

中国科学院考研指定参考书

中国科学技术大学数学教学丛书

# 微积分

(上)

谢盛刚 李娟 陈秋桂 编



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

中国科学技术大学数学教学丛书

# 微 积 分

(上)

谢盛刚 李 娟 陈秋桂 编

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书的前身是中国科学技术大学数学教研室编写的《高等数学导论》。全书分上、下两册出版。本书为上册, 主要内容包括: 极限与连续, 一元函数的微分学、不定积分、定积分, 常微分方程和实数集的连续性。下册包括多元微积分、级数、含参变量的积分和 Fourier 分析。本书基础理论完整严密, 论述简明扼要, 同时又避开了枝节问题的干扰, 使重点突出, 主线清楚。

本书适合于理工科大学本科一年级使用。

### 图书在版编目(CIP)数据

微积分(上)/谢盛刚等编. —北京: 科学出版社, 2004

(中国科学技术大学数学教学丛书)

ISBN 7-03-013150-9

I. 微… II. 谢… III. 微积分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 033507 号

责任编辑: 杨 波 姚莉丽/责任校对: 宋玲玲

责任印制: 安春生/封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东城根北街16号

邮政编码 100714

http://www.sciencep.com

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2004年7月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2004年7月第一次印刷 印张: 16 1/4

印数: 1—4 000 字数: 303 000

定价: 22.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

## 《中国科学技术大学数学教学丛书》编委会

主 编 程 艺

顾 问 (按汉语拼音排序)

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 陈希孺 | 方兆本 | 冯克勤 | 龚 昇 | 李翊神 |
| 石钟慈 | 史济怀 |     |     |     |
| 陈发来 | 陈 卿 | 陈祖墀 | 侯定丕 | 胡 森 |
| 蒋继发 | 李尚志 | 林 鹏 | 刘儒勋 | 刘太顺 |
| 缪柏其 | 苏 淳 | 吴耀华 | 徐俊明 | 叶向东 |
| 章 璞 | 赵林城 |     |     |     |

## 序 言

本书分为上、下两册，内容和大多数微积分教材差不多。它的前身是中国科学技术大学数学教研室编写的《高等数学导论》（以下简称《导论》）。《导论》（包括出版前讲义形式的《导论》）作为非数学专业的微积分教科书，在中国科学技术大学的大部分专业使用已有 20 多年。长期的教学实践证明，《导论》是一套优秀的微积分教材。

本书继承了《导论》注重基础，论理严密，叙述简明的特点，对《导论》的内容进行了必要的增、删，经过重新编写，使所需授课（包括习题课）时间由原来的三学期共 230 学时，缩减为现在的两学期共 196 学时。

本书与《导论》相比，主要的改变有以下几点。

1. 将实数理论和可积性理论编在一起，作为上册的最后一章。我们这样处理的理由是：1) 实数理论和极限理论都是微积分的基础理论，对初学者而言又都是学习的难点。将实数理论放在学完微积分之后再讲，就分散了难点。2) 在讲极限理论时，对一些基于实数连续性的定理述而不证，可以使学生不致陷入实数连续性理论的漩涡，从而能集中精力学习一元微积分的基本理论和方法。3) 某些对数学需求相对少一些的专业，这一章可以部分选讲甚至完全不讲，这样本书就可能适应不同层次教学的需要。

2. 对基础理论有适当加强。例如对实数集的连续性、 $\mathbf{R}^2$  的完备性和外微分形式等的讨论都比《导论》有所深入。

3. 对本不属于微积分的内容进行了一定程度的精减。1) 微分方程：将原来的两章并成一章，内容的选取仅以后续课程（如数理方程）和物理课程的教学需要为准，对微分方程的理论不进行深入讨论。那些想进一步学习微分方程理论的学生，应当选修相应的专门课程；2) 解析几何的内容也有相应删减，原则上以满足多元微积分的教学需要为准。

4. 与物理关系较密切的部分，主要是“场论”，着重介绍其中的数学理论，尽可能少牵涉物理问题。把物理的问题留给物理教师去讲，效果可能会好得多。

5. 对微积分理论延伸部分的内容（级数，含参变量积分，Fourier 分析）主要介绍其基本方法，在理论上不进行过多的讨论，一些重要但证明较长的定理（如 Fourier 级数的收敛定理）一律述而不证。

6. 某些定理的证明做了改进，使之更为简明易懂。

7. 更新了部分例题和习题。

我们认为,通过重新编写,本书保持了《导论》基础理论完整严密,论述简明扼要的特点,同时又避开了枝节问题的干扰,使重点突出,主线清楚.

本书内容比较丰富,适合于理工科大学本科一年级使用.讲完本书大约需要195~200学时(包括习题课),相当于两学期每周6学时的教学总时数(已考虑放假、考试等减少的课时).根据需要,删减一部分教学内容,则可以把总授课时数削减至170左右.

凡是我们认为可以不讲的内容,在相应条目的标题后面都注有“\*”号.删去这些内容,不会在教学中出现前后衔接方面的问题,但由于它们在理论上或实用上的重要性,建议尽可能都列入教学内容,但建议不列入考试范围.

习题附在每一节的正文之后,大多数章节的习题都偏多,不必全部布置给学生.计算题的答案作为附录放在书后.所有答案均经过反复核对,但仍难免有个别错误,希望读者谅解指正.

第1章、第2章和第4章附有一些补充题,主要是供那些对数学有兴趣又学有余力的学生作为课外练习之用.教师也可以选一些作为习题课上的例题.

在本书每一册的附录中都附有教学参考进度,详细注明了每一部分所需的课时数,其中 $(x+y)$ 表示需 $x$ 课时讲授课, $y$ 课时习题课,这主要是为教学经验不足的青年教师提供一个较合理的教学时间表,至于有经验的教师,完全可以按照自己的习惯和风格安排教学.

作者衷心感谢龚昇教授的关怀和指导.作者还对程艺、叶向东、章璞、张韵华和戴小莉等同志的支持和帮助表示衷心的感谢.

本书的初稿曾印成讲义在校内多个专业使用,所有使用过讲义的教师在全身心投入教学的过程中,对讲义提出了大量修改意见.可以说本书是众多教师集体劳动的成果.我们衷心感谢这些教师的无私帮助.

作者殷切期待来自读者对本书的批评和建议.

作 者

2003年12月

于合肥中国科学技术大学

# 目 录

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 第 1 章 极限与连续 .....             | 1  |
| 1.1 数列极限 .....                | 1  |
| 1.1.1 数列极限的定义 .....           | 2  |
| 1.1.2 收敛数列的性质 .....           | 5  |
| 1.1.3 收敛数列的四则运算 .....         | 7  |
| 1.1.4 数列收敛的判别法则 .....         | 10 |
| 1.1.5 自然对数底 $e$ .....         | 13 |
| 习题 1.1 .....                  | 14 |
| 1.2 函数极限 .....                | 16 |
| 1.2.1 函数在无穷大处的极限 .....        | 16 |
| 1.2.2 函数在一点的极限 .....          | 18 |
| 1.2.3 函数极限与数列极限的关系 .....      | 21 |
| 1.2.4 函数极限的性质和运算 .....        | 22 |
| 1.2.5 函数极限存在判别法 .....         | 23 |
| 1.2.6 两个重要极限 .....            | 25 |
| 1.2.7 无穷大量 .....              | 27 |
| 1.2.8 无穷小量 .....              | 28 |
| 1.2.9 关于“ $O$ ”和“ $o$ ” ..... | 30 |
| 习题 1.2 .....                  | 31 |
| 1.3 连续函数 .....                | 33 |
| 1.3.1 连续的定义 .....             | 33 |
| 1.3.2 连续函数的性质 .....           | 35 |
| 1.3.3 闭区间上连续函数的性质 .....       | 39 |
| 习题 1.3 .....                  | 41 |
| 第 1 章补充习题 .....               | 43 |
| 第 2 章 一元函数的微分学 .....          | 45 |
| 2.1 导数 .....                  | 45 |
| 2.1.1 导数的定义 .....             | 45 |
| 2.1.2 导数的运算 .....             | 48 |
| 2.1.3 求导基本法则和基本公式 .....       | 53 |
| 2.1.4 高阶导数 .....              | 54 |
| 习题 2.1 .....                  | 57 |
| 2.2 一元函数的微分 .....             | 60 |

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| 2.2.1 微分的定义 .....                      | 60  |
| 2.2.2 微分运算的基本公式和法则 .....               | 62  |
| 2.2.3 微分的形式不变性 .....                   | 62  |
| 习题 2.2 .....                           | 63  |
| 2.3 Lagrange 中值定理, 函数的增减与极值 .....      | 64  |
| 2.3.1 Fermat 定理和 Rolle 定理 .....        | 64  |
| 2.3.2 中值定理 .....                       | 66  |
| 2.3.3 函数的增减 .....                      | 68  |
| 2.3.4 函数的极值 .....                      | 69  |
| 习题 2.3 .....                           | 70  |
| 2.4 Cauchy 中值定理和未定式极限 .....            | 72  |
| 2.4.1 Cauchy 中值定理和 L'Hospital 法则 ..... | 72  |
| 2.4.2 未定式的极限 .....                     | 73  |
| 习题 2.4 .....                           | 77  |
| 2.5 函数图形的描绘 .....                      | 78  |
| 2.5.1 函数的凹凸和拐点 .....                   | 78  |
| 2.5.2 函数的渐近线 .....                     | 80  |
| 2.5.3 描绘函数图像的要害 .....                  | 81  |
| 习题 2.5 .....                           | 83  |
| 2.6 Taylor 公式 .....                    | 84  |
| 2.6.1 Taylor 多项式 .....                 | 84  |
| 2.6.2 Taylor 定理 .....                  | 84  |
| 2.6.3 几个基本初等函数的 Maclaurin 公式 .....     | 86  |
| 习题 2.6 .....                           | 89  |
| 第 2 章补充习题 .....                        | 90  |
| <b>第 3 章 一元函数的不定积分</b> .....           | 92  |
| 3.1 原函数和不定积分的概念 .....                  | 92  |
| 3.1.1 求导的逆运算 .....                     | 92  |
| 3.1.2 基本积分公式 .....                     | 94  |
| 习题 3.1 .....                           | 95  |
| 3.2 基本积分方法 .....                       | 95  |
| 3.2.1 换元积分法 .....                      | 95  |
| 3.2.2 分部积分法 .....                      | 100 |
| 习题 3.2 .....                           | 103 |
| 3.3 有理函数的积分 .....                      | 105 |
| 3.3.1* 有关多项式的补充知识 .....                | 105 |
| 3.3.2 部分分式法 .....                      | 108 |



|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| 3.3.3 例题 .....                | 109        |
| 3.3.4 三角有理式的积分 .....          | 112        |
| 3.3.5 其他 .....                | 114        |
| 习题 3.3 .....                  | 116        |
| <b>第 4 章 一元函数的定积分</b> .....   | <b>118</b> |
| 4.1 定积分的定义和性质 .....           | 118        |
| 4.1.1 定积分的定义 .....            | 118        |
| 4.1.2 可积函数类 .....             | 121        |
| 4.1.3 Newton-Leibniz 公式 ..... | 123        |
| 4.1.4 积分的性质 .....             | 124        |
| 习题 4.1 .....                  | 128        |
| 4.2 微积分基本定理 .....             | 130        |
| 习题 4.2 .....                  | 133        |
| 4.3 定积分的换元法和分部积分法 .....       | 133        |
| 4.3.1 定积分的换元法 .....           | 134        |
| 4.3.2 定积分的分部积分法 .....         | 136        |
| 习题 4.3 .....                  | 138        |
| 4.4* 积分近似计算 .....             | 139        |
| 4.4.1 矩形法 .....               | 140        |
| 4.4.2 梯形法 .....               | 141        |
| 4.4.3 抛物线法 (Simpson 公式) ..... | 143        |
| 习题 4.4 .....                  | 145        |
| 4.5 定积分应用举例 .....             | 145        |
| 4.5.1 微元法 .....               | 145        |
| 4.5.2 平面曲线的弧长 .....           | 147        |
| 4.5.3 平面图形的面积 .....           | 149        |
| 4.5.4 旋转体的体积 .....            | 153        |
| 4.5.5 旋转体的侧面积 .....           | 154        |
| 4.5.6 力学应用举例 .....            | 155        |
| 习题 4.5 .....                  | 156        |
| 4.6 广义积分 .....                | 158        |
| 4.6.1 无穷积分 .....              | 158        |
| 4.6.2 瑕积分 .....               | 161        |
| 4.6.3 广义积分的 Cauchy 主值 .....   | 162        |
| 习题 4.6 .....                  | 163        |
| 第 4 章补充习题 .....               | 164        |
| <b>第 5 章 常微分方程</b> .....      | <b>166</b> |

|                                    |            |
|------------------------------------|------------|
| 5.1 常微分方程的基本概念 .....               | 166        |
| 习题 5.1 .....                       | 167        |
| 5.2 一阶线性微分方程 .....                 | 167        |
| 5.2.1 分离变量型方程 .....                | 168        |
| 5.2.2 齐次方程 .....                   | 169        |
| 5.2.3 一阶线性微分方程 .....               | 173        |
| 5.2.4 可降阶的二阶微分方程 .....             | 177        |
| 习题 5.2 .....                       | 178        |
| 5.3 二阶线性微分方程的一般理论 .....            | 180        |
| 5.3.1 二阶齐次线性方程通解的结构 .....          | 180        |
| 5.3.2 二阶线性非齐次方程通解的结构 .....         | 185        |
| 习题 5.3 .....                       | 186        |
| 5.4 二阶常系数线性微分方程 .....              | 187        |
| 5.4.1 关于复变量指数函数的注记 .....           | 187        |
| 5.4.2 二阶常系数线性齐次方程 .....            | 188        |
| 5.4.3 二阶常系数线性非齐次方程 .....           | 190        |
| 5.4.4 Euler 方程 .....               | 194        |
| 习题 5.4 .....                       | 195        |
| 5.5* 质点的振动 .....                   | 196        |
| 5.5.1 自由简谐振动 .....                 | 196        |
| 5.5.2 自由阻尼振动 .....                 | 197        |
| 5.5.3 无阻尼的强迫振动 .....               | 199        |
| 5.5.4 有阻尼的强迫振动 .....               | 200        |
| 习题 5.5 .....                       | 202        |
| 5.6 $n$ 阶线性微分方程和微分方程组 .....        | 202        |
| 5.6.1 $n$ 阶线性方程解的结构 .....          | 202        |
| 5.6.2 $n$ 阶常系数齐次线性方程 .....         | 203        |
| 5.6.3 $n$ 阶常系数非齐次线性方程 .....        | 203        |
| 5.6.4 Euler 方程 .....               | 206        |
| 5.6.5 微分方程组 .....                  | 207        |
| 习题 5.6 .....                       | 209        |
| <b>第 6 章 实数集的连续性, 函数的可积性 .....</b> | <b>211</b> |
| 6.1 实数集的连续性 .....                  | 211        |
| 6.1.1 实数的连续性命题 .....               | 211        |
| 6.1.2* 十进小数和有理数集的完备化 .....         | 216        |
| 6.1.3 连续函数的性质 .....                | 217        |
| 习题 6.1 .....                       | 219        |
| 6.2 可积函数及积分的性质 .....               | 220        |

---

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 6.2.1 连续函数的可积性 ..... | 221 |
| 6.2.2 可积函数 .....     | 223 |
| 6.2.3 积分的性质 .....    | 225 |
| 习题 6.2 .....         | 230 |
| 附录 .....             | 231 |
| A1 参考答案 .....        | 231 |
| A2 参考教学进度 .....      | 245 |

# 第 1 章 极限与连续

## 1.1 数 列 极 限

先定义几个通用的术语和记号.

实数的全体记成  $\mathbf{R}$ .

设  $E \subset \mathbf{R}$ , 如果有实数  $M$ , 使得对任一个  $E$  中的元素  $x$ , 都有

$$x \leq M,$$

则称  $E$  有上界,  $M$  称为  $E$  的一个上界. 类似可以定义集  $E$  有下界和  $E$  的下界. 在第 6 章, 我们将证明下述重要命题.

**定理 1.1.1(确界原理)** 设  $E$  是非空数集. 若  $E$  有上界, 则  $E$  有最小上界; 若  $E$  有下界, 则  $E$  有最大下界.

$E$  的最小上界叫  $E$  的上确界, 记成  $\sup E$ , 若  $E$  无上界, 就记  $\sup E = +\infty$ ;  $E$  的最大下界叫  $E$  的下确界, 记成  $\inf E$ , 若  $E$  无下界, 则记  $\inf E = -\infty$ .

例如  $I_1 = (0, 1)$ ,  $I_2 = [0, 1]$ , 则  $\sup I_1 = \sup I_2 = 1$ ,  $\inf I_1 = \inf I_2 = 0$ .

显然, 若  $E$  有最大数  $\alpha$ , 则  $\alpha = \sup E$ ; 若  $E$  有最小数  $\beta$ , 则  $\beta = \inf E$ .

如果数集  $E$  既有上界, 又有下界, 就称  $E$  为有界集, 否则称  $E$  为无界集. 显然, 数集  $E$  有界的充分必要条件是, 存在正数  $M$ , 使

$$|x| < M$$

对任何  $x \in E$  都成立.

设  $E \subset \mathbf{R}$ ,  $y = f(x)$  在  $E$  上有定义. 记

$$f(E) = \{f(x) | x \in E\},$$

称为  $E$  关于  $f$  的像. 如果  $E$  是  $f$  的定义域, 则  $f(E)$  就是  $f$  的值域.

如果  $f(E)$  有上(下)界, 则称  $f$  在  $E$  有上(下)界; 如果  $f(E)$  有界, 则称  $f$  在  $E$  有界; 如果  $f(E)$  无界, 则称  $f$  在  $E$  无界;  $f(E)$  的上(下)确界, 称为  $f$  在  $E$  中的上(下)确界, 并记成  $\sup_{x \in E} f$  ( $\inf_{x \in E} f$ ).

例如  $\sup_{x \in \mathbf{R}} \sin x = 1$ ,  $\inf_{x \in \mathbf{R}} \cos x = -1$ ,  $\sup_{x \in \mathbf{R}} \tan x = +\infty$  等.

设  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $r > 0$ . 称区间  $(x_0 - r, x_0 + r)$  为  $x_0$  的  $r$  邻域; 称  $(x_0, x_0 + r)$  为  $x_0$  的右侧邻域; 称  $(x_0 - r, x_0)$  为  $x_0$  的左侧邻域. 把  $\{x \mid 0 < |x - x_0| < r\}$  称为  $x_0$  的  $r$  去心邻域, 它就是  $x_0$  的  $r$  邻域除去中心点  $x_0$  以后的集合.

### 1.1.1 数列极限的定义

一列实数

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

叫数列, 记成  $\{a_n\}$ .

$a_n$  叫数列的第  $n$  项,  $n$  叫这一项的脚标. 数列不能等同于一个数集. 因为一个数集的两个不同的元素互不相等. 而数列中的不同的两项可以相等, 也就是说一个数可以在数列中多次甚至无穷多次出现.

数列  $\{a_n\}$  其实就是定义在自然数集  $\mathbf{N}$  上的函数  $f(n)$ . 如果  $f(n)$  有 (上、下) 界, 就称  $\{a_n\}$  有 (上、下) 界;  $f(n)$  的上 (下) 界称为  $\{a_n\}$  的上 (下) 界;  $f(n)$  的上 (下) 确界称为  $\{a_n\}$  的上 (下) 确界, 记成  $\sup\{a_n\}(\inf\{a_n\})$ .

“如果当  $n$  无限增大的时候,  $a_n$  和  $a$  无限接近, 或者说  $|a_n - a|$  无限趋于零, 就称  $\{a_n\}$  以  $a$  为极限.” 这是中学数学教材给数列极限下的定义, 由于是一种基于直观而非量化的描述, 所以不便使用, 但它是给出数列极限的准确定义的出发点.

先看一个例子. 设

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

我们知道,  $\{a_n\}$  以 1 为极限, 因为  $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$ , 而当  $n$  无限增大时,  $\frac{1}{n}$  就无限减少而趋于零.

如果要  $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$  小于  $10^{-1}$ , 只要取  $n > 10$ ; 如果要  $|a_n - 1|$  小于  $10^{-3}$ , 只要取  $n > 10^3 \dots\dots$ . 总之, 无论我们给出一个多么小的正数  $\varepsilon$ , 只要取  $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ , 就能使  $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$  小于  $\varepsilon$ .

一般而言,  $\{a_n\}$  以  $a$  为极限可以说成是: 无论给定一个多么小的正数  $\varepsilon$ , 必可找到一个自然数  $n_0$ , 只要  $n > n_0$ , 就有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

于是, 我们有如下定义.

**定义 1.1.1** 设  $\{a_n\}$  是给定的数列, 如果对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n_0 \in \mathbf{N}$ , 只要  $n > n_0$ , 就有  $|a_n - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是数列  $\{a_n\}$  的极限, 也称数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 记成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

或

$$\lim a_n = a,$$

也可以记成  $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ .

有极限的数列称为收敛数列, 不收敛的数列称为发散数列.

显然,  $\lim a_n = a$  和  $\lim(a_n - a) = 0$  是一回事.

在定义中, 正数  $\varepsilon$  是任意的, 而  $n_0$  则是与  $\varepsilon$  有关的, 所以必要时, 可以记成  $n_0(\varepsilon)$  或  $n_\varepsilon$ . 一般当  $\varepsilon$  较小时,  $n_0$  相应地要比较大些.

在考察一个数列的极限时, 可以认为  $\varepsilon$  是一个“很小”的正数, 而不必去考虑“较大”的那些  $\varepsilon$ . 因为对于较小的  $\varepsilon$ , 如果找到了需要的  $n_0(\varepsilon)$ , 则对于较  $\varepsilon$  大的那些  $\varepsilon'$ , 当  $n > n_0(\varepsilon)$  时, 必定有

$$|a_n - a| < \varepsilon < \varepsilon',$$

所以对那些比  $\varepsilon$  大的  $\varepsilon'$ , 都可以选取同样的  $n_0(\varepsilon') = n_0(\varepsilon)$ .

$\lim a_n = a$  也可以说成: 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n_0 \in \mathbf{N}$ . 当  $n > n_0$  时, 总有  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . 这可以看成是定义 1.1.1 的解析几何的说法 (见图 1.1).

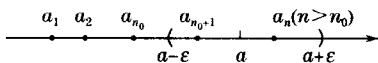


图 1.1

由于决定  $a_n$  的极限的是  $n$  充分大时  $a_n$  的值, 所以任意改变有限多项  $a_n$  的值或从数列中删去任意有限多项不会改变数列的敛散性, 也不会改变收敛数列的极限.

**例 1.1.1**  $a_n = a (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 则

$$\lim a_n = a.$$

例 1.1.1 给出的数列叫常数列.

**例 1.1.2**  $\alpha > 0$ , 则  $\lim \frac{1}{n^\alpha} = 0$ .

证 由

$$\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| = \frac{1}{n^\alpha}$$

可知, 要

$$\frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon,$$

只要

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

所以任给  $\varepsilon > 0$ , 取

$$n_0 = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right],$$

则当  $n > n_0$ , 即

$$n \geq \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] + 1 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

时, 就有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon.$$

由定义可知

$$\lim \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

**例 1.1.3**  $|q| < 1$ , 求证:  $\lim q^n = 0$ .

**证** 因为

$$|q^n - 0| = |q|^n,$$

任取  $0 < \varepsilon < 1$ , 要

$$|q|^n < \varepsilon,$$

只要

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}.$$

所以, 取

$$n_0 = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right],$$

则当  $n > n_0$  时, 就有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

由定义可知

$$\lim q^n = 0.$$

在证明当中, 我们要求  $0 < \varepsilon < 1$ , 如果给的是  $\varepsilon' \geq 1$ , 则我们可以任取一个  $0 < \varepsilon < 1$ , 并取  $n_0 = \left\lceil \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right\rceil$ , 则当  $n > n_0$  时, 必有

$$|q^n - 0| < \varepsilon < \varepsilon'.$$

其实, 这一点在前面已经解释过了.

### 1.1.2 收敛数列的性质

**定理 1.1.2** 如果  $\{a_n\}$  为收敛数列, 则  $\{a_n\}$  为有界数列.

**证** 设  $\lim a_n = a$ . 取  $\varepsilon = 1$ , 由定义知道, 存在  $n_0 \in \mathbf{N}$ , 当  $n > n_0$  时, 有

$$|a_n - a| < 1.$$

即当  $n > n_0$  时, 有

$$|a_n| < |a| + 1.$$

而当  $n \leq n_0$  时, 有

$$|a_n| \leq \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|).$$

取

$$M = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1),$$

则对所有  $n \in \mathbf{N}$ , 都有

$$|a_n| \leq M.$$

□

由定理 1.1.2 可知, 如果  $\{a_n\}$  是无界数列, 则  $\{a_n\}$  一定是发散的.

**定理 1.1.3** 如果  $\{a_n\}$  是收敛数列, 则  $\{a_n\}$  的极限是唯一的.

**证** 若不然, 设  $\{a_n\}$  有两个极限  $a$  和  $b$ . 不妨设  $a < b$ . 取  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ , 由定义可知, 存在正整数  $n_1$  和  $n_2$  使当  $n > n_1$  时, 有

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{2},$$

而当  $n > n_2$  时, 有

$$|a_n - b| < \frac{b-a}{2}.$$

取  $n > \max\{n_1, n_2\}$ , 则有

$$a_n - a < \frac{b-a}{2}$$

及

$$b - a_n < \frac{b-a}{2}.$$



两式相加得到不可能的不等式

$$b - a > b - a.$$

此说明收敛数列不能有两个不同的极限.  $\square$

从几何上看, 定理 1.1.3 是十分明显的 (见图 1.2). 如果  $\lim a_n = a$ , 则当  $n$  充分大时,  $a_n$  都在  $a$  的  $\frac{b-a}{2}$  邻域中,  $a_n$  就不可能在  $b$  的  $\frac{b-a}{2}$  邻域中, 因为两个邻域没有公共点.

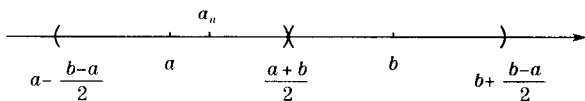


图 1.2

**定理 1.1.4** 设  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$ .

1° 如果有  $n_0 \in \mathbf{N}$ , 使当  $n > n_0$  时  $a_n \geq b_n$ , 则  $a \geq b$ ;

2° 如果  $a > b$ , 则有  $n_0 \in \mathbf{N}$  及  $\tau > 0$ , 使当  $n > n_0$  时,  $a_n > b_n + \tau$ .

**证** 1° 任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $n_\varepsilon > n_0$ , 使当  $n > n_\varepsilon$  时有  $|a_n - a| < \varepsilon/2$  和  $|b_n - b| < \varepsilon/2$ . 于是当  $n > n_\varepsilon$  时有

$$a + \frac{\varepsilon}{2} > a_n \geq b_n > b - \frac{\varepsilon}{2},$$

即对任意  $\varepsilon > 0$ , 都有

$$a > b - \varepsilon,$$

故必有

$$a \geq b.$$

2° 取  $\varepsilon = \frac{a-b}{4}$ , 则有  $n_0 \in \mathbf{N}$ , 当  $n > n_0$  时有

$$a_n > a - \varepsilon = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4}$$

及

$$b_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}.$$

命  $\tau = \frac{a-b}{2}$ , 则当  $n > n_0$  时就有

$$a_n > b_n + \tau.$$

$\square$

如果在定理 1.1.4 中取  $b_n \equiv 0$ , 则可得到如下推论.