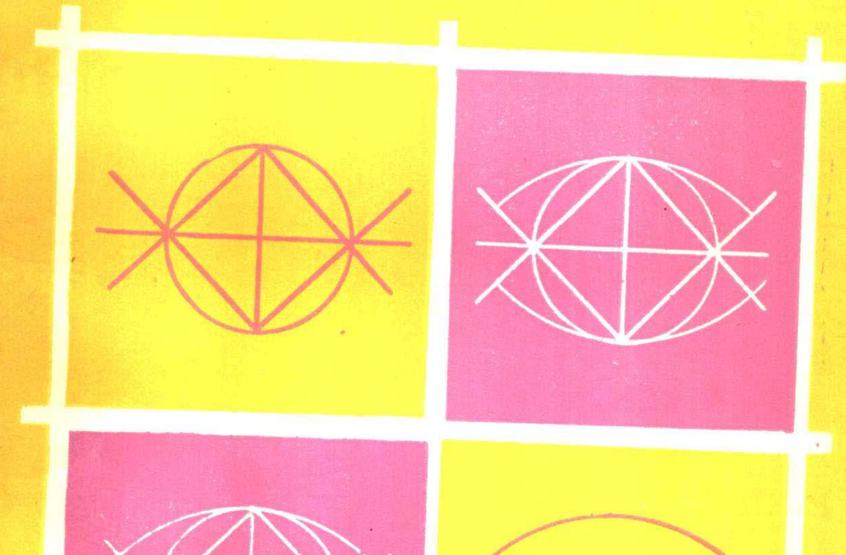
SHUXUE AIHAOZHE TIYUAN

数学爱好者题苑

（高中二年级）

陈敏贤　赖祖正



福建教育出版社

高中二年级

数学爱好者题苑

陈敏贤　赖祖正编

福建教育出版社

数学爱好者题苑
高中二年级
陈敏贤　赖祖正编
出版：福建教育出版社
发行：福建省新华书店
印刷：福州第二印刷厂
787×1092毫米　32开本　5.875印张　158千字
1988年7月第一版　1988年7月第一次印刷
印数：1——7,800
ISBN7—5334—0310—0/G·226　定价：1.50元

编者的话

本《题苑》为中学阶段的爱好数学的学生而编，旨在帮助他们打好坚实的数学基础，进一步提高能力、发展智力，增进对数学的学习兴趣．全套共六册，每个年级一册．

编者在长期教学实践中，积累了不少“好题”，近几年又翻阅了一些国内外较新的习题、资料。在这基础上，在提出编写设想和编写组织工作上，陈敏贤同志起了主要作用；共同讨论之后的具体编写工作中赖祖正同志做了大多数工作．我们遵循下述四个原则来精选题目：

（1）参照目前通用的中学数学教材和教学要求；

（2）切合中学生的认识能力和智力发展水准；

（3）强调科学性、思考性和趣味性；

（4）力求一题一型，类型的面要广、重复度要小。

对于入选的题目，我们都给出解答。紧要之处，着意加注，作些分析、启示，或点明通法。对趣味数学题，我们强调应用数学知识和方法给予科学的说明或论证。这有助于增强学生运用数学知识的能力。

教师在指导课外数学兴趣小组活动（包括开展数学竞赛）时，本书可以提供参考资料；对于社会青年的学习，本书也有一定的参考价值。

承蒙林世中老师帮助整理了书稿，谨此表示感谢。

编　者

1987年12月于福州三中

问 题 部 分

1. 求下列各式的值：

(1) $\arccos\left[\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]$；

(2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{7}{5}\pi\right)$.

2. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=4\arccos(\sqrt{2}\sin x)-\frac{\pi}{3}$；

(2) $y=\log_5\left[\arccos(2x-\sqrt{3})-\frac{\pi}{6}\right]$；

(3) $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2\cos x-1}$.

3. 讨论函数 $y=x-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$ 的图象.

4. 讨论函数 $y=\arcsin(\sin x)$ 的图象.

5. 求适合条件 $\arcsin\frac{13}{85}=\operatorname{arcctg}\frac{A}{13}$ 的 A 值.

6. 设 a、b 为正数，试求 $\frac{a^3}{2}\csc^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$+\frac{b^2}{2}\sec^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)$的值。

7. 已知直角三角形三边为 a、b、c，其中 c 为斜边，

求 $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}+\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}$的值。

8. 若 $0<\theta<\pi$，$b^2<a^2$，证明：

$$2\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=\arccos\left(\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}\right).$$

9. 求证：$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$。

10. 已知：$xy=a^2+1$，且 x、y、a 均为正数，求证：

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a+x}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a+y}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}.$$

11. 试证明：$\operatorname{arc\,tg}n+\operatorname{arc\,ctg}(n+1)=\operatorname{arc\,tg}(n^2+n+1)$。

12. 用反正弦函数表示 $\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)$。

13. 设 $\arcsin(\sin\alpha+\sin\beta)+\arcsin(\sin\alpha-\sin\beta)=\frac{\pi}{2}$。

试求 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ 之值.

14. 求和：$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{6}$

$$+\arcsin\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}+\cdots$$

$$+\arcsin\left[\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n^2+n}\right].$$

15. 解方程：$\cos(\pi xy)=\log_5(x^2+y^2)=1$。

16. 解方程组：

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x = 3\operatorname{ctg}y, \\ \sin x \sin y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

17. 解方程：$\left(\dfrac{\sin x}{2}\right)^{2\csc^2 x} = \dfrac{1}{4}$。

18. 解方程：$(\sin x)^{\cos^2 x - \frac{2+\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$。

19. 解方程：

$$(\sin x)^{\operatorname{arc\,tg}(\sin x + \cos x)} = (\csc x)^{\frac{\pi}{4} + \operatorname{arc\,tg}(\sin 2x)}.$$

20. 解方程：$\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x)$。

21. 解方程：$\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{x+2} + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{\pi}{4}$。

22. 求在区间 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 内且满足如下不等式的全体实数 x：

$2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}$。

23. 以满足 $0<x<\pi$，$0<y<\pi$ 和 $\sin(x+y) < \dfrac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2y)$ 的 x，y 为坐标，求由此得到点 (x, y) 的存在范围且用图表示。

24. 设在不等式 $y \leqslant 4x\sin\theta - x^2$，$y \geqslant x$ 给出的区域内，记 y 的最大值为 $f(\theta)$，画出 $f(\theta)$ 的图象，其中 $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，设能使 $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$ 成立的正锐角值为 α。

25. 解不等式：$\arccos\dfrac{x+1}{2} > \arcsin\left(x - \dfrac{1}{4}\right)$。

26. 试求：$\arcsin[\cos(\arcsin x)]$ 与 $\arccos[\sin(\arccos x)]$

之间的关系。

27. 设数列$\{a_n\}$，其中$a_1=1$，$a_2=3$，$a_4=15$且$a_{n+1}=pa_n+q(n\in N)$，求p、q的值。

28. 设数列$\{a_n\}$中$a_1=1$，$a_n=2\sqrt{a_{n-1}}(n=2, 3, \cdots)$，求通项$a_n$。

29. 有一数列$\{a_n\}$，$a_n=1+2+\cdots+n(n=1, 2, \cdots)$，把5的倍数的项依次列出，设为$b_1$，$b_2$，$b_3$，…。(1) 试用$k$表示$b_{2k-1}$，$b_{2k}$；(2)求$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2n}=?$

30. 求证：由七个实数组成的数列a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7不可能同时满足下列两个条件：(1)任意连续三项的和为正数；(2)任意连续五项的和为负数。

31. 首项为1的等差数列其前n项的和与其后的$2n$项的和之比值对任何n都取定值。试问：它是怎样的一个数列?

32. 若正数a、b同时是等差数列与等比数列的第一项和第二项，则等差数列的各项不大于等比数列的各项，试证之。

33. 设有两个等差数列2，6，10，…，190以及2，8，14，…，200，试问：它们之中相同的项有几个?并求其相同项的和。

34. 设等差数列的第m项为$\frac{1}{n}$，第n项为$\frac{1}{m}$，试求此数列的前$m\cdot n$项和$(m\neq n)$。

35. 设$\frac{1}{a_1}$，$\frac{1}{a_2}$，…，$\frac{1}{a_n}$为等差数列，证明：

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n.$$

36. 已知$f(x)=\frac{2x}{x+2}$，数列$\{x_n\}$的通项$x_n=f(x_{n-1})$

$(n>1)$。

(1) 求证：$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=$常数；

(2) 当$x_1=\frac{1}{4}$时，求x_n。

37. 若 $\log_2 x+\log_2\left(x+\frac{3}{4}\right)+\log_2 4=0$，且

$$\{a_n\}=\{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^{n-1},\ \cdots\}。$$

(1) 求$\{a_n\}$的前 100 项之和；

(2) 求$\{a_n\}$的前 100 项之积。

38. 设等比数列的前 n 项的和为 S_n，积为 P_n，各项的倒数的和为 T_n。求证：$P_n^2=\left(\frac{S_n}{T_n}\right)^n$。

39. 证明：若各项均为正数的等差数列与等比数列，它们的首项相同，项数相同，末项也相同，则等差数列的和不小于等比数列的和。

40. 设公差为非零的等差数列 $\{a_n\}$ 与等比数列 $\{b_n\}$ 有关系：

$$a_1=b_1,\ a_3=b_3,\ a_7=b_5。$$

试求：对怎样的 n，m可使 $a_n=b_m$。

41. 已知数列$\{\alpha_n\}$是等差数列，$\{\sin\alpha_n\}$是等比数列。

(1) 求数列$\{\alpha_n\}$的公差 $d(0<d<4)$；

(2) 求数列$\{\sin\alpha_n\}$的公比q；

(3) 求证：$(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n)^n=\cos n\alpha_1+i\sin n\alpha_1$。

42. 已知数列$\{a_n\}$前 n 项的和为 $S_n=2n^3+3n^2-600n$，求其前100项绝对值的和。

43. 设S_n为等差数列3，6，9，……前n项之和。

(1) 若$S_n=315$，求n之值；

(2) 若$S_n<600$，试求n之最大值。

44. 设由$a_1=1$，$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{(2n-1)a_{n-1}+1}(n=2,3,\cdots)$定义数列$\{a_n\}$，

(1) 试求通项a_n；

(2) 求和：$\dfrac{1}{\sqrt{a_1a_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2a_{n-1}}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{a_na_1}}$。

45. 在各项为正数的等比数列$\{a_n\}$中，每相邻两项a_k，a_{k+1}分别为方程$x^2+b_kx+16^k=0(k=1,2,3,\cdots)$的两根，求数列$b_1$，$b_2$，…，$b_n$，…前$n$项的和。

46. 一数列$\{a_n\}$，其中$a_2>a_1$，a_1,a_2为正整数，且$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$ $(n\geqslant3)$，求证：$a_n>2^{n-2}(n\geqslant1)$。

47. 已知等差数列$\{a_n\}$与等比数列$\{b_n\}$，且对所有自然数n，$a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_1\neq a_2$，$a_n>0$。

求证：当$n>2$时，$a_n<b_n$。

48. 已知数列a_1，a_2，a_3，…，a_n，…中所有项a_k都是正数，且$a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$。

求证：$a_n<\dfrac{1}{n}(n\in N)$。

49. 证明：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}<1$。

50. 把位数不超过四位，其数码不出现零的全体自然数记为

n_1, n_2, n_3, …, n_m. 证明：$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_m}<16$。

51. 设四正数 a, b, m, n 为递增等差数列，试解方程：

$$\sin ax\sin bx=\sin mx\sin nx.$$

52. 已知一个三角形的三个内角 A、B、C 成等差数列，且 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}C$ 恰为方程：$x^3-(3+2k)x^2+(5+4k)x-(3+2k)=0$ 的三个根，又这个三角形的面积数为 $2(3-\sqrt{3})$。试求这个三角形的三个角和三条边。

53. 设等差数列$\{a_n\}$的各项及公差都是非零实数。

(1) 试求方程：$a_kx^2+2a_{k+1}x+a_{k+2}=0(k=1, 2,\cdots)$的公共根；

(2) 若上述方程的另一根为 α_k，试证：$\frac{1}{\alpha_1+1}$, $\frac{1}{\alpha_2+1}$, …, $\frac{1}{\alpha_n+1}$, …成等差数列。

54. 已知：$\lg1.4=0.1461$, $\lg\frac{1}{35}=\overline{2}.4559$，问数列 55, 55×56, 55×56^2, …前 100 项之和是几位整数？

55. 设在抛物线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴所围的部分有边长分别为 l_1, l_2, l_3, …, l_n 的内接正三角形列$\triangle OP_1Q_1$, $\triangle Q_1P_2Q_2$, $\triangle Q_2P_3Q_3$, …, $\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$, Q_n 在横轴上且坐标为 $(x_n, 0)$。

(1) 试用数学归纳法证明：$x_n=\frac{n(n+1)}{3}$；

(2) 记线段 P_nP_{n+1} 的长为 r_n，求 $\sum\limits_{k=1}^{n}r_k^2$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

56. 设 $ABCD$ 为圆内接四边形，AB为直径，四条边顺次为 a、b、b、c，其面积为$2\sqrt{2}$，若a、b、c成等比数列，求四边形的各边长。

57. 设两个方程 $x^2-x+a=0$，$x^2-x+b=0$ 的四个根成等差数列，且首项为$\frac{1}{4}$，求 a、b 的值。

58. 有两个等差数列，项数为 n，它们的首项与公差分别为 a、b 与 b、a 且 a、b 为方程 $x^2-4x+1=0$ 的两根，求以此两数列的和为两根的一元二次方程。

59. 某区若干名学生参加数学竞赛，每个学生所得分数都是整数，总分是 8250，前三名的分数是 88、85、80，最低分数为 30，得同一分数的学生都不超过 3 人。问：至少有多少学生得分不低于 60 分(包括前 3 名)?

60. 求证：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

61. 数列$\{a_n\}$是这样确定的：$a_1=1, 4a_ka_{k+1}=(a_k+a_{k+1}-1)^2$，$a_k<a_{k+1}(k=1, 2, 3, \cdots)$。

(1) 求 a_2，a_3，a_4 并由此推出 a_n；

(2) 用数学归纳法证明(1)中推断的正确性。

62. 设$a>0$，$a\neq1$，n 为任意自然数，

求证：$\frac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+\cdots+a^{2n-1}}>\frac{n+1}{n}$。

63. 设数列$\{a_n\}$按下列法则组成：$a_{2n-1}=n^2-1$，a_{2n}

$=n(n+1)+1$。

试证：(1) $S_{2n-1}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)-1$；

(2) $S_{2n}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$。

64. 平面上有 n 条直线，其中没有两条平行，也没有三条经过同一点。求证：它们互相分割成 $E_n=n^2$ 条线段。

65. 设 $A=\{x|2x^3+5x^2+x-2>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，当 a、b 为何值时，$A\cup B=\{x|x+2>0\}$，$A\cap B=\left\{x|\frac{1}{2}<x\leqslant 3\right\}$？

66. 解不等式：$\left|\frac{-x^2+5x+2}{-x^2-5x-24}\right|>2$。

67. 已知不等式 $-1<\frac{x^2+2ax+b}{x^2+1}<2$，对于 x 的一切实数值都成立，试确定数对 (a, b) 的取值范围，并在坐标系 xOy 上画图表示出来。

68. 已知函数 $f(x-1)=x^3+ax^2+(2a-7)x+b$，且方程 $f(x+1)-f(x-3)=0$ 至少有一个正根，求 a、b 的取值范围。

69. 求使 $x^2\sin\theta+2x\sin 2\theta+\cos\theta>0$ 对所有实数 x 都成立的 θ 的取值范围（这里 $0\leqslant\theta<2\pi$）。

70. 已知：$f(x)=x^2-6x+5$，求满足 $f(x)+f(y)\leqslant 0$，且 $f(x)-f(y)\geqslant 0$ 的点 (x, y) 在平面上的范围，并画出图形。

71. 某工厂制造 a、b 两种产品，生产 a 产品每个须耗煤 4 吨，电力 3 千瓦，利润 700 元；生产 b 产品每个须耗煤 5 吨，

电力 10 千瓦，利润 1200 元。现该厂只有煤 20 吨，电力 30 千瓦，问怎样能取得最高利润？

72. 解不等式：$x^{\log_2 x-1}>\frac{16}{x}$。

73. 求满足 $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\leqslant 1+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$的 x 的范围。

74. 解不等式：$0.2^{\cos 2x}-\frac{1}{25^{\cos^2 x}}<4\cdot 125^{-\frac{1}{2}}$。

75. 设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，在$0<x<\frac{\pi}{2}$范围内试解不等式：

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(x+\alpha)<\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\alpha, & ①\\ \operatorname{ctg}(x-\alpha)<\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}\alpha. & ②\end{cases}$$

76. 解不等式组：

$$\begin{cases}\cos 5x+\cos x>2\cos 2x, & ①\\ \dfrac{x^3+x-2}{x^2+x-6}<0. & ②\end{cases}$$

77. 证明：当 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant\pi$ 时，不等式$\cos x+\cos y\leqslant 1+\cos xy$ 成立。

78. 在$\triangle ABC$ 中，求证：$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3$。

79. 试比较$\sqrt[k]{k!}$与$\sqrt[k+1]{(k+1)!}$的大小，其中 $k\in N$。

80. 对任意自然数 n，求证：

$$1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot\cdots\cdot n^n\leqslant\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

81. 证明：$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}<\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$。

82. 求证：$(2n)!<2[n(n+1)]^n$ $(n\in N)$。

83. 设 a、b、c 为三角形三边，求证：

$$\sqrt{2}(a+b+c)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$
$$\leqslant\sqrt{3}(a+b+c)。$$

84. 求证：对任意正整数 n，有：

$$\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}}_{n\text{ 个根号}}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}。$$

85. 求证不等式：$\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}<\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$

$(a>0)$。

86. 设 $n\in Z$，求 $S=|n-1|+|n-2|+\cdots+|n-100|$ 的最小值，并求此时 n 的值。

87. 比较 $\log_n(n+1)$ 与 $\log_{n+1}(n+2)$ $(n>1,\ n\in Z)$ 的大小。

88. 对任何自然数 n，求证不等式：

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)}>1。$$

89. 设 a、b、c 为小于 1 的正数，求证：$(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 不能同时大于 $\frac{1}{4}$。

90. 已知：$f(x)=x^2+px+q$，求证：$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$。

91. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leqslant\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$$

$$<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

92. 在$\triangle ABC$中，$AC>BC$，t_a和t_b分别是$\angle A$和$\angle B$的平分线，求证：$t_a>t_b$。

93. 设不为零的实数a、b、c满足条件：

$$(a+b+c)^3>0>a^3+b^3+c^3.$$

证明：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{a+b+c}$。

94. 设A、B、C为三角形的内角，x、y、z均为实数，求证：$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos C+2yz\cos A+2zx\cos B$。

95. 已知：a_1，a_2，…，a_n与b_1，b_2，…，b_n是$2n$个正数，且$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1$。

求证：n个分数$\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，…，$\frac{a_n}{b_n}$中最小数一定不大于1。

96. 证明：仅当$n=2$，3，5时，下述不等式：

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0$$

对于任意实数a_1，a_2，…，a_n才成立。

97. 设a是不等于1的正数，$p>q>r$（p、q、$r\in N$）。

证明：$a^p(q-r)+a^q(r-p)+a^r(p-q)>0$。

98. 已知：α、β均为锐角，求证：

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\beta\sin^2\beta}\geqslant 9.$$

又问：α、β 取什么值时等号成立？

99. 设$|x|<1$，求证对任意整数 $n\geqslant 2$ 都有：

$$(1+x)^n+(1-x)^n<2^n.$$

100. 设$0\leqslant x\leqslant 1$，试证：$\cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x)$。

101. 设 A、B、C 为三角形的内角。

(1) 求 $\sin A\sin B\sin C$ 的最大值；

(2) 求 $\csc A+\csc B+\csc C$ 的极值。

102. 设 a、b、c 是任意三角形三边的长度，求证：

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

103. 设实数 a_0，a_1，a_2，…，a_n 满足 $a_{k+1}-2a_k+a_{k-1}\geqslant 0$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$，且 $a_0=a_n=0$，求证：$a_k\leqslant 0$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$。

104. 已知：p，$q\in R$，且 $p+q=1$，a、b、c 为正数，求证：当且仅当 $pa^2+qb^2>pqc^2$ 成立时，以 a、b、c 为边长可以作成一个三角形。

105. 有 n 个实数 a_1，a_2，…，a_n 且 $0<a_k<1(k=1, 2, \cdots, n)$。

求证：$a_1a_2\cdots a_n>a_1+a_2+\cdots+a_n+1-n$ $(n\geqslant 2)$。

106. 已知 $a_1\geqslant 0$，$a_2\geqslant 0$，$a_3\geqslant 0$且 $a_1+a_2+a_3=1$，$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$。

求证：
$$(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3)\left(\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}+\frac{a_3}{\lambda_3}\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3}.$$

107. 求证对于 $x_1>0$，$x_2>0$，且$x_1y_1-z_1^2>0$，$x_2y_2-z_2^2$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com