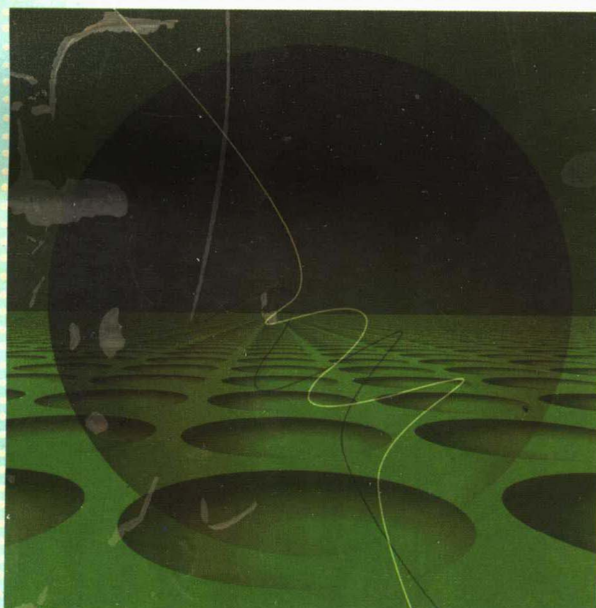
中 学 生 数 学 视 野 丛 书

ZHONGXUESHENGSHUXUESHIYECONGSHU

几何变换漫谈

JIHE BIANHUAN MANTAN

王敬庚 编著



湖 南 教 育 出 版 社

中 学 生 数 学 视 野 丛 书

几何变换漫谈

JIHE BIANHUAN MANTAN

王敬庚 编著

湖 南 教 育 出 版 社

中学生数学视野丛书

几何变换漫谈

王敬庚　编著

责任编辑:欧阳维诚

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　长沙市银都教育印刷厂印刷

787×1092　32开　印张:5.375　字数:128000

2000年6月第1版　2000年6月第1次印刷

印数:1—1000

ISBN7-5355-3195-4/G·3190

定价:7.70元

本书若有印刷、装订错误,可向承印厂斟换

(厂址:长沙市远大一路马王堆　邮编:410001)

序　言

我们有一个数学世界，它为现实世界(科学)提供大量有力的工具，它还为精神世界(哲学)贡献丰富深刻的思想.

人们创造数去记载物件的个数、长度、速度等，运用多项式去表述物理定律，用矩阵去作多种商品的价目表，去刻画几何中的变换.人们创造微积分，使得在研究几何图形和物理现象时有了强有力的工具.例如，根据物理定律，数学工作者通过计算能判定某一从未发现的星体必将在某天某时在某方向上出现，而后天文观测者的确在该天该时该方向观测到它.数学世界在爱因斯坦的相对论出现之前已准备好一种几何空间，刚好满足它的需要.我们日常生活中离不开的计算机也是先在数学世界中酝酿，而后由数学工作者设计出来的.只要想一下，装进一个特殊软件，计算机就能帮你证明平面几何定理，就能和国际象棋冠军对阵，就能在平稳对接宇宙飞船中起重要作用，只要想一下数学和计算机科学的手足关系，谁都会赞赏数学世界提供解决问题能力的神奇和伟大，今日数学世界仍在继续为我们创造和贡献新工具、新方法、新理论.

数学世界中的确还有另外一面.按照数学自身发展的规律提出和研究的一些问题，它们是数学世界中特有的现象，例如大家都听说过的哥德巴赫问题，当你接触、研究它们时，你会感到

一种棋艺味、艺术味、哲学味，它们本身看来不像是研究现实世界可以用得上的工具，然而它们却和数学世界中的工具性质部分相互呼应、相互影响、紧密联系而共同组成一个绚丽多彩的统一世界.

中学数学是数学世界的基石，是进入数学世界的必经之路，是数学教育工作者精心为全体中学生设计的多层台阶.然而他(她)们中的一些数学爱好者一定会希望向周围看一看，或者爬到一个山头，或者钻入小林的深处，领略一下数学世界中的风采，体验一下数学世界的气氛，从而获得一些数学兴趣和数学修养，我们这套丛书就是为这些中学生编写的.如果说英语给我们打开一个通向境外世界的窗口，那么中学数学给我们打开了通向数学世界的大门，而这套丛书将引导我们去欣赏它的一些景点，扩大我们的数学视野.

我们常谈论数学的力量(这是大家都同意的).的确，搞经济理论的人，常是数学出身的人得到大奖，搞计算机科学的人，也常是数学出身的人有出色表现.人们还谈论数学的美(有人不同意).的确，在形式符号掩盖下，数学中完美的结构、深刻的和谐、意外的联系都给人一种美的享受，美是有力量的.无疑，在青少年时期给自己建立一个好的数学基础和数学修养，那将是一笔终身享受、终身受益的资本.

但愿这套丛书在这方面能对有数学兴趣的中学生们有所帮助.

刘绍学

1997年11月写于北京师范大学

前　　言

为中学生朋友写一点课外读物，一直是我心中的一个愿望．欣逢湖南教育出版社编辑出版《视野》丛书，给了我这个很好的机会．

前苏联几何学家亚格龙曾指出："在初等几何中，除去一些具体的定理之外，还包含了两个重要的有普遍意义的思想，它们构成了几何学的一切进一步发展的基础，其重要性远远超出了几何学的界限．其中之一是演绎法和几何学的公理基础；另一个是几何的变换和几何学的群论基础．这些思想都是内容丰富和卓有成效的．"笔者认为亚格龙的上述见解，抓住了平面几何的根本，为我们学习平面几何指明了方向．

本书的目的就是向中学生朋友介绍关于几何变换的思想．除了介绍平面上的平移、旋转、轴反射及位似等常见的初等几何变换以外，为了开拓视野，还将介绍两种在中学几何课程中未涉及的几何变换——仿射变换和射影变换．对于这后两种变换，当然不是抽象地一般地研究它们，而是分别着重介绍它们的常见的一种特殊情形——平行投影和中心投影．形象地说，平行投影就是把图形变成它在一组平行光线照射下的影子，中心投影就是把图形变成它在由一点发出的光线束照射下的影子．

本书一方面要介绍各种变换的概念和性质，图形在各种变换下的不变性和不变量，另一方面还要介绍各种变换在研究几

何问题中的应用，可能的话，也要说到在其他方面的一些应用．几何变换既是几何研究的重要内容，又是解决几何问题的重要方法．我们从变动的观点来研究几何，采用变换的方法解决几何问题．

要介绍近代关于几何学的观点，避不开变换群的概念，本书最后一章将尽可能简单通俗地给出变换群的概念．研究图形在一种变换群下的不变性和不变量，就构成一门几何学，这就是近代关于几何学的群论观点．用这种观点看待几何学，就把包括欧氏几何学在内的各种几何学，既区分开又统一起来了．由于全书就是按照这个观点来写的，因此具有中学水平的读者，阅读最后这一章，了解其基本思想，除了个别术语以外，我想是不会有太多困难的．本章最后还极其通俗直观地介绍了“橡皮变换”和它所对应的几何学——外号叫“橡皮膜上的几何学”的拓扑学的点滴．

我的老师刘绍学教授对本书的写作自始至终给予指点和帮助，我的朋友物理系的杨敬明教授为我提供了与物理有关的内容；湖南教育出版社的胡坚和郑绍辉两位同志对本书的写作给予了热情的帮助并提出了宝贵意见；中科院数学所李培信教授审阅了本书的初稿，提出了许多宝贵的意见．作者向他们致以诚挚的谢意．

由于作者水平所限，书中的缺点和不足之处一定不少，欢迎批评指正．

王敬庚

1998年5月1日于北京师范大学数学系

目　　录

第一章

将图形平行移动

1.1　平面上的一一点变换

一、从一条平行辅助线看用变动的观点研究几何

回想等腰梯形的判定定理:

对角线相等的梯形是等腰梯形.

如图 1.1, 已知 $AD \parallel BC$, $AC = BD$, 求证 $AB = DC$. 证明的关键一步是添加平行辅助线: 过 D 作 $DE \parallel AC$, 与 BC 的延长线交于 E, 于是得到 $\angle 1 = \angle 2$, $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 从而 $AB = DC$.

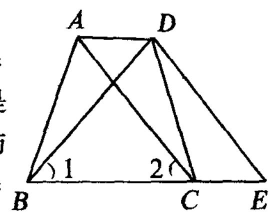


图 1.1

你能告诉我是怎样想到添加平行辅助线 DE 的吗?

要证 $AB = DC$, 考虑 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$, 已知 $AC = BD$, 又 BC 是公共边, 因此只须证出 $\angle 1 = \angle 2$, 就有 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 从而就有 $AB = DC$. 如何从已知条件 $AD \parallel BC$ 及 $AC = BD$ 推出 $\angle 1 = \angle 2$ 呢? 注意到 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 分别是 DB 及 AC 与 BC 的

夹角,如果把 AC 沿着 BC 的方向平行推移至 DE 的位置,使它与 DB 成为 $\triangle DBE$ 的两条边(见图 1.2). 由于 AC 在平行推移过程中,与直线 BC 的夹角始终保持相等,所以 $\angle E=\angle 2$,而且长度保持不变,所以又有 $DE=AC$,因而 $\triangle DBE$ 是等腰三角形. 从而 $\angle 1=\angle E$,因此得到 $\angle 1=\angle 2$."添加平行辅助线 DE"的念头,我想大概就是这样为了证明 $\angle 1=\angle 2$ 把线段 AC 平行推移到 DE 的位置而得到的.

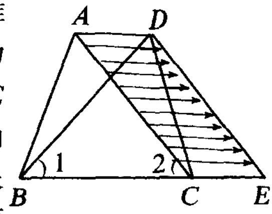


图 1.2

上面我们是用变动的观点来分析的. 用变动的观点研究平面几何,就是通过将图形进行适当的变换——平移、旋转、轴反射及位似等,并运用图形在变换下不变的性质,来寻求问题的解决. 例如在上例中,我们将线段 AC 进行平移,并且用到了线段在平移过程中保持长度不变,以及与另一直线的夹角也保持不变的性质. 因此,用变动的观点研究几何,首先就要研究各种变换,研究图形在各种变换下有哪些性质保持不变,以及如何应用这些不变的性质来解题等等.

为研究平面上的各种变换作准备,我们先来介绍平面上的一一(点)变换.

二、平面上的一一(点)变换

设 A 和 B 是两个非空集合,如果有一个确定的法则 f,使得对于集合 A 中的每一个元素 a,依照这个法则 f,都能得到集合 B 中的唯一一个元素 b,我们就把这个法则 f 称为集合 A 到集合 B 的一个**映射**(或**对应**),记为 $f: A \longrightarrow B$ 或 $A \xrightarrow{f} B$. 并把

元素 b 叫做元素 a 在映射 f 下的**象**，把元素 a 叫做元素 b 在映射 f 下的**原象**（或**逆象**），记为 $b=f(a)$ 或 $a \xrightarrow{f} b$. 集合 A 中所有元素的象的集合记为 $f(A)$.

例 1 集合 A 取全体自然数的集合 N，集合 B 取全体有理数的集合 Q，法则 f 是"取倒数"，则对于每一个自然数 n，依法则 f（即取倒数）都得到唯一一个有理数 $\frac{1}{n}$. 因此取倒数这个法则就是自然数集 N 到有理数集 Q 的一个映射：$f(n)=\frac{1}{n}$.

例 2 集合 A 和 B 都取全体整数的集合 Z，法则 f 是"加 1"，则对于每一个整数 m，依法则 f（即加 1），都得到唯一一个整数 $m+1$，因此，"加 1"这个法则就是整数集 Z 到整数集 Z 的一个映射，或说是整数集 Z 到自身的一个映射，$f(m)=m+1$.

特别地，如果在映射 $f: A \longrightarrow B$ 下，集合 A 中不同的元素在集合 B 中的象也不同，而且集合 B 中的每一个元素，在集合 A 中都有原象，我们就称这样的映射 f 为**一一映射**. 打个比喻，电影院上映一部极好的新片，当天晚场票全部售出，买到票的观众高高兴兴进入放映厅，该场电影的观众的集合（A）和放映厅中座位的集合（B）之间的对应法则——对号入座，就是一个一一映射（因为每位观众都有唯一的一个座位，所以是一个映射，又因为没有两位观众同时坐一个座位，而且没有一个座位空着，所以是一一映射）.

我们来看看前面例 1 和例 2 中的映射是不是一一映射. 在例 1 中，虽然两个不同的自然数，取倒数可得两个不同的有理数，但由于不是每一个有理数都是某个自然数的倒数，即不是每个有理数都有原象，因此例 1 中的映射不是一一映射，不难验证例 2 中的映射确是一一映射.

我们对一一映射特别感兴趣.因为若 f 是 A 到 B 的一一映射,则集合 B 中的每一个元素 b,在集合 A 中有唯一的原象 a,使 $f(a)=b$,这样确定的由 b 得到 a 的法则,便是集合 B 到集合 A 的一个映射,这个映射称为映射 f 的**逆映射**,记为 $f^{-1}:B\longrightarrow A$.这就是说,凡是一一映射必有逆映射.例如,上述例 2 中的一一映射 f,把任一个整数 m 变成 $m+1$,即 $f(m)=m+1$,则把 $m+1$ 变成 m 的映射就是f 的逆映射f^{-1},即 $f^{-1}(m+1)=m$.

特别地,我们把集合 A 到自身的映射$f:A\longrightarrow A$ 称为集合 A 的一个**变换**.集合 A 到自身的一一映射称为集合 A 的一个**一一变换**.前面的例 2 就是整数集 Z 的一个一一变换.

我们把平面看成是平面上所有点组成的集合,通常用 π 表示.并把平面 π 到自身的映射,叫做平面 π 上的**点变换**,把平面 π 到自身的一一映射,叫做平面 π 上的**一一点变换**.

以后我们讨论的变换都是平面上的点变换,并将“点”字省略.在本书第五章和第六章中,也要涉及到两个平面之间的映射.

在今后关于变换的讨论中,还常常用到如下几个重要概念:恒同变换,一个变换的逆变换及变换的乘积.

(1) 把平面上任一点都变成该点自已的变换,或者说,使平面上每一点都保持不动的变换,叫做平面上的**恒同变换**,记为 I.对于平面 π 上的任一点 P,$I(P)=P$.显然,恒同变换是一一变换.

(2) 设 T 为平面上的一个一一变换,则平面上每一点 P' 在变换 T 下都有唯一的原象 P,使 $T(P)=P'$,于是把 P' 变成 P 也确定平面上的一个变换,称为变换 T 的**逆变换**,记为 T^{-1},$T^{-1}(P')=P$.于是凡一一变换皆有逆变换,且显见其逆变换仍

是一一变换.

(3) 已知平面上的两个一一变换 T_1 和 T_2,对于平面上任一点 P,设 $T_1(P)=P'$, $T_2(P')=P''$,连续施行这两个变换,得 $T_2[T_1(P)]=T_2(P')=P''$. 由 P 和 P'' 为一对对应点所确定的变换记为 $T_2\cdot T_1$,即 $(T_2\cdot T_1)(P)=T_2[T_1(P)]=P''$,称为变换 T_1 和 T_2 的**复合**或变换 T_1 和 T_2 的**乘积**. 乘积 $T_2\cdot T_1$ 中的乘法记号·通常省略不写,直接记为 T_2T_1(如同在代数中,通常将乘积 $a\cdot b$ 记为 ab 一样).

注意:在本书中,我们约定,在变换乘积的记号中,先施行的变换在记号中排在后面.

易知,两个一一变换的乘积仍然是一个一一变换.

在平面 π 上先施行一个一一变换 T,接着再施行 T 的逆变换 T^{-1},结果平面 π 上每一点都变成该点自己,即得到一个恒同变换. 因此,对于平面上的任何一个一一变换 T,总有 $T^{-1}T=I$.

容易看到,变换的乘法满足结合律,即对于任意三个一一变换 T_1, T_2, T_3,有 $T_3[T_2T_1]=(T_3T_2)T_1$. 这是因为,对于任一点 P,设 $T_1(P)=P'$, $T_2(P')=P''$, $T_3(P'')=P'''$. 则有

$$(T_3[T_2T_1])(P)=T_3\{(T_2T_1)(P)\}=T_3\{T_2[T_1(P)]\}=T_3\{T_2(P')\}=T_3(P'')=P'''.$$

$$[(T_3T_2)T_1](P)=(T_3T_2)[T_1(P)]=T_3T_2(P')=T_3[T_2(P')]=T_3(P'')=P'''.$$

这两个结果是相同的,所以 $T_3(T_2T_1)=(T_3T_2)T_1$. 由于有结合律,因此在书写三个或更多个变换的乘积时,加括号是多余的,我们把上述三个变换的乘积,简单地写成 $T_3T_2T_1$.

但一般说来,变换的乘法却不满足交换律,即连续施行的两个变换,交换次序以后,可能得到不同的变换,即 $T_2T_1\neq$

T_1T_2,这是变换的乘法与通常的数的乘法不同的地方.

在作了上述准备之后,我们现在可以来研究平面上的平移变换.

1.2 平移变换的概念和性质

一、平移变换的概念和表示

本章开头的例子中所作的将线段 AC 平行移动到 DE,实际是将线段 AC 上的每一点,沿着同一个方向(从 A 到 D 的方向)移动相同的距离(从 A 到 D 的距离),如图 1.2 中箭头所示.

把平面上的任一点 P,在该平面内,沿着一个定**方向**,移动定距离,变到点 P',我们把平面上的这种(点)变换,叫做(平面上的)**平移变换**,简称**平移**.上述定方向称为平移的方向,定距离称为平移的**距离**.上述点 P' 称为点 P 在平移下的**象**,点 P 称为点 P' 在平移下的**原象**,点 P 和点 P' 称为平移下的一对**对应点**.

直观地说,平移变换就是将平面上的每一点作相同的平行移动.具体描述一个平移,既要指明平移的方向,又要指明平移的距离.

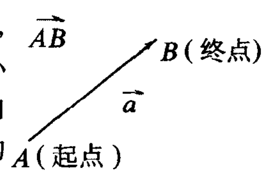


图 1.3

在几何上,我们常用带箭头的线段,来表示既有大小又有方向的量.既有大小又有方向的量称为**向量**,箭头所指的方向就是向量的**方向**,线段的长度就是向量的**大小**(也称为向量的**模**,或向量的**长度**).以 A 为起点,B 为终点的向量(见图

1.3)用记号$\overrightarrow{AB}$表示,读作"向量 AB",它的方向是从 A 到 B,它的模记作$|\overrightarrow{AB}|$,是线段 AB 的长度$|AB|$. 向量记号也可以用一个小写字母上方画一个箭头来表示,例如图 1.3 中的向量也可记作$\overrightarrow{a}$(读作"向量 a"),它的模记为$|\overrightarrow{a}|$.

这样,平移的方向和距离就可用一个向量来表示. 例如用平移 $T(\overrightarrow{d})$表示这个平移的方向是$\overrightarrow{d}$的方向,平移的距离是$\overrightarrow{d}$的长度$|\overrightarrow{d}|$. 图 1.2 中的平移的方向和距离,可以用向量$\overrightarrow{AD}$来表示,这个平移可以记为平移 $T(\overrightarrow{AD})$.

二、平移变换的特征

我们知道,在一个平移变换下,平面上的每一点都有唯一的象 P',而且不同的点象也不同,不仅如此,平面上的每一点 Q',都可以由平面上某一点 Q 平移得到,即每一点 Q'都有原象 Q,因此,平移变换是平面上的一一变换.

若在平移 $T(\overrightarrow{d})$下,点 P 的象是点 P',点 Q 的象是点 Q'(图 1.4),则由平移的概念知,PP'与$\overrightarrow{d}$ 的方向平行,且$|PP'|=|\overrightarrow{d}|$,同样,$QQ'$也与$\overrightarrow{d}$ 的方向平行,且$|QQ'|=|\overrightarrow{d}|$. 于是有 $PP'\parallel QQ'$且$|PP'|=|QQ'|$. 这样我们就得到平移有如下特点:在平移下,每一对对应点的连线都互相平行(平行

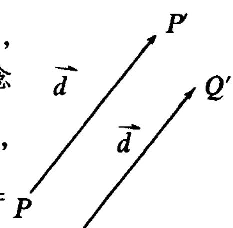


图 1.4

于平移的方向)，每一对对应点之间的距离都相等(等于平移的距离)．或者说，在平移下，每一对对应点所连线段平行且相等．

反之，若平面上的一个一一变换，使每对对应点的连线都互相平行，且每对对应点之间的距离都相等，则这个变换一定是一个平移(以对应点连线的共同方向为平移方向，以对应点之间的共同距离为平移距离所决定的平移)．

因此，根据平移变换的上述特征，我们要证明平面上的一一变换是平移，只须证明该变换下的任意两对对应点 P 与 P'，Q 与 Q'，有 $PP' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} QQ'$，即可得该变换为平移．

三、平移变换的决定

我们知道，要给出一个平移，必须给出平移的方向和平移的距离，或者给出表示这个平移的方向和距离的向量．然而，我们只要给出平面上的一点 A，以及 A 在这个平移下的象 A'，那么，根据平移的特征就可得到，这个平移的方向就是从 A 到 A' 的方向，平移的距离就是 A 到 A' 的距离，或者说表示这个平移的方向和距离的向量就是 $\overrightarrow{AA'}$．因此，这个平移也就完全确定了．于是我们得到，平移变换由它的一对对应点完全决定．例如在图 1.2 中的平移，由一对对应点 A，D 完全决定．

四、平移变换的性质

1．恒同变换是一个平移变换．

恒同变换是保持平面上每一点都不动的变换，因此，我们可以把它看成是一个特殊的平移——平移的距离为零(平移的方向任意)．

2．平移变换的逆变换仍是平移变换．

由于平移 T 是一一变换，因此它存在逆变换 T^{-1}，且 T^{-1} 仍是一一变换．