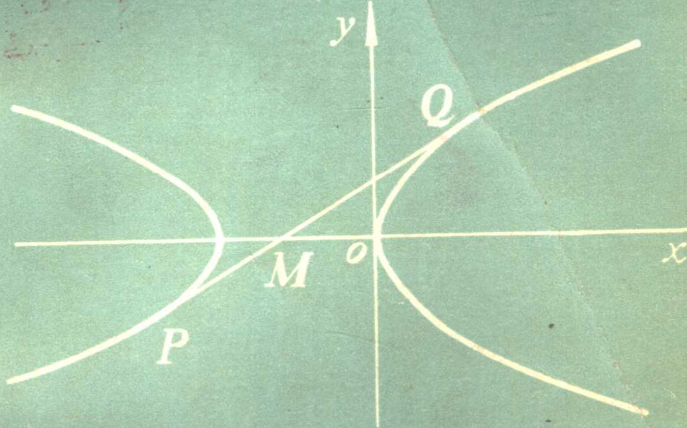
中学生课外读物



GUI JI YU FANG CHENG

轨迹与方程

（平面解析几何部分）

赵殿兴

河北人民出版社

中 学 生 课 外 读 物

轨 迹 与 方 程

(平面解析几何部分)

赵 殿 兴

河 北 人 民 出 版 社

一九八三年·石家庄

中学生课外读物

轨　迹　与　方　程

（平面解析几何部分）

赵殿兴

河北人民出版社出版（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　7 3/4 印张　155,000字　印数：1—20,000 1983年11月第1版

1983年11月第1次印刷　统一书号：7086·1129　定价：0.67 元

前　　言

中学平面解析几何课程所涉及的问题主要有两大类：一是已知曲线求它的方程，二是根据方程讨论曲线的几何性质。其中第一类问题由于已知条件的不同又可分为两种：一种是已知曲线的形状及确定它的条件，求曲线的方程（例如已知椭圆的焦点坐标及离心率，求椭圆的标准方程）．另一种是并不知道曲线的形状，只知道轨迹上的点所适合的条件，求曲线的方程（这种问题通常称为轨迹问题）。前者一般都可用待定系数法解决；而后者由于轨迹上的点所适合条件的千差万别，常使初学者在寻求轨迹方程时觉得无从下手。这本小册子不涉及前者，仅对求曲线的轨迹方程问题分类进行了探讨。

全书总结了求曲线轨迹方程问题的五种方法，即直接法、几何法．变换坐标法、单参数法及多参数法。在介绍各种方法之前，首先阐述了该种方法的一般步骤及适用范围，并精选了若干例题，详细加以说明。例题的安排由浅入深，类型比较全面。对于较复杂的例题，书中给出了思路分析及多种解法；此外，对于一些难点（如方程的同解变形、轨迹上特殊点及轨迹的范围等），也结合例题进行了深入的讨论。这样不仅可使读者对于轨迹问题能有较全面的认识，而且可以进一步掌握其中的规律，提高综合使用各种方法去分析解

决问题的能力。

应该指出，将轨迹问题进行这样的分类并不是绝对的，因为一个轨迹问题究竟应当使用哪种方法去解决并没有严格的界限，往往同一个问题有多种解法，甚至同一个解题过程中可能综合使用了几种方法。

建议读者在研究例题时，最好先自己独立解题，然后再与书中解法相对照，收益会较大。

侯自新同志、陈汉卿同志、何美玲同志先后审阅了本书的初稿，并提出了很多宝贵意见，李鸿义同志帮助绘制了书中的插图，尤其是何美玲同志在这本小册子的编写过程中给了很大的帮助，在此深表谢意。

本书可供中学生及具有初中以上文化程度的知识青年学习及参考，也可供中学数学教师教学参考。

编者

1982年12月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

一　平面解析几何内容提要

一、直角坐标系　曲线与方程

（一）基本公式

1．有向线段的数量公式

在数轴上，若 A、B 两点的坐标各为 x_1、x_2，则

$$AB = x_2 - x_1.$$

AB 的长记作　$|AB| = |x_2 - x_1|$。

2．两点间的距离公式

已知两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，

则

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

3．线段的定比分点公式

若点 $P(x, y)$ 把以 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 为端点的有向线段 P_1P_2 分成两部分 P_1P 与 PP_2，使得 $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda(\lambda \neq -1)$，则 P 点的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

① 当点 P 在 P_1、P_2 之间时，P 为内分点，这时 $\lambda > 0$．

② 当点 P 在线段 P_1P_2 之外时，P 为外分点，这时

$\lambda < 0$.

③ 当点 P 为线段 P_1P_2 的中点时，$\lambda = 1$，P 点坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

（二）曲线与方程

1．根据轨迹的条件，建立轨迹方程这个问题是本书的主要内容，详见以后各部分.

2．已知方程，画方程的曲线. 由方程画曲线，一般用描点法. 为了用较少的点画出较准确的曲线图形，要先对方程进行讨论.

① 讨论曲线的对称性，关于 x 轴、y 轴或原点对称.

② 讨论曲线的截距. 将 $y = 0$ 代入曲线方程，若 x 有实数解，则此解为曲线在 x 轴上的截距. 类似可求曲线在 y 轴上的截距.

③ 讨论曲线的范围. 由 $F(x, y) = 0$ 解出 $y = f(x)$，以确定 x 的取值范围；由 $F(x, y) = 0$，解出 $x = g(y)$，以确定 y 的取值范围.

④ 讨论曲线的渐近线. 当一条曲线远离原点无限伸展时，若它无限接近某条直线 l，则直线 l 叫做曲线的渐近线.

二、直线

（一）直线的倾角和斜率

1．直线的倾角　直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成最小的正角 α，叫做直线 l 的倾角. $l \parallel x$ 轴时，规定 $\alpha = 0$，

可见 $0 \leqslant \alpha < \pi$。

2．直线的斜率　直线的倾角的正切叫做直线的斜率。设过两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率为 k，则

① 当 $x_1 \neq x_2$ 时，　　$k = \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$；

② 当 $x_1 = x_2$ 时，直线与 y 轴平行，$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$，斜率不存在。

（二）直线方程的几种形式

名　称	已知条件	方程的形式
1．点斜式	$P(x_1, y_1)$，斜率 k	$y - y_1 = k(x - x_1)$
2．斜截式	斜率 k，y 轴截距 b。	$y = kx + b$
3．两点式	$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$	$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$
4．截距式	x 轴截距 a，y 轴截距 b，$(a \neq 0,\ b \neq 0)$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
5．一般式		$Ax + By + C = 0$ （A、B 不均为零）

直线的前四种形式均可化为一般式，一般式可化为斜截式（$B \neq 0$ 时）及截距式（A、B、C 均不为零时）。

两个独立条件确定一条直线.

（三）特殊位置的直线

1．$x=a$ 表示平行于 y 轴，在 x 轴截距为 a 的直线方程；$x=0$ 即 y 轴的方程.

2．$y=b$ 表示平行于 x 轴，在 y 轴截距为 b 的直线方程；$y=0$ 即 x 轴的方程.

3．$y=x$ 为第Ⅰ、Ⅲ象限角平分线的方程；

$y=-x$ 为第Ⅱ、Ⅳ象限角平分线的方程.

（四）两条直线平行、垂直的充要条件

直线 l_1：$y=k_1x+b_1$；

直线 l_2：$y=k_2x+b_2$.

1．直线 $l_1 /\!/ l_2$ 的充要条件是 $k_1=k_2$（包括两条直线都平行于 y 轴，即二斜率都不存在的情况）.

① $k_1=k_2$ 同时 $b_1\neq b_2$，$l_1 /\!/ l_2$ 但不重合；

② $k_1=k_2$ 同时 $b_1=b_2$，l_1 与 l_2 重合.

2．直线 $l_1\perp l_2$ 的充要条件是 $k_1\cdot k_2=-1$（特例一个斜率等于 0，另一个斜率不存在的情况）.

（五）二条直线的交角

直线 l_1:$y=k_1x+b_1$ 与 l_2:$y=k_2x+b_2$，若，l_1 与 l_2 相交，其交角 θ（指 l_1 逆时针方向旋转到 l_2 的角，且 l_1 不垂直于 l_2）.

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\quad(k_1\cdot k_2\neq-1).$$

若 θ 取锐角，则

$$\mathrm{tg}\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

（六）点到直线的距离

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

三、圆锥曲线

（一）圆

1．圆的两个方程

① 圆的标准方程

圆心在点 (a,b)，半径为 r 的圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0).$$

若圆心在原点，则方程为

$$x^2+y^2=r^2.$$

② 圆的一般方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

已知圆的一般方程求圆心及半径时，先将方程按 x、y 配方化为

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4},$$

于是可知：

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程的曲线是圆心在点

$\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$，半径

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

为$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$的圆；

当$D^2+E^2-4F=0$时，方程的曲线缩成一个点

$\left(-\frac{D}{2},\quad -\frac{E}{2}\right)$，叫做点圆。

当$D^2+E^2-4F<0$时，和方程对应的曲线不存在，也可叫做虚圆。

在圆的两个方程中，各有三个参数（a、b、r或D、E、F），故需三个独立条件来确定圆的方程。

2．直线与圆的位置关系

直线$l: Ax+By+C=0$与圆$c: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系，用圆心(a,b)到直线$Ax+By+C=0$的距离与r间的关系来判断：

若 $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}<r$，则直线$l$与圆$c$相交；

若 $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=r$，则直线$l$与圆$c$相切；

若 $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}>r$，则直线$l$与圆$c$相离。

也可用一元二次方程的判别式判断直线与圆的位置关系计算较繁。

3．圆的切线长

圆外一点$M(x_1,y_1)$到圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$的切线长

$$t=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+Dx_1+Ey_1+F}.$$

$$(x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F>0)$$

4．经过两圆交点的圆束方程

过圆 c_1：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

和圆 c_2：$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

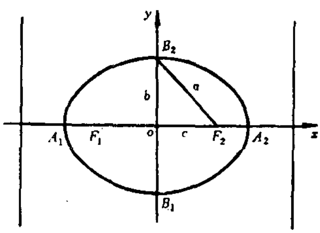
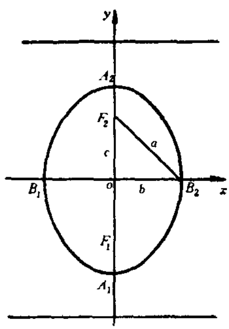
的交点的圆束方程是

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0 \quad (\lambda\neq-1).$$

若 $\lambda=-1$，则方程变为二元一次方程，是圆 c_1 与 c_2 根轴的方程。

（二）椭圆

1．椭圆的标准方程及几何性质

定 义	平面上到二定点 F_1、F_2 距离之和等于定长 $2a$ 的点的轨迹叫做椭圆。这二定点叫做椭圆的焦点。	
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\,(a>b>0)$
图 形		

a、b、c的几何意义及相互关系	长轴长 $2a$，短轴长 $2b$，焦距$2c$，$a^2=b^2+c^2$，离心率 $e=\frac{c}{a}$ $(0<e<1)$．	
中　心	$(0,\ 0)$	
对称性	关于 x 轴、y 轴、原点均对称．	
顶　点	$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$ $B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$	$A_1(0,-a)$，$A_2(0,a)$ $B_1(-b,0)$，$B_2(b,0)$
焦　点	$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$
准　线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
范　围	$-a\leqslant x\leqslant a$，　$-b\leqslant y\leqslant b$	$-b\leqslant x\leqslant b$，　$-a\leqslant y\leqslant a$

因椭圆的标准方程中有两个参数 a、b，故由两个独立的条件可确定中心在原点，焦点在坐标轴上的椭圆的方程．

2．中心不在原点，对称轴平行于坐标轴的椭圆的方程

在缺 xy 项的二元二次方程

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1}$$

中，若 A、C 同号且 $A\neq C$，经配方后可化为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\quad(a>b>0) \tag{2}$$

或
$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1(a>b>0). \tag{3}$$

它们都表示中心坐标是 $(x_0,\ y_0)$，对称轴平行于坐标轴

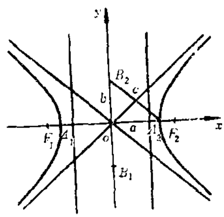
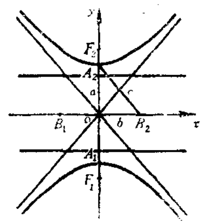
的椭圆．此时对称轴的方程是 $x=x_0$ 或 $y=y_0$。椭圆(2)的焦点在直线 $y=y_0$ 上，椭圆(3)的焦点在直线 $x=x_0$ 上。

(有时方程(1)的轨迹是点或虚椭圆)

方程(2)、(3)各有四个参数，故由四个独立条件可确定这种椭圆的方程。

(三) 双曲线

1．双曲线的标准方程及几何性质

定　义	平面上到二定点 F_1、F_2 的距离之差的绝对值等于定长 $2a$ 的点的轨迹叫做双曲线．这两个定点叫做双曲线的焦点．	
标准方程	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$	$-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\quad(a>0,b>0)$
图　形		
a、b、c的几何意义及相互关系	实轴长 $2a$，虚轴长 $2b$，焦距 $2c$， $c^2=a^2+b^2$，　$e=\dfrac{c}{a}$　$(e>1)$	
中　心	$(0,0)$	
对称性	关于 x 轴、y 轴、原点均对称。	
顶　点	$A_1(-a,0)$，　$A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$，　$A_2(0,a)$
焦　点	$F_1(-c,0)$，　$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$，　$F_2(0,c)$

准　线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
渐 近 线	$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$	$\frac{x}{b}\pm\frac{y}{a}=0$

求中心在原点，焦点在坐标轴上的双曲线的方程也需两个独立条件。

2．中心不在原点，对称轴平行于坐标轴的双曲线的方程

在缺xy项的二元二次方程

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1}$$

中，若A、C异号，经配方后可化为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0). \tag{2}$$

或
$$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1\ (a>0,b>0). \tag{3}$$

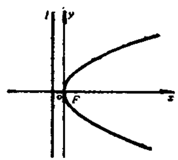
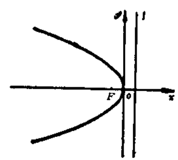
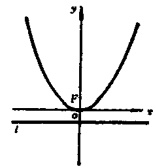
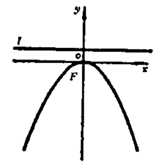
它们都表示中心坐标是（x_0，y_0），对称轴平行于坐标轴的双曲线。此时对称轴方程为$x=x_0$及$y=y_0$。双曲线(2)的焦点在直线$y=y_0$上，双曲线(3)的焦点在直线$x=x_0$上。

（若方程(1)的左端能分解成两个二元一次多项式的乘积，则(1)的轨迹是两条相交直线）.

方程(2)、(3)也需四个独立条件才能确定。

（四）抛物线

1．抛物线的标准方程及几何性质

定　义	平面上到一定点 F 与一定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线。定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线 l 叫做抛物线的准线。			
标　准　方　程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
图　形				
p 的几何意义	焦点到准线的距离			
顶　点	(0,0)			

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com