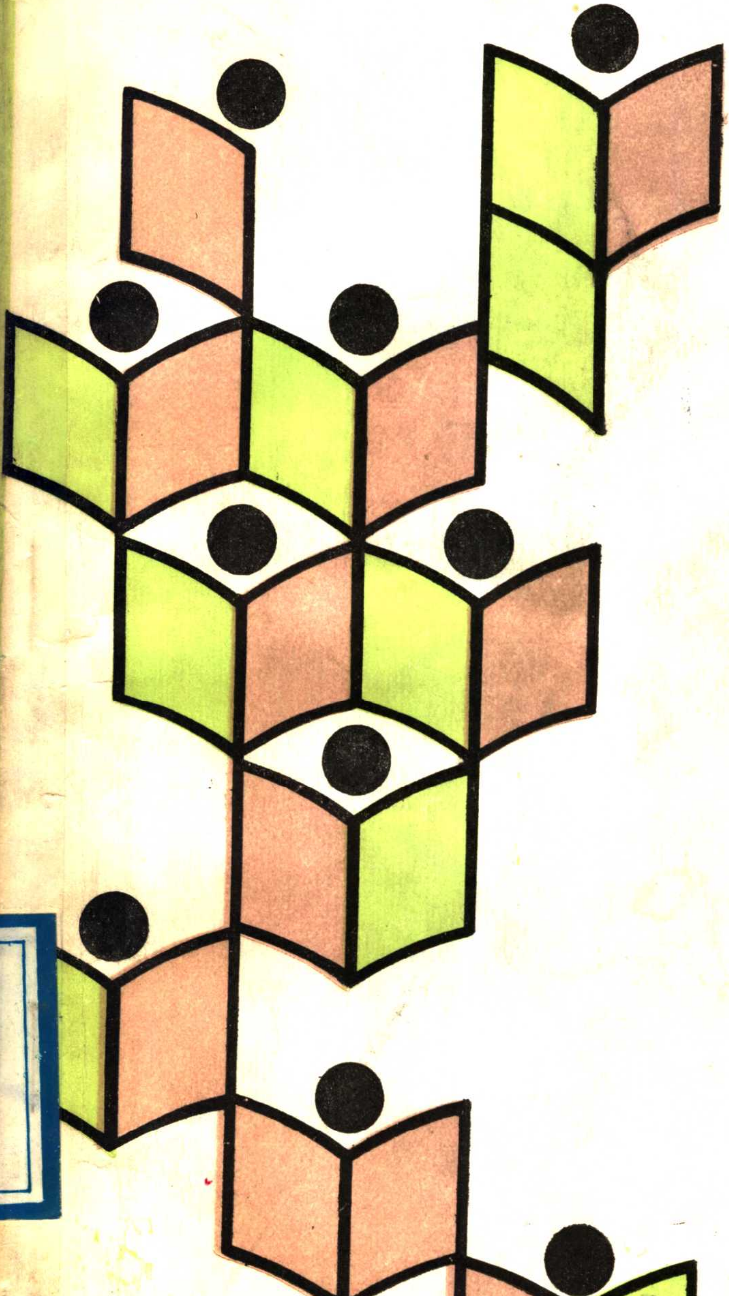
北京五中　单志惠　蔡庆铎　刘亦恭

中学生学习能力培养与训练丛书

高中数学学习指导

第二册



化学工业出版社

中学生学习能力培养与训练丛书

高中数学学习指导

第二册

北京五中　单志惠　蔡庆铎　刘亦恭

化学工业出版社

中学生学习能力培养与训练丛书

高中数学学习指导

第　二　册

北京五中　单志惠　蔡庆铎　刘亦恭

责任编辑：卢　瑛

封面设计：许　立

*

化学工业出版社 出版发行

（北京和平里七区十六号楼）

北京京辉印刷厂印刷

北京京辉印刷厂装订

新华书店北京发行所经销

*

开本 787×1092　1/32　印张 8½　字数 191 千字

1989 年 3 月第 1 版　1989 年 3 月北京第 1 次印刷

印　数 1-4,480

ISBN 7-5025-0569-5/G·158

定价 3.60 元

前　言

为适应中学数、理、化三科的教学和中考、高考总复习的需要，进一步提高学生学习和掌握课文重点，以及分析和解答问题的能力，从而促使他们在课堂学习和中考、高考中获得优异成绩，我们北京五中特组织本校数、理、化教研组具有丰富经验的教师，以现行教学大纲和1988年新版教材为依据，并考虑到未来新教材的教学目标和讲授内容，编写了这套《中学生学习能力培养与训练丛书》。

这套丛书共23个分册，分为两个系列。一个系列是配合初中、高中数、理、化日常教学需要的学习指导材料，共14个分册。另一个系列是为配合中考、高考总复习而编写的升学指导读物，共9个分册。

我们在编写过程中注意了摒弃过去那种"满堂灌"和"题海战术"的做法，采用了诱导和启发的方式，并对精选的具有代表性的问题和习题进行分析和演示，力求达到明确要求、深化基础、把握重点、突破难点、开阔思路、发展智能的目的。

本书具有如下一些特点

1. 从系统论的观点出发，把每门科目所含知识整理成一目了然的知识系统，以使学生便捷地明确所要学习的目标，掌握问题的要领，同时也帮助读者从知识系统的内在联系和对比关系上去理解基本概念和基本规律，避免理解上的孤立性和片面性。

2. 为了深化学生对基础知识的理解，并将其引向应用，书中对重点概念的内函和外延、主要定律的理解要点，容易混淆的问题，以及解题中常用的方法和技能，进行了简明的指点和深入的剖析。这部分内容是书中重点，反映了编者教学实践中积累的经验。

3. 为培养和提高学生运用基础知识去分析和解决问题的能力，书中设有"典型例题分析"——交待对习题的分析方法和解题的思路、步骤，排除"就题论题"的做法。

4. 为促使学生实现基础知识向应用能力的转化，按照教学大纲的要求，从国内外中学数理化教材和参考书中精选了各种类型的习题，编列为"单元练习和综合练习"并附有参考答案。习题有基本题，灵活题以及模拟中考、高考题形式的综合题，题型齐全，体现对能力的检查。

5. 对物理和化学两科，为着重训练和培养学生的实验能力，编有"实验指导"和"实验习题"，内容系统全面，难易适当，充分体现教学大纲和中考、高考的要求。

这套丛书最适合初中、高中学生作为日常学习和总复习的辅导读物，也可作为中学教师的参考用书。

由于编写时间比较仓促，并受教学水平之限，书中可能存在错误或不当之处，敬希读者批评指正。

编者

1988 年 12 月

目　　录

第一章　反三角函数和简单三角方程

一、基 本 要 求

1. 理解反三角函数的意义，掌握反三角函数的图象及其基本性质.

2. 能运用反三角函数的定义、性质，解决一些简单的求值题与证明题.

3. 熟练写出 $\sin x=a(|a|\leqslant 1)$，$\cos x=a(|a|\leqslant 1)$，$\operatorname{tg} x=a$，$\operatorname{ctg} x=a$，的解集.

4. 会解简单的三角方程.

二、学 习 指 导

（一）知识结构

表 1-1

反三角函数	反正弦函数 反余弦函数 反正切函数 反余切函数	图象 性质	应用： 求函数定义域，值域 求函数数值 证明恒等式 解三角形

某些简单的三角方程，可以利用三角恒等变形或代数中解方程的方法，把它化成一个或几个最简单的三角方程，然后求解. 关于 $\sin x=a$，$\cos x=a$，$\operatorname{tg} x=a$，$\operatorname{ctg} x=a$ 的解集见表 1-3.

1. 关于简单三角方程可以分以下几个类型:

表 1-2

简单三角方程—

(1) 利用函数值相同的两角间的关系，将三角方程化为代数方程.

(2) 可化为同角同名函数的方程.

(3) 可化为一边为零，另一边可因式分解的方程.

(4) 关于 $\sin x, \cos x$ 的齐次方程.

(5) 形如 $a\sin x + b\cos x = c$ 的方程.

$\downarrow$ 应用

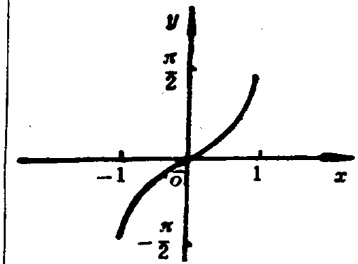
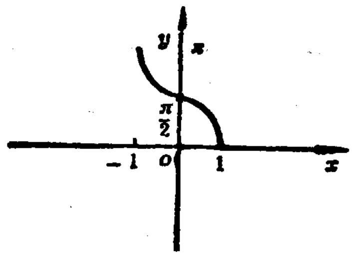
解三角形

2. 反三角函数间的关系:

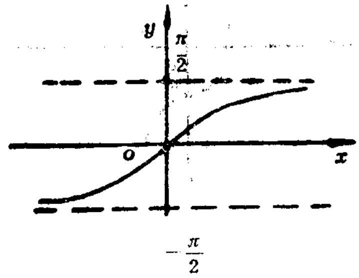
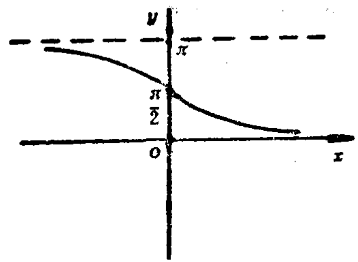
表 1-3

方程				方程的解
$\sin x=a$	$\lvert a\rvert\leqslant 1$	$\lvert a\rvert<1$		$\left.\begin{array}{l}x=2n\pi+\arcsin a\\ x=(2n+1)\pi-\arcsin a\end{array}\right\}n\pi+(-1)^n\arcsin a$
		$a=0$		$x=n\pi$
		$\lvert a\rvert=1$	$a=1$	$x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$
			$a=-1$	$x=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$
	$a>1$			无解
$\cos x=a$	$\lvert a\rvert\leqslant 1$	$\lvert a\rvert<1$		$x=2n\pi\pm\arccos a$
		$a=0$		$x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$
		$\lvert a\rvert=1$	$a=1$	$x=2n\pi$
			$a=-1$	$x=(2n+1)\pi$
	$a>1$			无解
$\operatorname{tg}x=a$	$a\in R$			$x=n\pi+\operatorname{arctg}a$
$\operatorname{ctg}x=a$	$a\in R$			$x=n\pi+\operatorname{arcctg}a$

表 1-4　反三角函数的图象及性质

名　　称	定义域	值　　域	性　　质	图　　象
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	1. 增函数 2. $\sin(\arcsin x)=x \quad x\in[-1,1]$ 3. $\arcsin(\sin x)=x \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 4. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$ (奇函数)	
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	1. 减函数 2. $\cos(\arccos x)=x \quad x\in[-1,1]$ 3. $\arccos(\cos x)=x \quad x\in[0,\pi]$ 4. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$ (非奇非偶)	

续表

名称	定义域	值域	性质	图象
$y=\mathrm{arctg}x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	1. 增函数 2. $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x \quad x\in R$ 3. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)=x \quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 4. $\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}x$ （奇函数）	
$y=\mathrm{arcctg}x$	R	$(0,\pi)$	1. 减函数 2. $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x)=x \quad x\in R$ 3. $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x)=x \quad x\in(0,\pi)$ 4. $\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}x$ （非奇非偶）	

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}.$$

3. 反三角函数的三角函数值：

$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$；　　$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$；

$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{x}$；　　$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{x}$.

（二）概念及其理解

1. 反三角函数的来源

三角函数的反函数就是反三角函数，但由于确定三角函数的对应是从定义域到值域的映射，而不是一一映射，因此三角函数在整个定义域上没有反函数. 但在每个三角函数的定义域中，若选取一个限定的区间(也叫主值区间)，使这个区间内的每一个 x 值都有唯一确定的 y 值与之对应，三角函数在这个区间上就存在反函数，从而引出了各个反三角函数的定义.

2. 反三角函数主值区间选取的原则

(1) 在这个区间上，函数是单调的，并能取得函数值的所有的值.

(2) 在这个区间上函数是连续的.

(3) 这个区间应包括锐角.

因此对于$y=\sin x$，我们取$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$作为主值区间.

3. 正确理解反三角函数的符号

如：$\arcsin x$

(1) 它表示一个角的弧度数.

(2) 这个角在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$内.

(3) 这个角的正弦值等于 x.

4. 函数 $y=\sin x$ 与 $y=\arcsin x$ 中，自变量 x 表示两个截然不同的量，前者表示的是角或弧，后者表示的是数值，防止出现 $\arcsin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的错误.

5. 在运用反三角函数的定义解题时，要时刻注意到主值的概念，要牢记其定义域，不然就会导致错误的结果. 举例如下:

(1) 一条直线的斜率是 $K=-\frac{2}{3}$，求倾角 α. 若写成 $\alpha=\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$ 是不对的，因为 $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$ 表示的是负角，$\alpha\in[0,\pi)$，正确的应是 $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

(2) 使用公式 $\sin(\arcsin x)=x$，$\arcsin(\sin x)=x$，要注意条件的限制，前者 $x\in[-1,1]$，后者 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 如: $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)\neq\frac{2\pi}{3}$. 因为 $\frac{2\pi}{3}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，正确的应是 $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$. 又如: $\sin(\arcsin 2)\neq 2$，$\because 2\notin[-1,1]$.

(3) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$，而不等于 $\pm\sqrt{1-x^2}$，因为 $\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，在这个区间内的余弦值总是正的.

6. 解 $\sin(\omega x+\varphi)=a$ 类型方程时，要先求出 $\omega x+\varphi$ 的一般值，然后再求 x，如: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，解得 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore\ x=-\frac{\pi}{12}$，则解集为: $\left\{x\,|\,x=2k\pi-\frac{\pi}{12}, k\in z\right\}$，这是错误的. 正

确的解集为：$\left\{x \middle| x=\frac{k\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right\}$.

7. 解三角方程时，解集中角的单位必须一致，如：不能把解写成 $x=2n\pi+45°$ 或 $x=k\cdot360°\pm\frac{\pi}{3}$.

（三）主要数学思想方法及指导

1. 牢固掌握好反三角函数的图象，对于解题是非常有用的. 如：已知 $\arcsin x>\frac{\pi}{3}$，求 x 的取值范围.

解： ∵ $y=\arcsin x$ 是增函数，从图1-1象上很容易看出

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<x\leqslant1.$$

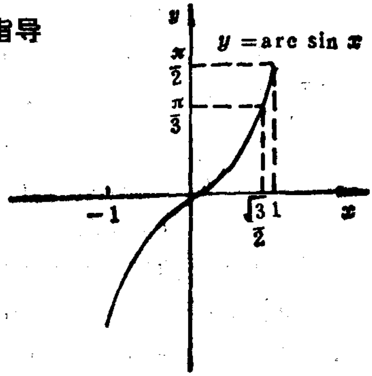


图 1-1

2. 使用反三角函数性质时，要注意反三角函数的奇偶性. 如：$\arccos(-a)=\pi-\arccos a$，不能把 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 写成 $-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为反余弦是非奇非偶的.

3. 反三角函数从性质上看，反正弦与反正切相似，反余弦与反余切相似，注意分清它们的异同，对于记忆反三角函数的性质是有好处的.

4. 因为一般的简单三角方程，变形后最终要化成一个或几个最简单的三角方程，所以解三角方程的重点是熟练掌握好最简单的四种三角方程的解集.

5. 因为三角方程的类型较多，方法各异，所以解三角方程时，一定要认真审题，分清题目的类型，掌握好每一种类型题的

特征，在此基础上选定最优的解法，另外也要熟悉同类问题的常规解法，从解一个题中获得一类题的思考途径.

6. $\sin x=\sin\alpha$，解集为$\{x|x=k\pi+(-1)^k\alpha\}$；

$\cos x=\cos\alpha$，解集为$\{x|x=2k\pi\pm\alpha\}$；

$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\alpha$，解集为$\{x|x=k\pi+\alpha\}$；

$\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}\alpha$，解集为$\{x|x=k\pi+\alpha\}$.

7. $\sin^2x=a^2(|a|<1)$，解集为$\{x|x=k\pi\pm\arcsin a\}$；

$\cos^2x=a^2(|a|<1)$，解集为$\{x|x=k\pi\pm\arccos a\}$；

$\operatorname{tg}^2x=a^2$，解集为$\{x|x=k\pi\pm\operatorname{arctg}a\}$；

$\operatorname{ctg}^2x=a^2$，解集为$\{x|x=k\pi\pm\operatorname{arcctg}a\}$.

8. 关于三角方程解的不同形式，对于同一个三角方程，由于采用的解法不同，往往得到不同形式的答案，只要正确就可以，不要求有统一的形式，也不必把它们合并.

9. 在解三角方程时，要注意增根与失根的问题，为防止增根，一般不作可能引起增根的变形，如：不用含有根号的公式；不将方程两边乘方；在作万能变换等缩小未知数允许值范围的变换之后，应该将可能丢失的解找回；不用含未知数的三角式去除方程两边等，现举例如下：

(1) 解方程 $\sin x-\cos x=1$

解：两边平方，得$\sin 2x=0$，$\therefore\quad x=\dfrac{k\pi}{2}$.

其中 $x=2k\pi$ 和 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ $k\in z$ 是增根，它们恰是方程 $\sin x-\cos x=-1$的解，原方程的解为$x=2k\pi+\pi$，$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，产生增根的原因是两边平方造成的.

(2) 解方程 $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}=0$

解: 去分母，得 $\sin x=0$,

$$\therefore\quad x=k\pi$$

经检验 $x=2k\pi$ 为增根，所以原方程的解为 $x=(2k+1)\pi$，产生增根的原因是方程的两边乘以含未知数 x 的三角式 $(1-\cos x)$ 造成的.

(3) 解方程 $\quad\sin 2x\cdot \mathrm{tg}x=0.$

解: $\sin 2x=0, x=\frac{k\pi}{2}$; $\mathrm{tg}x=0$, $x=k\pi$.

经检验 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 为增根，原方程的解为 $x=k\pi$，增根的原因是，第一步变形后，未知数允许值范围扩大了.

(4) 解方程 $\quad\sin 2x=\sin x.$

解: $2\sin x\cos x=\sin x$，两边同除以 $\sin x$

得 $\quad\cos x=\frac{1}{2}$, $\quad\therefore\ x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}, k\in z.$

经检验丢失了 $\sin x=0$ 时，$x=k\pi$ 的解. 丢失的原因是用 $\sin x$ 去除方程两边造成的.

(5) 解方程 $\quad\sin x-\cos x=1$

解:
$$\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=1$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=1,\ x=2k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

此题使用万能变换后，$\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ 对自变量 x 有限制 $\frac{x}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\quad x\neq 2k\pi+\pi$，但 $x=2k\pi+\pi$ 适合于原方程，所以应把它补入解集中. 原方程的解集，应为 $\{x\,|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $x=(2k+1)\pi$,

$k\in z\}$.

三、典型例题及分析

例 1 求下列函数的定义域和值域

(1) $y=\lg(\arccos x)$; (2) $y=\arccos(x^2-x)$;

(3) $y=3\operatorname{arcctg}\sqrt{1-2\sin x}$.

分析: 求定义域的问题，主要是根据反三角函数的定义域，分式中分母不为零，偶次根式内被开方式不能为负，对数的真数为正等来讨论. 求值域的问题，主要是根据反三角函数的主值区间来推算. 如果自变量为$U(x)$时，应考虑$U(x)$的值域.

(1) $\lg(\arccos x)$

解: $\because$ $0<\arccos x\leqslant\pi$

$\therefore$ $-1\leqslant x<1$

故 定义域: $[-1,1)$

值域: $(-\infty,\lg\pi]$

(2) $y=\arccos(x^2-x)$

解: $\because$ $-1\leqslant x^2-x\leqslant 1$

又$\because$ $x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$\therefore$ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$时，x^2-x 有最小值$-1/4$.

故定义域为 $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

值域: $\left[0,\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

(3) $y=3\operatorname{arcctg}\sqrt{1-2\sin x}$

解: ∵ $3 \geqslant 1-2\sin x \geqslant 0$

又∵ $0 \leqslant \sqrt{1-2\sin x} \leqslant \sqrt{3}$

∴ $-1 \leqslant \sin x \leqslant \frac{1}{2}$

∴ $\frac{\pi}{6} \leqslant \operatorname{arcctg}\sqrt{1-2\sin x} \leqslant \frac{\pi}{2}$

则 $2k\pi-\frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}$，则 $\frac{\pi}{2} \leqslant 3\operatorname{arcctg}\sqrt{1-2\sin x}$

$\leqslant \frac{3\pi}{2}$

∴ 定义域: $\left[2k\pi-\frac{7\pi}{6},\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}\right], k \in z.$

值域: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

例 2 求函数值

(1) $\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$; (2) $\cos\left[\arcsin\frac{4}{5}-\arcsin\frac{8}{17}\right]$;

(3) $\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-2\sqrt{2})\right]$.

分析: 上述三例都是属于反三角函数的三角运算，从反三角函数定义可知反三角函数表示的是一个角，因此在进行反三角函数的运算时，只要把反三角函数看成角后，就可以对它求三角函数值了．就自变量是否为特殊值，又可分为两大类，一类是特殊值的反三角函数的三角运算，其计算方法．是将特殊值的反三角函数，化为对应的特殊角，进行计算就可以了．另一类是非特殊值的反三角函数的三角运算，其计算方法是设辅助角，把问题转化为求辅助角的三角函数值．

(1) $\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$