

CHUZHONG JIHE YI RI YI TI



初中几何一日一题

少年儿童出版社

初中几何一日一题

(供初中二、三年级用)

曹正华 编

少年儿童出版社

初中几何一日一题
(供初二、三年级用)

曹正华 编

吴列平 装帧 肖朱 插图

少年儿童出版社出版
(上海延安西路1536号)

新华书店上海发行所发行 儿童印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 0.5 字数 200,000

1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷

印数 1—265,000

统一书号: 157064.232 定价: 1.10 元

编 者 的 话

为了帮助中、小学生学好数学,丰富课余生活,激发他们学习数学的兴趣,我们配合中小学数学教材,试编了这套《一日一题》。

《一日一题》分算术、代数、几何三部分。算术共六册,供小学使用,每册基本上对应一个年级。代数共二册,第一册供初中一年级用,第二册供初中二、三年级用。几何一册,供初中二、三年级用。

这套书的特点是:

1. 注重对学习数学方法的指导。书中的方法与解答部分,有学习方法、思考方法和解题方法的详细介绍。
2. 提倡学习要持之以恒。一日一题,每天花的时间不多,若能坚持,对学过的数学知识,能收到系统的整理和复习的效果。
3. 激发读者学习数学的兴趣。各册中均有适当数量的趣味数学题,并介绍一些古今中外的著名初等数学问题。

本册是初中平面几何分册。

我们初次编写《一日一题》,书中如有错误或不妥之处,热忱期望广大教师、家长和读者批评指正。

目 录

问 题 部 分	方 法 与 解 答
一 几何基本概念(1~8)..... 1	63
二 相交线与平行线(9~17) 2	68
三 三角形(18~56)..... 5	74
四 四边形(57~88).....11	93
五 面积与勾股定理(89~102)15	 109
六 逻辑推理(103~114).....17	 117
七 相似形(115~146).....22	 122
八 圆(147~188).....26	 139
九 趣味几何(189~206).....31	 162
十 直线和圆的方程(207~223).....35	 170
十一 证法研究(224~246).....36	 176
十二 几何证明(247~309).....39	 198
§1 相等.....40	 198
§2 和差倍分与不等.....41	 203
§3 垂直与平行.....44	 214
§4 比例线段.....45	 218
§5 共点、共线、共圆.....47	 232
§6 面积.....48	 240
§7 最大值、最小值与定值49	 243
十三 几何计算(310~315).....50	 250

十四 添辅助线(316~339).....51	 254
十五 几何轨迹(340~345).....53	 269
十六 几何作图(346~353).....54	 275
十七 历史上的几何问题(354~365)	
.....56	 281

一 几何基本概念

1 下列说法是否正确？为什么？

- (1) 射线比线段长得多。
- (2) 线段是线的一段，所以不一定是直线的一部分。
- (3) 直线无端点，所以一条直线要由两点来决定；射线有一端点，所以一条射线只要一点就可以决定。
- (4) 两点间的距离就是连接这两点的线段。
- (5) 周角与 0° 角是一样的。
- (6) 0° 角也属于锐角。
- (7) 一个钝角加上一个锐角等于平角。
- (8) 大于平角的角也是钝角。
- (9) 一个角的补角的补角恰好等于这个角。
- (10) “平角的一半是直角”那是公理，用不到再去证明它。

2 已知一个角的余角的补角是这个角的补角的 $\frac{4}{5}$ ，求等于这个角 $\frac{1}{3}$ 的角的余角。

3 已知 A、B、C 三点顺次在一条直线上，P 为 AB 中点，Q 为 BC 中点，请你画一画、量一量 PQ 与 AC 的长度有什么关系？然后证明这一关系。

4 邻补角的角平分线有什么关系？请你证明它。

5 已知两个角互为补角证明其中较小角的余角等于这两

个角的差的一半。

6 如图 1, 将二块三角板叠在一起, 使直角顶点重合于 O , 又直角边 $AO \perp CO$, $BO \perp DO$, 求证:

$$\angle AOB + \angle DOC = 180^\circ$$

7 剪两条长度相等的纸条 AB 和 CD 分别找出它们的中点 M , N 和三等分点, 然后把它们的 $\frac{1}{3}$ 部

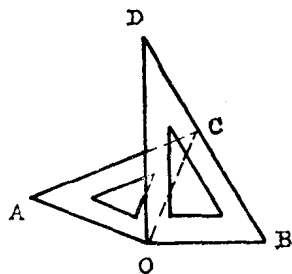


图 1

分重叠起来用浆糊粘牢, 量出此时 MN 的距离并指出它与纸条的长度之间有什么关系? 试证之。

8 邻角 $\angle AOB$ 和 $\angle BOD$ 的和是 252° , 并且 AO 的延长线平分 $\angle BOD$, 求 $\angle AOB$ 和 $\angle BOD$ 的度数。你能画出这个图形吗? 如果你能画出这个图形, 那么问题就很容易理解了。

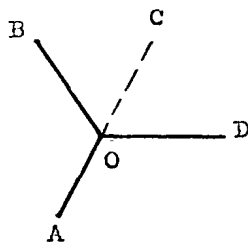


图 2

二 相交线与平行线

9 想一想, 如何回答下面的问题, 并说明理由。

(1) 对顶角就是有公共顶点的两个角, 对吗?

(2) 过直线上一点可以作此直线的两条垂线, 分别在这条直线的两侧, 是吗?

(3) 一条直线与另两条直线相交, 若这两直线不平行就无所谓同位角, 这种说法对不对?

(4) 两直线的位置关系不是相交就是平行, 这种说法对吗?

10 三直线 AB , CD , EF 两两相交于 G , H , I , 试分别找出此图形中的所有同位角、内错角和同旁内角。

11 已知: $AB \parallel CD$, $\angle A = 32^\circ$, $\angle C = 36^\circ$

求: $\angle AEC = ?$

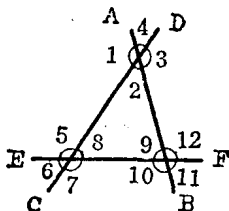


图 3

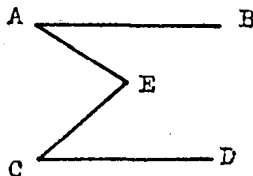


图 4

[探索] 做完这道题, 请你想一想, $\angle AEC$ 与 $\angle BAE$, $\angle ECD$ 有何关系? 你能证明这个关系吗?

12 如图 5, 求: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = ?$

[探索] 如果有一条折线 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 两端 P_1 , P_n 分别在二条平行线 AB 与 CD 上, 则在折线一侧即同旁的诸内角之和 $\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n$ 是多少? 见图 6。

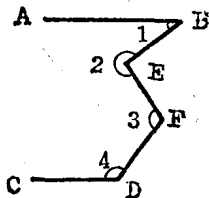


图 5

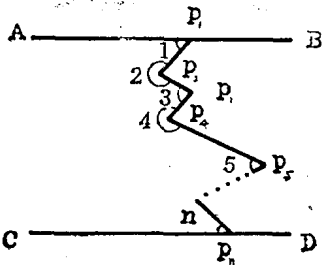


图 6

13 如图 7, 已知: $\angle AEM = \angle DGN$, $\angle 1 = \angle 2$, 求证: $EF \parallel GH$.

14 如图 8, 已知: $EF \perp AB$, $CD \perp AB$, $\angle 1 = \angle 2$, 求证: $\angle AGD = \angle ACB$.

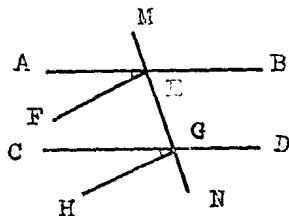


图 7

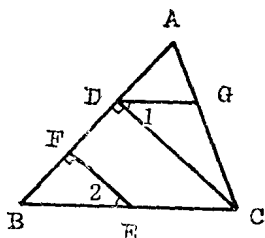


图 8

15 请你画出两平行线的一对同旁内角的平分线, 看看它们交成的是个什么角. 并证明你的结论.

16 $\triangle ABC$ 中, 请在边 AC 上找一点 E, 过 E 作 $ED \parallel BC$, $EF \parallel AB$, 使 BE 平分 $\angle DEF$, 你能找出这一点 E 来吗? 并且证明你找到的 E 点确能满足题目的要求.

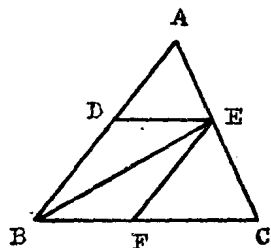


图 9

17 判断下列语句, 哪些是命题, 哪些不是命题, 如果是命题, 那

末是真命题还是假命题, 不论真命题还是假命题都要求证明。

- (1) 任何数的绝对值总是正的。
- (2) 一个角的补角总大于它的余角。
- (3) 内错角相等。

[探索] 在完成了上列问题以后, 请你想一想。

- (1) 如何证明一个命题是假命题?

(2) 什么样的真命题不用证明?

三 三 角 形

18 任作一个 $\triangle ABC$, 并在其内部任取一点 P , 连接 PB 、 PC , 请你比较一下 $\angle BPC$ 与 $\angle A$ 哪个大? 并给出证明。

19 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点, 连接 PB 、 PC , 求证:
 $BC < PB + PC < AB + AC$ 。

[探索] 若在 $\triangle ABC$ 内取两点 P 、 Q , 使 B 、 C 两点在直线 PQ 同侧, 连接 BP 、 PQ 、 QC , 那末 $AB + AC$ 与 $BP + PQ + QC$ 哪个大? 你能否证明这一结论?

20 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点, 求证:

$$\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < PA + PB + PC < AB + BC + CA$$

[探索] 第 19、20 两题有何联系?

21 作一个等腰三角, 画出它一腰上的高, 量一量这个高与底边所夹角的度数, 再量一量等腰三角形顶角的度数, 看看它们之间有何关系? 为了验证这一关系, 可以多作几个等腰三角形来试试, 然后证明你的结论。

22 在 $\triangle ABC$ 中, CD 是 AB 边上的中线且 $CD = \frac{1}{2}AB$, 求证 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

23 如图 10, C 为 AB 上一点, $CA = AD$, $CB = BE$, 且 $AD \parallel BE$, 连接 DC 和 EC , 请你用一块三角板量一量, DC 和 EC 的夹

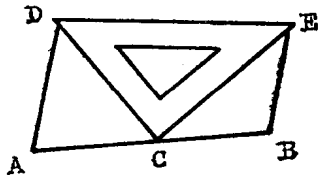


图 10

角是多少,并给出证明。

24 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, CD 是 AB 边上的高, CM 是 AB 边上的中线, CE 平分 $\angle DCM$ 交 AB 于 E , 请你量一量 $\angle ACE$ 。当然, 作图要正确, 你能得出什么结论? 请证明你的结论。

25 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 上任意一点, 求证: $AD < \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$ 。

26 如图 11, 已知 $\angle ABC = \angle ADC$, $AB > AD$, 求证: $CB < CD$ 。

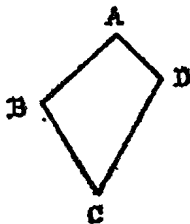


图 11

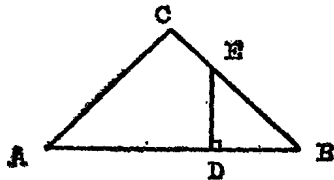


图 12

27 已知图 12 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC$, D 是 AB 上一点且 $AD=AC$, $DE \perp AB$, 求证: $BD=DE=CE$ 。

28 在等边 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 、 F 分别在 AB 、 BC 、 CA 上且 $AD=BE=CF$, 求证: $\triangle DEF$ 也是等边三角形。

[探索] 若 D 、 E 、 F 三点分别在 AB 、 BC 、 CA 的延长线上, 则又如何?

29 在等边三角形 ABC 中, D 、 E 、 F 分别在 AB 、 BC 、 CA 上且

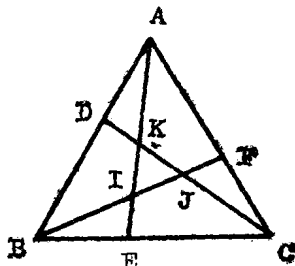


图 13

$AD=BE=CF$, 连接 AE 、 BF 、 CD , 三线两两交于 I 、 J 、 K , 求证: $\triangle IJK$ 也是等边三角形。对此你能找到一种最简捷的证法吗?

[探索] 在这个几何图形中究竟有多少组全等三角形?

30 求证等腰三角形两腰上的中线相等。

[探索] (1) 等腰三角形两腰上的高相等吗? 如何证明。

(2) 等腰三角形两腰上的角平分线相等吗? 如何证明。

31 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB > AC$, AD 平分 $\angle A$ 交 BC 于 D , 则 $BD > CD$ 。

32 如图 14, 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 2\angle C$, $AD \perp AC$ 交 BC 于 D , 求证: $CD = 2AB$ 。

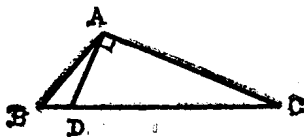


图 14

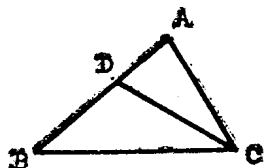


图 15

33 如图 15, 已知: $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 2\angle B$, CD 平分 $\angle C$, 求证: $BC = AC + AD$ 。

34 如图 16, 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, EF 过点 A , 且 $EF \parallel BC$, D 为 EF 上任意一点 (不和 A 重合), 求证: $AB +$

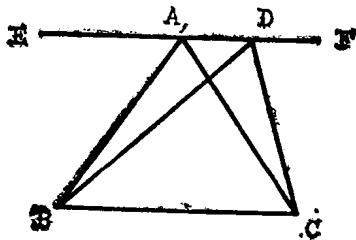


图 16

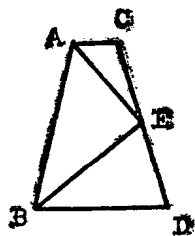


图 17

$AC < DB + DC$.

35 如图 17, 已知: $AC \parallel BD$, EA 、 EB 平分 $\angle CAB$ 、 $\angle DBA$, 且 CD 过 E 点, 求证: $AB = AC + BD$.

36 直角三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, 在 AB 上找两点 D 、 E , 使 $AD = AC$, $BE = BC$, 请你计算 $\angle DCE$ 的度数.

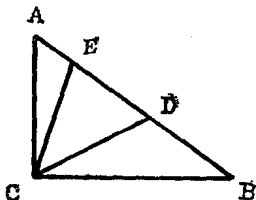


图 18

37 在 $\triangle ABC$ 中, BE 为 AC 上的高, CF 为 AB 上的高, M 为 BC 中点, N 为 EF 中点, 则 MN 和 EF 的位置有何关系? 你能证明这种关系吗?

38 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A$ 最大, P 、 Q 分别是 AB 、 AC 上的任意一点, 求证: $PQ < BC$.

39 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, AD 是 BC 上的中线, 求证: $\angle BAD < \angle CAD$.

40 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 2\angle C$, $BC = 2AB$, AD 是 BC 边上的中线, 求证: $\triangle ABD$ 是等边三角形.

[提示] 作 $\angle B$ 的平分线.

41 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 $\triangle ABC$ 外一点, $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BDC$, 求证: $AB = BD + DC$.

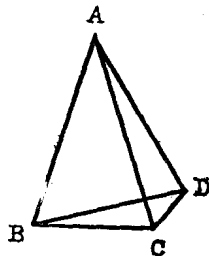


图 19

[提示] 为了利用已知条件, $\angle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BDC$, 可作出 $\angle BDC$ 的平分线.

42 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 100^\circ$, CD 是 $\angle C$ 的

平分线交 AB 于 D , 求证: $BC=CD+AD$.

[提示] 按角平分线对称反折.

43 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线 AD 、 BE 、 CF 交于 O 点, 过 O 作 $OG \perp BC$, 则 $\angle BOD = \angle COG$.

44 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, D 是 BC 上一点, 连接 AD 且有 $AB=AD=DC$, 求 $\angle C$.

45 直角三角形斜边上的中线和高等所夹的角, 被直角的平分线所平分.

46 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$ 的平分线和 $\angle C$ 的外角平分线交于 D , 过 D 作 BC 的平行线分别交 AB 、 AC 于 E 、 F , 则 $EF=BE-CF$.

47 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$ 的平分线 BD 和 $\angle C$ 的外角平分线 CD 交于 D , 求证: $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle A$.

48 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, 延长 BC 到 E , 使 $CE=AB$, 延长 CB 到 D 使 $BD=AC$, 连 AD 、 AE , 则线段 AD 与 AE 哪一条长些? 你能证明吗?

49 (1) 下列说法是否正确? 为什么?

一个定理的逆定理不一定正确.

任何一个命题都有逆命题.

(2) 说明下列定理有否逆定理, 如果有逆定理的话, 要求给出证明.

一个角的平分线必定与它的邻补角的平分线互相垂直.

直角三角形斜边上的中线长等于斜边之半.

50 (1) 说明下列图形是不是轴对称图形, 如果是的话, 试指出有几条对称轴?

一条线段。

等边三角形。

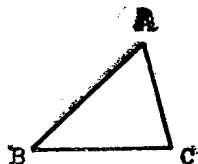
正方形。

圆。

(2) 作出 $\triangle ABC$ 关于下列指定轴的对称图形。

① 以边 AC 为轴的对称图形。

② 以底上的高 AD 为轴的对称图形。 图 20



51 $\angle BAC$ 内有一点 P , 求作一点 Q , 使 Q 到 $\angle BAC$ 两边距离相等, 并且 Q 到 $\angle BAC$ 的顶点 A 和点 P 的距离相等。

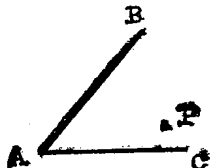


图 21



图 22

52 计划从县城 A 出发造一条笔直的公路, 使这条公路与另两个小城 B, C 的距离相等。试在设计图上作出这条公路(参见图 22), 请思考这样的公路有几条? 即可以有几个方案?

53 下图直线 AB, CD 为一条河的两岸, 且 $AB \parallel CD$, 又 P, Q 为隔河的两个市镇, 现要在河上架设一座垂直河岸的桥, 并使从 P 经过桥到 Q 的距离最短, 那末这座桥应架在何处, 请你设计并作出图来。

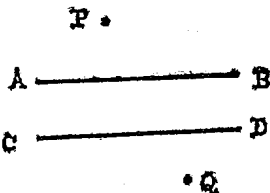


图 23

[探索] 你能证明你的作法是正确的吗?

54 如图 24, 已知直线 AB, CD

交于 O , $EF \parallel GH$, 你能否在图中找到这样的点, 使这点到 AB , CD 的距离相等, 而到 EF , GH 的距离也相等。

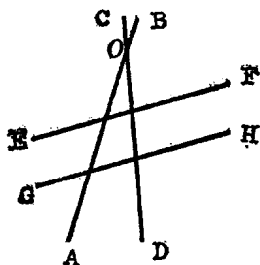


图 24

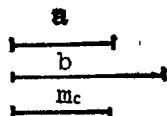


图 25

55 在直线 l 的两侧分别有一点 P 和 Q , 你能在 l 上找到一点 A , 使 l 为 $\angle PAQ$ 的平分线吗?

56 已知三角形二边 a , b 及第三边上的中线 m_c , 求作这个三角形(见图 25)。

四 四 边 形

57 设四边形 $ABCD$ 各边 AB , BC , CD , DA 的中点分别是 E , F , G , H , 顺次连接 E , F , G , H , 当 $EFGH$ 为下列图形时原四边形的两条对角线应满足什么条件?

- (1) $EFGH$ 是矩形。
- (2) $EFGH$ 是菱形。
- (3) $EFGH$ 是正方形。

58 从平行四边形的各个顶点向对角线作垂线, 顺次连接各个垂足则成一个平行四边形。

59 求证过平行四边形对角线的交点引互相垂直的两条直