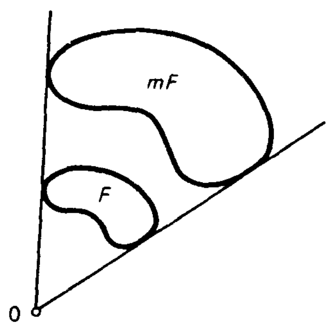


圖 1.11

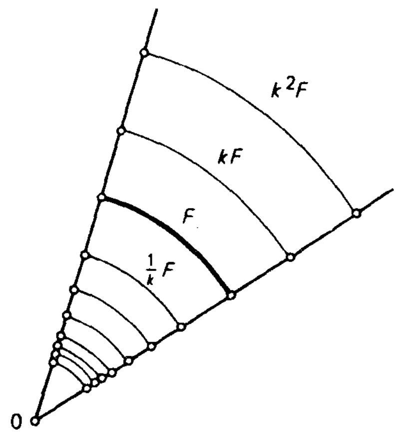


圖 1.12