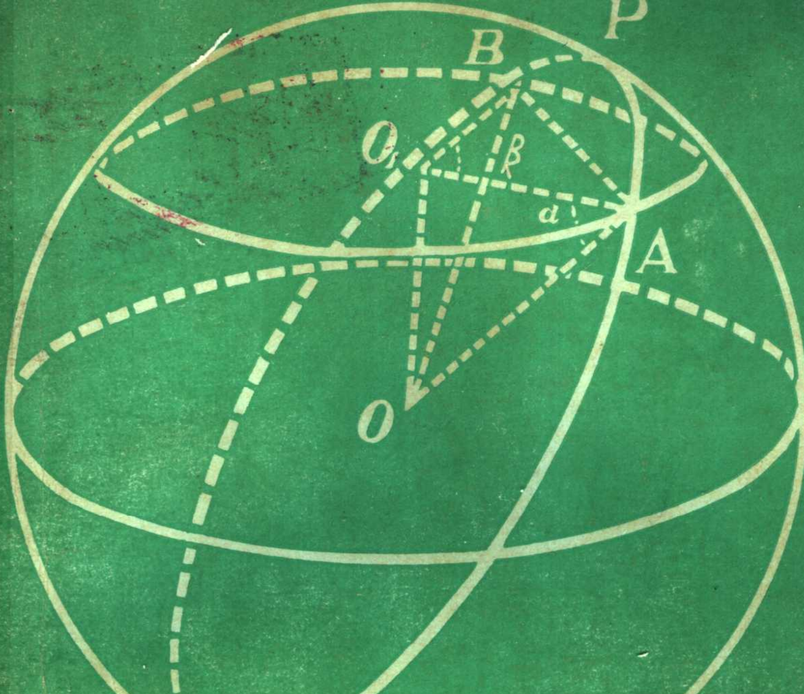


立体几何解题基础

LITIJIHE JIETIJICHU

天津教育出版社

王文龙 李允嘉 编

立体几何解题基础

王文龙　李允嘉　编

天津教育出版社

责任编辑：黄立民

立体几何解题基础

王文龙　李允嘉 编

天津教育出版社出版

（天津市和平区湖北路29号）

天津新华印刷一厂印刷　新华书店天津发行所发行

787×1092毫米　开本1/32　印张5.75　千字122

1984年9月第1版　1984年9月第1次印刷

印数：1－77,000

书号：7348·1

定　价：0.58元

1

1．填空

（1）方程 $-2x=3$ 在整数集中的解集是_____，在有理数集中的解集是_______.

（2）方程 $x^2=9$ 在整数集中的解集是_______，在有理数集中的解集是_______.

（3）方程 $x^2+x-1=0$ 在有理数集中的解集是_______，在实数集中的解集是_______.

（4）方程 $x^2=-1$ 在实数集中的解集是____，在复数集中的解集是_______.

2．____叫做虚数单位，$i^2=$____.

3．形如___________的数叫做复数，其中_______是实数．全体复数所成的集合叫做___________，用字母____表示。

4．计算：$i^3=$____，$i^4=$____.

5．检验 $\sqrt{3}\,i$ 和 $-\sqrt{3}\,i$ 是否是方程 $x^2+3=0$ 的根.

6．在复数集内解方程 $x^4-1=0$.

7．将下列各数填在相应的集合中：

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}i$，3，$\sqrt{3}-i$，$\lg 1$，$\sqrt{3}-i^2$，

-3.14，$\frac{1}{e}$，$\sqrt{25}$，$4i-\frac{1}{5}$.

$N=\{\qquad\qquad\qquad\cdots\}$；

$Z=\{\qquad\qquad\qquad\cdots\}$；

$Q=\{\qquad\qquad\qquad\cdots\}$；

$R=\{\qquad\qquad\qquad\cdots\}$；

$C=\{$

2

1. 填空

(1) 已知复数$z=(m+7)+(n-\frac{1}{2})i$ $(m, n\in k)$，当______时z是实数；当______时z是虚数；当______时z是非纯虚数；当______时z是纯虚数.

(2) 已知复数$z=(k^2-4)+(k^2+3k+2)i$ $(k\in R)$，当$k=$______时z是实数；当______时z是虚数；当$k=$______时z是纯虚数；当$k=$______时z为0.

(3) -4的共轭复数是____；$\sqrt{2}i$的共轭复数是____；______的共轭复数是$i-4$.

(4) 若$(2x+y)+(3x+1)i=0$ $(x, y\in R)$，则$x=$____，$y=$______.

(5) 若$(5x+2y)+(x-y)i=12-13i$ $(x, y\in k)$，则$x=$______，$y=$______.

2. 选择题

(1) 设集合$H=\{$虚数$\}$，$K=\{$纯虚数$\}$，若$I=C$，则① $R\cap K=\phi$； ② $\overline{R}=H$； ③ $R\cup H=C$； ④ $H\supset K$中正确的是（　　）.

(A) ①②③.　　(B) ①②④.

(C) ①③④.　　(D) ①②③④.

(2) $a=0$是复数$a+bi$ $(a, b\in R)$为纯虚数的（　　）.

(A) 充分条件.　　(B) 必要条件.

(C) 充要条件.　　(D) 既不充分也不必要条件.

3. 求证：复数z为实数的充要条件是$z=\overline{z}$.

3

1．复平面内x轴叫做____，y轴除去——的部分叫做____．复数$a+bi$ (a、$b\in R$)由复平面内唯一的点______来表示，表示____的点在实轴上，表示_____的点在虚轴上，表示两个共轭复数的点关于_____对称。

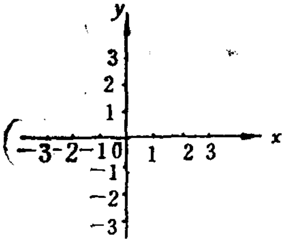
2．已知复数$z=(k^2-2k)+(k+\frac{3}{k}-4)i$ ($k\in R$)对应的点为Z，当k______时点Z在实轴上，当k______时点Z在虚轴上，当______时点Z在第二象限。

3．写出下列复数的共轭复数，并在复平面内把每一对复数表示出来．$2-3i$，　i，　$-1+2i$，　$-2\frac{1}{2}$。

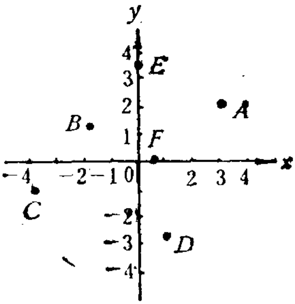
4．写出复平面内各点所表示的复数。

$z_A=$____　　$z_B=$____　　$z_C=$____　　$z_D=$____

$z_E=$____　　$z_F=$____。



第 3 题



第 4 题

5．将满足下列条件的点在复平面上表示出来．($R(z)$表示复数z的实部，$I(z)$表示虚部)

(1) $R(z)\geqslant 0$，$I(z)<-1\frac{1}{2}$．(2) $-3\leqslant k(z)<-1$，$-1\leqslant (z)\leqslant\frac{1}{2}$。

4

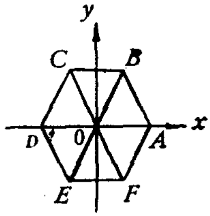
1．两个________的向量认为是相等的向量，与这两个向量的____无关．复数集与________向量的集合之间存在一一对应关系．

2．若复数$z=a+bi$（a、$b\in R$）对应的点是z，则对应的向量是____．$|z|=r=$________．模的几何意义是________________或________________．

3．模相等而方向相反的两个向量叫做反向量．$\overrightarrow{OA}$的反向量是____．

4．若$z=-\sqrt{5}+\frac{1}{2}i$，则$\overline{z}=$____，$|z|=$____，$|\overline{z}|=$____．共轭复数的模________．

5．右图是边长为1的正六边形，图中与$\overrightarrow{OB}$相等的向量有____、____和____，它们对应的复数是________；与$\overrightarrow{BC}$相等的向量有____、____和____，它们对应的复数是________，与$\overrightarrow{FO}$相等的向量有____、____和____，它们对应的复数是________；其中$\overrightarrow{OC}$和$\overrightarrow{DE}$互为________，$\overrightarrow{OC}$和$\overrightarrow{OF}$互为____．



6．设$z\in C$，在复平面上画出满足下列条件的点z的集合，并说明是什么图形．

(1) $|z|\leqslant 4$且$I(z)\leqslant 1$．　　(2) $|z|>1$且$R(z)>-1$．

5

1．判断下列命题的真假并说明理由．

（1）实轴与虚轴相交于原点．

（2）任意两个复数不能比大小，而两个复数的模可以比大小．

（3）两个向量若关于实轴对称，那么这两个向量对应的复数是共轭复数．

2．复数$z=(\sqrt{2}\sin\theta-1)+i\cos\theta$，当$\theta=$ ________ 时z是实数，当$\theta=$ ________ 时z是纯虚数，当 ________________ 时复数z对应的点在第三象限．

3．若$(a+3b)+(5a-1)i=(7-a)+2bi$（a、$b\in R$），则$a=$ ____，$b=$ ____．

4．若$x^2+2x-1+5xyi=0$（x、$y\in R$），则$x=$ ______，$y=$ ______．

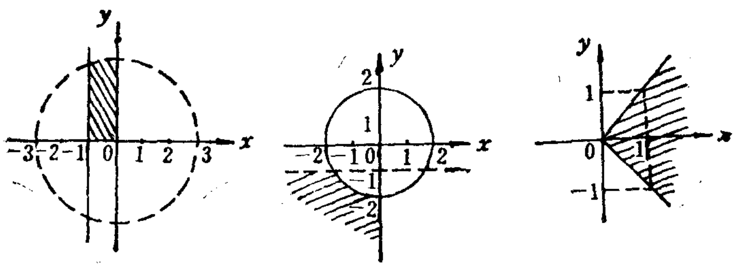
5．已知$|\overline{z}|=\sqrt{2}$且$I(\overline{z})=-\frac{1}{2}$，那么$z=$ ________．

6．设$z\in C$，在复平面上画出满足下列条件的点z的集合．

（1）$2<|z|<3$且$I(z)>1$．　（2）$|z|\geqslant 2$且$|R(z)|\leqslant 1$．

7．用复数表示下图中的阴影部分．

（1）　　（2）　　（3）



6

1. 计算

(1) $(2-\sqrt{3}i)+(-\sqrt{2}+3i)=$ ______.

(2) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$ ______.

(3) $\left(\frac{1}{5}+3i\right)-\left(3-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}i\right)=$ ______.

(4) $(-0.2+2.7i)+(8.25-0.81i)-(3.7+4.3i)=$ ______.

2. 已知$z=-\frac{1}{3}+i$，那么$z+\overline{z}=$ ______，$z-\overline{z}=$ ______，$|z+\overline{z}|=$ ______，$|z-\overline{z}|=$ ______.

3. 若$z_1=-6+7i$，$z_2=-2-i$，那么$|z_1|=$ ______，$|z_2|=$ ______，$|z_1+z_2|=$ ______，$|z_1-z_2|=$ ______.

比较大小：$|z_1|-|z_2|$ ______ $|z_1+z_2|$ ______ $|z_1|+|z_2|$.

$|z_1|-|z_2|$ ______ $|z_1-z_2|$ ______ $|z_1|+|z_2|$.

4. 已知$z_1=-1-\frac{3}{4}i$，$z_2=5-2i$，那么$z_1+z_2=$ ______ $\overline{z_1}+\overline{z_2}=$ ______，$z_1-z_2=$ ______，$\overline{z_1}-\overline{z_2}=$ ______. 它们之间有什么关系？

5. 若$z-\overline{z}=-3i$且$R(z)=3$，则$\overline{z}=$ ______，$|z|=$ ______.

6. 已知$z_1=\sin\theta+(\cos\theta-1)i$，$z_2=(\sin\theta+\sqrt{3})+\cos\theta i$，若$z_1+z_2=0$，那么$\theta=$ ______.

7. 如果复数$x+yi$（x、$y\in R$）满足条件
$(x^2-y^2i)+(y^2-4xi)=(1+6yi)-[6y+(x^2-5)i]$那么这个复数是 ______.

8. 等差数列的各项和：$(1+i)+(2-i)+(3-3i)+\cdots+(12-21i)=$ ______.

7

1. 用代数及几何方法计算下列各题将代数计算结果所对应的点及相应的向量在复平面上表示出来，与几何计算的结果进行比较，它们有什么区别和联系？

(1) $(-1+4i)+(3+i)=$ ________，

$(-1+4i)-(3+i)=$ ________。

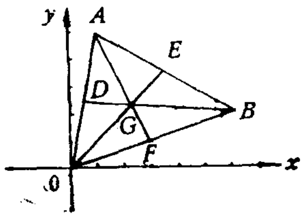
(2) $(2-i)+(-2-3i)=$ ________，

$(2-i)-(-2-3i)=$ ________。

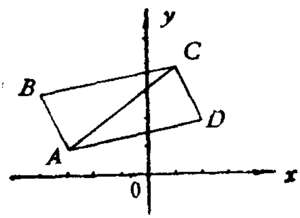
2. 如果向量$\overrightarrow{AB}$对应的复数是$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$，那么向量$\overrightarrow{BA}$对应的复数是________，向量$\overrightarrow{AB}$关于实轴对称的向量所对应的复数是________。

3. 复平面上有$\triangle OAB$（如图），A、B的坐标分别是A（1，5）和B（6，2），如果D、E、F分别是OA、AB和OB的中点，那么向量$\overrightarrow{AB}$对应的复数是________，向量$\overrightarrow{OE}$对应的复数是________，向量$\overrightarrow{OD}$对应的复数是______，向量$\overrightarrow{AF}$对应的复数是________，向量$\overrightarrow{OG}$对应的复数是____。

4. 已知▱$ABCD$（如图），点A、D对应的复数分别是$-3+i$和$2+2i$，向量$\overrightarrow{AB}$对应的复数是$-1+2i$，那么向量$\overrightarrow{CD}$对应的复数是________，点B的坐标是________，点C的坐标是________，向量$\overrightarrow{BC}$对应的复数是________，向量$\overrightarrow{CA}$对应的复数是________。



（第3题）



（第4题）

8

1. 设$z_1=x_1+y_1i(x_1、y_1\in R)$，$z_2=x_2+y_2i$ $(x_2, y_2\in R)$，设z_1、z_2对应于复平面内的两点z_1和z_2，那么$d=|z_2-z_1|=$________________，它的几何意义是____________________，也就是向量$\overrightarrow{z_1z_2}$的____。

2. 已知复平面上的两个点$M(\frac{1}{3}, -1)$和$N(-\frac{1}{2}, 1)$，那么$|\overrightarrow{MN}|=$________。

3. 已知两个复数$\frac{3}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3}i$和$\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}i$，这两个复数所对应的两个点之间的距离是________。

4. 设复数$z=x+yi(x、y\in R)$和$p=a+bi(a、b\in R)$分别对应的点是Z和P. 若Z是圆上任意一点，那么以P点为圆心，r为半径的圆方程的复数形式是________，化为直角坐标方程是________________________。

5. 设$z=x+yi(x、y\in R)$与复平面上的点Z对应，满足下列条件的点Z的集合是什么图形？画出这些图形.

(1) $|z|=1$表示的曲线是____________________，直角坐标方程是____________________。

(2) $|z+3-2i|=3$表示的曲线是________________，直角坐标方程是____________________。

(3) $|z+i|=|z-2|$表示的曲线是________________，直角坐标方程是____________________。

(4) $|z+\sqrt{3}i|+|z-\sqrt{3}i|=4$表示的曲线是____________________，直角坐标方程是________________。

(5) $|z+2|-|z-2|=2$表示的曲线是____________________，直角坐标方程是____________________。

9

1．计算

（1）当$n\in Z$时，$i^{4n}=$____，$i^{4n+1}=$____，$i^{4n+2}=$____，$i^{4n+3}=$____．

（2）$i^{0}=$____，i^{-1}____，$i^{78}=$____，$i^{1991}=$____．$i^{-1968}=$____．

（3）当$z\in C$且$z\neq 0$时，$z^{0}=$____，$z^{-1}=$____．

（4）$i+i^{2}+i^{3}+\cdots\cdots+i^{100}=$____．

（5）$i^{0}\cdot i^{-2}\cdot i^{-4}\cdots\cdots\cdot i^{-100}=$____．

2．计算

（1）$(7+8i)\cdot i=$________，$(7+8i)\cdot i^{2}=$________．

（2）$(4-3i)\cdot(-5-2i)=$________．

（3）$(1-2i^{-5})(3+4i^{3})=$________．

（4）$\left(\frac{2}{3}+i\right)\left(1-\frac{3}{4}i\right)\left(12-6i\right)=$________．

（5）$(1+i)^{2}=$________，$(1+i)^{8}=$________，$(1+i)^{10}=$________，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{8}=$________．

（6）$(1-i)^{2}=$________．$(1-i)^{-10}=$________．$(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)^{6}=$________．

（7）$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1993}-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1990}=$________．

3．设$z=a+bi$（a、$b\in R$），则$|z|^{2}=$________，$|\bar{z}|^{2}=$________，$z\cdot\bar{z}=$________，$z^{2}=$____________，$|z^{2}|=$________，$(\bar{z})^{2}=$________，$|\overline{z^{2}}|=$________．其中相等的是________________________________．

10

1. 先计算，然后比较这四个数：

$(-2+5i)\cdot i=$ ______， $\dfrac{-2+5i}{i}=$ ______。

$(-2+5i)\cdot(-i)=$ ______， $\dfrac{i}{-2+5i}=$ ______。

其中哪两个相等？

2. 计算

(1) $\dfrac{31-8i}{5+4i}=$ ______， $\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{2}\,i}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}\,i}=$ ______。

(2) $\dfrac{3-5i}{1-i}=$ ______。 $\dfrac{3-5i}{1+i}=$ ______。

(3) $\dfrac{1+i}{1-i}$ ______， $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{50}=$ ______。

$\dfrac{1-i}{1+i}=$ ______， $\left(\dfrac{2-2i}{1+i}\right)^{25}=$ ______。

(4) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}=$ ______。

3. 已知$z_1=3+i$，$z_2=1-2i$，那么$z_1\cdot z_2=$ ______，$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=$ ______，$\dfrac{z_1}{z_2}=$ ______，$\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=$ ______。它们之间有什么关系？

4. 设$z_1=4-3i$，$z_2=12+5i$，那么$|z_1|=$ ____，$|z_2|=$ ____，$z_1\cdot\overline{z_1}=$ ____，$z_2\cdot\overline{z_2}=$ ____，$z_1\cdot z_2=$ ____，$|z_1\cdot z_2|=$ ______，$|z_1|\cdot|z_2|=$ ____；$\dfrac{z_1}{z_2}=$ ____，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=$ ____，$\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=$ ____。

它们之间有什么关系？

11

1. 计算

(1) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots\cdots i^{100} =$ ____.

(2) $i^{-1} + i^{-3} + i^{-5} + \cdots\cdots + i^{-99} =$ ______.

(3) $(2+4i)(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i) =$ __________.

(4) $(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i) + (2+4i) =$ __________.

2. 已知a、b、c、$d \in R$，如果复数$z_1 = a - i, z_2 = 3 + bi$，$z_1 - z_2 = \frac{c}{2} + 4i$，$z_1 \cdot z_2 = 1 + di$，那么$a =$ ____，$b =$ ____，$c =$ ____，$d =$ ____.

3. 若$f(z) = 2z^2 + \frac{1}{z} - 8$，则$f(3-i) =$ ________.

4. 已知$z = m + i\ (m \in R)$，$z \cdot \overline{z} = 9$，那么$z =$ ____.

5. 在复数范围内分解因式.

(1) $x^2 + 3 =$ ______________.

(2) $a^4 - 2 =$ ____________________.

6. 两个互为共轭的复数的差是（　　）.

(A) 实数.　　(B) 纯虚数.

(C) 零.　　(D) 纯虚数或零.

7. 已知复数$z_1 = 9 + 5i$，$z_2 = 5i - 9$，则下列关系式中正确的是（　　）.

(A) $z_1 > z_2$.　　(B) $z_1 = \overline{z}_2$.

(C) $|z_1| = |\overline{z_2}|$.　　(D) $|z_1| > |z_2|$.

8. (1) -12的平方根是__________.

(2) $-3 + 4i$的平方根是__________.

9. 设$z = a + bi\ (a, b \in R)$. 若$z^2 = 7 - 24i$，则$z =$ ____.

12

选择题

1. 复数$a+bi$（a、$b\in R$）的平方是实数的充要条件是（　　）.

（A）$a=0$，$b\neq 0$.　　（B）$a\neq 0$，$b=0$.

（C）$ab=0$.　　（D）$a=b=0$.

2. 设$z\in c$且$z\neq 0$，则（　　）.

（A）$|z^2|$、$|z|^2$、z^2互不相等.（B）$|z^2|=|z|^2\neq z^2$.

（C）$|z^2|\neq|z|^2=z^2$.　　（D）$|z^2|=|z|^2=z^2$.

3. i为虚数单位，$n\in z$，则i^n+i^{-n}的不同值的个数是（　　）.

（A）1个.（B）2个.（C）3个.（D）4个.

4. n个复数z_1，z_2，…，z_n的积为零的充要条件是（　　）.

（A）z_1，z_2，…，z_n不都是零.

（B）z_1，z_2，…，z_n中只有一个是零.

（C）z_1，z_2，…，z_n中至少有一个是零.

（D）z_1，z_2，…，z_n中至多有一个不是零.

5. 已知复数$z=a^2(1-i)-5a(3-i)+(7-a^2)i(a\in R)$，如果它所对应的点都在第三象限，那么$a$的取值范围是（　　）.

（A）$\left(0,\dfrac{7}{2}\right)$.　　（B）$\left(\dfrac{7}{2},15\right)$.

（C）$(1,15)$.　　（D）$\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{15+\sqrt{197}}{2}\right)$.

6. 使$(x+i)^4$为整数的实数x有（　　）.

（A）0个.（B）1个.（C）2个.（D）3个.

13

1．根据下列条件，在复平面内画出相应的向量并求z．

（1）若$|z| = 2$ $\arg z = \frac{4}{3}\pi$，则$z =$ ________．

（2）若$|z| = 1\frac{1}{2}$ $\arg z = \frac{11}{6}\pi$，则$z =$ ________．

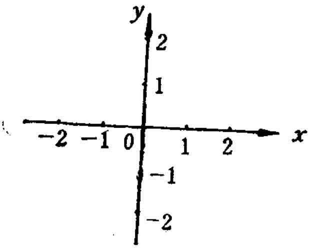
2．把下列复数表示成三角形式，并在复平面内画出相应的向量．

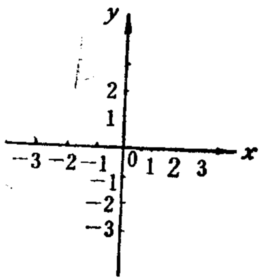
（1）$1 =$ ________．　　（2）$-2 =$ ________．

（3）$\sqrt{3}i =$ ________．　　（4）$-\frac{3}{2}i =$ ________．

（5）$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i =$ ________．　　（6）$-1 + i =$ ________．

（7）$-1 - \sqrt{3}i =$ ________．　　（8）$z-i =$ ________．





3．把下列复数表示成代数形式．

（1）$4\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) =$ ________．

（2）$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) =$ ________．

(3) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)=$ ________.

(4) $\frac{1}{2}\left[\cos(-8\pi)+i\sin(-8\pi)\right]=$ ________.

4. 把下列复数写成三角形式.

(1) $3\left(-\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right)=$ ________.

(2) $3\left(\cos\frac{7}{12}\pi-i\sin\frac{7}{12}\pi\right)=$ ________.

(3) $-3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$ ________.

(4) $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\frac{3}{4}\pi\right]=$ ________.

(5) $3\left(\sin\frac{2}{3}\pi+i\cos\frac{2}{3}\pi\right)=$ ________.

(6) $-3\left(\sin\frac{5}{14}\pi+i\cos\frac{5}{14}\pi\right)=$ ________.