中国科学院考研指定参考书

中国科学技术大学数学教学丛书

微积分
（上）

谢盛刚　李　娟　陈秋桂　编

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术大学数学教学丛书

微 积 分

（上）

谢盛刚　李　娟　陈秋桂 编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书的前身是中国科学技术大学数学教研室编写的《高等数学导论》. 全书分上、下两册出版. 本书为上册，主要内容包括：极限与连续，一元函数的微分学、不定积分、定积分，常微分方程和实数集的连续性. 下册包括多元微积分、级数、含参变量的积分和 Fourier 分析. 本书基础理论完整严密，论述简明扼要，同时又避开了枝节问题的干扰，使重点突出，主线清楚.

本书适合于理工科大学本科一年级使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分（上）/谢盛刚等编. —北京：科学出版社，2004
（中国科学技术大学数学教学丛书）
ISBN 7-03-013150-9

Ⅰ. 微… Ⅱ. 谢… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 033507 号

责任编辑：杨 波 姚莉丽/责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年7月第 一 版　开本：B5（720×1000）
2004年7月第一次印刷　印张：16 1/4
印数：1—4 000　字数：303 000

定价：22.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

序　　言

本书分为上、下两册，内容和大多数微积分教材差不多．它的前身是中国科学技术大学数学教研室编写的《高等数学导论》（以下简称《导论》）．《导论》（包括出版前讲义形式的《导论》）作为非数学专业的微积分教科书，在中国科学技术大学的大部分专业使用已有 20 多年．长期的教学实践证明，《导论》是一套优秀的微积分教材．

本书继承了《导论》注重基础，论理严密，叙述简明的特点，对《导论》的内容进行了必要的增、删，经过重新编写，使所需授课（包括习题课）时间由原来的三学期共 230 学时，缩减为现在的两学期共 196 学时．

本书与《导论》相比，主要的改变有以下几点．

1．将实数理论和可积性理论编在一起，作为上册的最后一章．我们这样处理的理由是：1）实数理论和极限理论都是微积分的基础理论，对初学者而言又都是学习的难点．将实数理论放在学完微积分之后再讲，就分散了难点．2）在讲极限理论时，对一些基于实数连续性的定理述而不证，可以使学生不致陷入实数连续性理论的漩涡，从而能集中精力学习一元微积分的基本理论和方法．3）某些对数学需求相对少一些的专业，这一章可以部分选讲甚至完全不讲，这样本书就可能适应不同层次教学的需要．

2．对基础理论有适当加强．例如对实数集的连续性、$\mathbf{R}^2$ 的完备性和外微分形式等的讨论都比《导论》有所深入．

3．对本不属于微积分的内容进行了一定程度的精减．1）微分方程：将原来的两章并成一章，内容的选取仅以后续课程（如数理方程）和物理课程的教学需要为准，对微分方程的理论不进行深入讨论．那些想进一步学习微分方程理论的学生，应当选修相应的专门课程；2）解析几何的内容也有相应删减，原则上以满足多元微积分的教学需要为准．

4．与物理关系较密切的部分，主要是“场论”，着重介绍其中的数学理论，尽可能少牵涉物理问题．把物理的问题留给物理教师去讲，效果可能会好得多．

5．对微积分理论延伸部分的内容（级数，含参变量积分，Fourier 分析）主要介绍其基本方法，在理论上不进行过多的讨论，一些重要但证明较长的定理（如 Fourier 级数的收敛定理）一律述而不证．

6．某些定理的证明做了改进，使之更为简明易懂．

7．更新了部分例题和习题．

我们认为，通过重新编写，本书保持了《导论》基础理论完整严密，论述简明扼要的特点，同时又避开了枝节问题的干扰，使重点突出，主线清楚．

本书内容比较丰富，适合于理工科大学本科一年级使用．讲完本书大约需要195～200学时（包括习题课），相当于两学期每周6学时的教学总时数（已考虑放假、考试等减少的课时）．根据需要，删减一部分教学内容，则可以把总授课时数削减至170左右．

凡是我们认为可以不讲的内容，在相应条目的标题后面都注有“*”号．删去这些内容，不会在教学中出现前后衔接方面的问题，但由于它们在理论上或实用上的重要性，建议尽可能都列入教学内容，但建议不列入考试范围．

习题附在每一节的正文之后，大多数章节的习题都偏多，不必全部布置给学生．计算题的答案作为附录放在书后．所有答案均经过反复核对，但仍难免有个别错误，希望读者谅解指正．

第1章、第2章和第4章附有一些补充题，主要是供那些对数学有兴趣又学有余力的学生作为课外练习之用．教师也可以选一些作为习题课上的例题．

在本书每一册的附录中都附有教学参考进度，详细注明了每一部分所需的课时数，其中（$x+y$）表示需x课时讲授课，y课时习题课，这主要是为教学经验不足的青年教师提供一个较合理的教学时间表，至于有经验的教师，完全可以按照自己的习惯和风格安排教学．

作者衷心感谢龚昇教授的关怀和指导．作者还对程艺、叶向东、章璞、张韵华和戴小莉等同志的支持和帮助表示衷心的感谢．

本书的初稿曾印成讲义在校内多个专业使用，所有使用过讲义的教师在全身心投入教学的过程中，对讲义提出了大量修改意见．可以说本书是众多教师集体劳动的成果．我们衷心感谢这些教师的无私帮助．

作者殷切期待来自读者对本书的批评和建议．

作　者

2003年12月

于合肥中国科学技术大学

目　　录

第 1 章 极限与连续

1.1 数 列 极 限

先定义几个通用的术语和记号.

实数的全体记成 $\mathbf{R}$.

设 $E \subset \mathbf{R}$, 如果有实数 M, 使得对任一个 E 中的元素 x, 都有

$$x \leqslant M,$$

则称 E 有上界, M 称为 E 的一个上界. 类似可以定义集 E 有下界和 E 的下界.

在第 6 章, 我们将证明下述重要命题.

定理 1.1.1(*确界原理*) 设 E 是非空数集. 若 E 有上界, 则 E 有最小上界; 若 E 有下界, 则 E 有最大下界.

E 的最小上界叫 E 的上确界, 记成 $\sup E$, 若 E 无上界, 就记 $\sup E = +\infty$; E 的最大下界叫 E 的下确界, 记成 $\inf E$, 若 E 无下界, 则记 $\inf E = -\infty$.

例如 $I_1 = (0,1)$, $I_2 = [0,1]$, 则 $\sup I_1 = \sup I_2 = 1$, $\inf I_1 = \inf I_2 = 0$.

显然, 若 E 有最大数 α, 则 $\alpha = \sup E$; 若 E 有最小数 β, 则 $\beta = \inf E$.

如果数集 E 既有上界, 又有下界, 就称 E 为有界集, 否则称 E 为无界集. 显然, 数集 E 有界的充分必要条件是, 存在正数 M, 使

$$|x| < M$$

对任何 $x \in E$ 都成立.

设 $E \subset \mathbf{R}$, $y = f(x)$ 在 E 上有定义. 记

$$f(E) = \{f(x) | x \in E\},$$

称为 E 关于 f 的像. 如果 E 是 f 的定义域, 则 $f(E)$ 就是 f 的值域.

如果 $f(E)$ 有上 (下) 界, 则称 f 在 E 有上 (下) 界; 如果 $f(E)$ 有界, 则称 f 在 E 有界; 如果 $f(E)$ 无界, 则称 f 在 E 无界; $f(E)$ 的上 (下) 确界, 称为 f 在 E 中的上 (下) 确界, 并记成 $\sup\limits_{x\in E} f(\inf\limits_{x\in E} f)$.

例如 $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \sin x = 1$, $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} \cos x = -1$, $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \tan x = +\infty$ 等.

设 $x_0 \in \mathbf{R}$, $r > 0$. 称区间 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 为 x_0 的 r 邻域; 称 $(x_0, x_0 + r)$ 为 x_0 的右侧邻域; 称 $(x_0 - r, x_0)$ 为 x_0 的左侧邻域. 把 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < r\}$ 称为 x_0 的 r 去心邻域, 它就是 x_0 的 r 邻域除去中心点 x_0 以后的集合.

1.1.1　数列极限的定义

一列实数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

叫数列, 记成 $\{a_n\}$.

a_n 叫数列的第 n 项, n 叫这一项的脚标. 数列不能等同于一个数集. 因为一个数集的两个不同的元素互不相等. 而数列中的不同的两项可以相等, 也就是说一个数可以在数列中多次甚至无穷多次出现.

数列 $\{a_n\}$ 其实就是定义在自然数集 $\mathbf{N}$ 上的函数 $f(n)$. 如果 $f(n)$ 有 (上、下) 界, 就称 $\{a_n\}$ 有 (上、下) 界; $f(n)$ 的上 (下) 界称为 $\{a_n\}$ 的上 (下) 界; $f(n)$ 的上 (下) 确界称为 $\{a_n\}$ 的上 (下) 确界, 记成 $\sup\{a_n\}(\inf\{a_n\})$.

"如果当 n 无限增大的时候, a_n 和 a 无限接近, 或者说 $|a_n - a|$ 无限趋于零, 就称 $\{a_n\}$ 以 a 为极限." 这是中学数学教材给数列极限下的定义, 由于是一种基于直观而非量化的描述, 所以不便使用, 但它是给出数列极限的准确定义的出发点.

先看一个例子. 设

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

我们知道, $\{a_n\}$ 以 1 为极限, 因为 $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$, 而当 n 无限增大时, $\frac{1}{n}$ 就无限减少而趋于零.

如果要 $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$ 小于 10^{-1}, 只要取 $n > 10$; 如果要 $|a_n - 1|$ 小于 10^{-3}, 只要取 $n > 10^3$ …… 总之, 无论我们给出一个多么小的正数 ε, 只要取 $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 就能使 $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$ 小于 ε.

一般而言, $\{a_n\}$ 以 a 为极限可以说成是: 无论给定一个多么小的正数 ε, 必可找到一个自然数 n_0, 只要 $n > n_0$, 就有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

于是, 我们有如下定义.

定义 1.1.1　设 $\{a_n\}$ 是给定的数列, 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbf{N}$, 只要 $n > n_0$, 就有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限, 也称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

或

$$\lim a_n = a,$$

也可以记成 $a_n \to a\,(n\to\infty)$.

有极限的数列称为收敛数列，不收敛的数列称为发散数列.

显然， $\lim a_n = a$ 和 $\lim(a_n - a) = 0$ 是一回事.

在定义中，正数 ε 是任意的，而 n_0 则是与 ε 有关的，所以必要时，可以记成 $n_0(\varepsilon)$ 或 n_ε. 一般当 ε 较小时， n_0 相应地要比较大些.

在考察一个数列的极限时，可以认为 ε 是一个“很小”的正数，而不必去考虑“较大”的那些 ε. 因为对于较小的 ε, 如果找到了需要的 $n_0(\varepsilon)$, 则对于较 ε 大的那些 ε', 当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时，必定有

$$|a_n - a| < \varepsilon < \varepsilon',$$

所以对那些比 ε 大的 ε', 都可以选取同样的 $n_0(\varepsilon') = n_0(\varepsilon)$.

$\lim a_n = a$ 也可以说成：任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbf{N}$. 当 $n > n_0$ 时，总有 $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. 这可以看成是定义 1.1.1 的解析几何的说法 (见图 1.1).

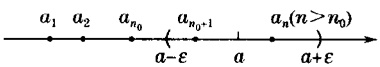

图 1.1

由于决定 a_n 的极限的是 n 充分大时 a_n 的值，所以任意改变有限多项 a_n 的值或从数列中删去任意有限多项不会改变数列的敛散性，也不会改变收敛数列的极限.

例 1.1.1 $a_n = a\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则

$$\lim a_n = a.$$

例 1.1.1 给出的数列叫常数列.

例 1.1.2 $\alpha > 0$, 则 $\lim \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$.

证 由

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| = \frac{1}{n^\alpha}$$

可知，要

$$\frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon,$$

只要

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

所以任给 $\varepsilon > 0$, 取

$$n_0 = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right],$$

则当 $n > n_0$, 即

$$n \geqslant \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] + 1 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

时，就有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon.$$

由定义可知

$$\lim \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

例 1.1.3　$|q| < 1$, 求证：　$\lim q^n = 0$.

证　因为

$$|q^n - 0| = |q|^n,$$

任取 $0 < \varepsilon < 1$, 要

$$|q|^n < \varepsilon,$$

只要

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}.$$

所以，取

$$n_0 = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right],$$

则当 $n > n_0$ 时，就有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

由定义可知

$$\lim q^n = 0.$$

在证明当中，我们要求 $0 < \varepsilon < 1$, 如果给的是 $\varepsilon' \geqslant 1$, 则我们可以任取一个 $0 < \varepsilon < 1$, 并取 $n_0 = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right]$, 则当 $n > n_0$ 时，必有

$$|q^n - 0| < \varepsilon < \varepsilon'.$$

其实，这一点在前面已经解释过了.

1.1.2 收敛数列的性质

定理 1.1.2 如果 $\{a_n\}$ 为收敛数列，则 $\{a_n\}$ 为有界数列.

证 设 $\lim a_n = a$. 取 $\varepsilon = 1$, 由定义知道，存在 $n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时，有

$$|a_n - a| < 1.$$

即当 $n > n_0$ 时，有

$$|a_n| < |a| + 1.$$

而当 $n \leqslant n_0$ 时，有

$$|a_n| \leqslant \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0}|).$$

取

$$M = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0}|, |a| + 1),$$

则对所有 $n \in \mathbf{N}$, 都有

$$|a_n| \leqslant M. \qquad \square$$

由定理 1.1.2 可知，如果 $\{a_n\}$ 是无界数列，则 $\{a_n\}$ 一定是发散的.

定理 1.1.3 如果 $\{a_n\}$ 是收敛数列，则 $\{a_n\}$ 的极限是唯一的.

证 若不然，设 $\{a_n\}$ 有两个极限 a 和 b. 不妨设 $a < b$. 取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, 由定义可知，存在正整数 n_1 和 n_2 使当 $n > n_1$ 时，有

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{2},$$

而当 $n > n_2$ 时，有

$$|a_n - b| < \frac{b-a}{2}.$$

取 $n > \max\{n_1, n_2\}$, 则有

$$a_n - a < \frac{b-a}{2}$$

及

$$b - a_n < \frac{b-a}{2}.$$

两式相加得到不可能的不等式

$$b-a>b-a.$$

此说明收敛数列不能有两个不同的极限. □

从几何上看，定理 1.1.3 是十分明显的 (见图 1.2). 如果 $\lim a_n=a$, 则当 n 充分大时， a_n 都在 a 的 $\frac{b-a}{2}$ 邻域中， a_n 就不可能在 b 的 $\frac{b-a}{2}$ 邻域中，因为两个邻域没有公共点.

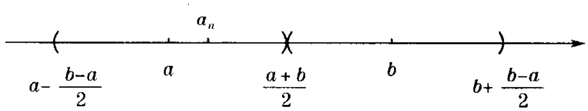

图 1.2

定理 1.1.4 设 $\lim a_n=a,\ \lim b_n=b$.

1° 如果有 $n_0\in\mathbf{N}$, 使当 $n>n_0$ 时 $a_n\geqslant b_n$, 则 $a\geqslant b$;

2° 如果 $a>b$, 则有 $n_0\in\mathbf{N}$ 及 $\tau>0$, 使当 $n>n_0$ 时， $a_n>b_n+\tau$.

证 1° 任给 $\varepsilon>0$, 取 $n_\varepsilon>n_0$, 使当 $n>n_\varepsilon$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon/2$ 和 $|b_n-b|<\varepsilon/2$. 于是当 $n>n_\varepsilon$ 时有

$$a+\frac{\varepsilon}{2}>a_n\geqslant b_n>b-\frac{\varepsilon}{2},$$

即对任意 $\varepsilon>0$, 都有

$$a>b-\varepsilon,$$

故必有

$$a\geqslant b.$$

2° 取 $\varepsilon=\frac{a-b}{4}$, 则有 $n_0\in\mathbf{N}$, 当 $n>n_0$ 时有

$$a_n>a-\varepsilon=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{4}$$

及

$$b_n<b+\varepsilon=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{4}.$$

命 $\tau=\frac{a-b}{2}$, 则当 $n>n_0$ 时就有

$$a_n>b_n+\tau.$$ □

如果在定理 1.1.4 中取 $b_n\equiv 0$, 则可得到如下推论.