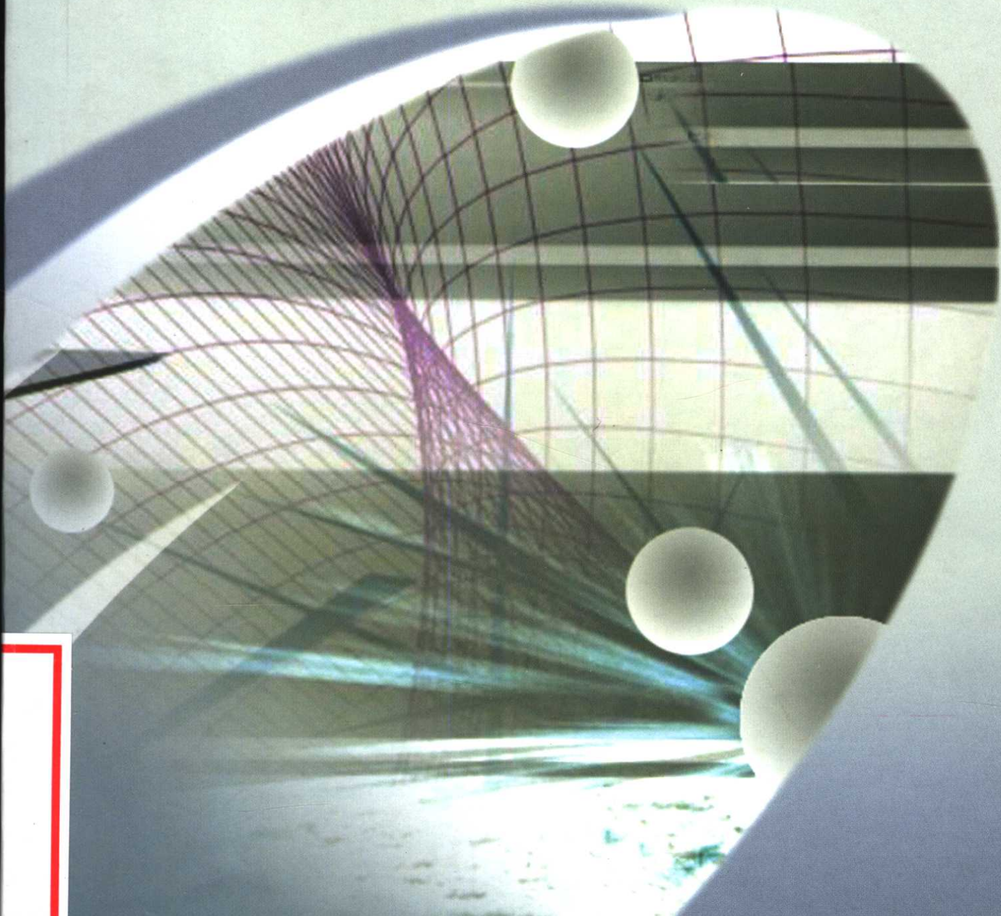
高等师范院校小学教育专业数学教材

现代数学概论

课程教材研究所
数学课程教材研究开发中心 著



人民教育出版社

高等师范院校小学教育专业数学教材

现代数学概论

课　程　教　材　研　究　所
数学课程教材研究开发中心

人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

现代数学概论/人民教育出版社中学数学室编 —北京：人民教育出版社，2003
高等师范院校小学教育专业数学教材
ISBN 7-107-16983-1

Ⅰ 现…

Ⅲ 数学－师范大学－教材
Ⅳ 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 061167 号

人民教育出版社出版发行
（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）
网址：http：//www pep com cn
北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销
2003 年 7 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
开本：890 毫米 × 1 240 毫米　1/32　印张：9 625
字数　244 000　印数：0 001～3 000 册
定价：13 90 元

内 容 简 介

本书介绍现代数学几个主要分支的形成过程、特点和发展趋势，包括这些分支的重要史例、基本概念、主要思想和方法 除绪论部分外，全书共分七讲，分别为集合论、非欧几何、拓扑学、抽象代数、模糊数学、分形几何、泛函分析 本书叙述简洁、内容丰富、通俗易懂 除了主要作为小学教育专业数学与科学方向的必修课教材外，它还可以作为中小学数学教师继续教育用书

人民教育出版社　　课程教材研究所

高等师范院校小学教育专业数学教材编写委员会

总主编：王　元

编委：（以姓氏笔画为序）

方明一　王长沛　王永俊　王　蕾　田宏忠　邓映蒲
刘凤翥　刘京莉　刘思清　刘效丽　刘意竹　孙玉宝
孙　圻　江汉勋　李同贤　纪运如　宋　兵　陈　耘
张　艾　林奇青　林炳生　全成檪　郇中丹　胡光锑
胡永建　周　辉　章建跃　高　荆　唐京伟　黄世立
曾文艺　曾庆黎　梅全雄　陶晓永　舒振文　梁楚材
董丽波　傅耀良　蔡俊亮　颜其鹏　魏　纶

策划：颜其鹏

本册主编：胡永建

编写人员：

宋　兵　王　蕾　邓映蒲　曾文艺　胡永建　曹　磊

特约审稿：

王敬庚　张英伯　李洪兴　黄海洋　陈公宁　郇中丹
黄世立　高雁群　马其骧　董丽波　王永喜

责任编辑：颜其鹏

总　　序

我国小学教师的职前培养，现在面临两个重大转变．第一，面临师范教育结构调整．小学教师的合格学历将由中等师范学校毕业提高到大专以上水平．根据《高等教育法》有关规定，招收高中阶段毕业生，实行三年专科教育和四年本科教育，是我国培养专科以上学历小学教师的主要形式．第二，基础教育，包括小学教育，正处于重大改革的初期．2001 年教育部颁发了《基础教育课程改革纲要(试行)》，大力推进基础教育课程改革，调整和改革基础教育的课程体系、结构、内容，构建符合素质教育要求的新基础教育课程体系，课程改革引发了教育观念、教学方法的变革．教育改革的新形势向小学教师的职前培养提出了全新的要求．

在这样的背景之下，2003 年 1 月，教育部师范教育司制订的《三年制小学教育专业课程方案 (试行)》正式颁布，针对教师专业化的国际趋向和小学教师的培养特点，提出了一整套培养高中起点三年制大专学历小学教师的课程设计方案，并着手组织编写小学教育专业教材．

长期以来一直承担着师范教育课程教材研究、开发和编写任务的人民教育出版社、课程教材研究所，根据我国高师小学教育专业课程教材改革的需要，组织了“高师小学教育专业数学课程设置与教材建设”课题组，邀请了中国科学院、北京大学、北京师范大学、首都师范大学、北京教科院、北京教育学院、华中师范大学等单位的专家学者和全国各地的资深师范教育专家和教师参加．本课题组对我国高等师范教育的新兴门类 —— 小学教育专业的数学课程设置和数学教材建设进行了大量的调查研究，对新世纪国际小学教师培养中数学课程体系的发展趋势进行了探讨．并总结了我国十多年

来各地高师小教大专数学课程、教材和教学改革试验的成功经验，从而构建了能反映我国小学教师培养体制改革的时代要求、建立小学教师合理数学知识结构和教育素养的数学课程教材体系，其中有些科目如现代数学概论、数学实践、常用数学软件、数学建模和数学文化等还填补了我国高师小学教育专业数学教材的空白．在此基础上编写了这套高等师范小学教学专业数学教科书．

这套教科书充分吸收了以往培养小学教师各级各类专用数学教材的优点，努力突出数学课程教材的时代性和前瞻性，贴近国际教育改革和我国基础教育课程改革的前沿，体现新的教育理念；力求体现高等小学教育的基础性、专业性和师范性，促进小学教师专业化水平的提高；既注重数学素养的提高，又注意体现人文精神，还具有可读性和可操作性；同时延续了中等师范教育教材注重教学技能和创新能力培养的良好传统．

这套小学教育专业数学教科书包括：必修课《大学数学》、《高等数学基础（上、下）》、《现代数学概论》、《数学实践》、《小学数学教学与研究》；选修课《数学文化》、《初等数论》、《常用数学软件》、《数学建模》、《小学数学竞赛指导》、《离散数学》和《数学思想方法》等十二科十三册教材（后两科 2004 年出版），供高师小学教育专业学生和小学教师继续教育学员使用．

本套书在研究、编写过程中得到了全国高等师范院校数学教育研究会小教培养工委的指导和帮助，还得到了大量一线教师的帮助和支持．

王元

2003年7月14日

编写说明

《现代数学概论》是为小学教育专业数学与科学方向的学生编写的必修课教材．通过本课程的学习，使小学教育专业数学与科学方向的学生了解现代数学一些主要分支的形成过程、特点和发展趋势，包括这些分支的重要史例、基本概念、主要思想和方法．

在本书的编写过程中，我们力求文字准确，叙述简洁，内容丰富，通俗易懂．介绍每个数学分支时，呈现方式尽可能灵活多样．所选例题要求具有代表性，而且易于理解和接受．对那些重要的但较难理解的概念和结论，通过实例说明或用简明的语言叙述了大意，以利于学生了解和掌握其基本内容．

除绪论部分外，本书共分七讲，分别为集合论、非欧几何、拓扑学、抽象代数、模糊数学、分形几何、泛函分析．每讲后面配备一定数量的思考题，还有相关的阅读材料和参考文献．全书计划授课时数为 72 学时．使用本书的教师可根据课时要求和学生的实际情况，在教学时对内容作适当的取舍．

本书由人民教育出版社组织编写，安徽铜陵学院宋兵编写第一讲、第二讲；江苏无锡师范学校王蕾编写第三讲；中国科学院系统所邓映蒲编写第四讲；北京师范大学数学系曾文艺、胡永建分别编写第五讲、第六讲；北京大学数学科学学院曹磊编写第七讲；绪论部分由宋兵、胡永建编写．全书最后由胡永建统稿和定稿．

北京师范大学数学系的诸多教授审阅了本书的修改稿，他们分别是王敬庚教授、张英伯教授、李洪兴教授、黄海洋教授、陈公宁教授、郇中丹教授．此外，重庆市第一师范学校的黄世立、广东东莞师范学校高雁群、黑龙江哈尔滨师范学校马其骧、董丽波、山西太原师范学校王永喜等参加了本书初稿的审阅工作．他们为提高本书的

质量付出了辛勤的劳动．在此，编者对各位专家表示真诚的谢意．

由于时间仓促且编者水平有限，书中错误和不妥之处一定不少．希望广大读者批评指正．

编　者

2003 年 6 月于北京

目　录

绪　论

数学是什么？古希腊毕达哥拉斯学派 (Pythagorean) 认为：数学是研究数量的科学；法国数学家笛卡尔 (R. Descartes) 认为：数学是研究顺序和度量的科学；恩格斯 (F. Engels) 说：数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学；法国布尔巴基 (N. Bourbaki) 学派认为：数学是研究抽象结构的学科；英国数学家、哲学家、数理逻辑学家怀特海 (A.N Whitehead) 指出：数学是研究模式的科学. 数学发展到今天，其研究对象已经超出了"数"和"形"的基本范畴. 一般说来，它可以包括客观世界中的任何形式和关系.

数学是一切自然科学的基础. 回顾科学发展的历史，天文学、物理学、力学的许多重大发展无不与数学的进步息息相关.

历史上一个著名的例子是太阳系最远的行星之一海王星的发现. 1846 年，法国青年天文学家勒威耶 (U.J.J. Le Verrier) 探测到天王星运动的不规律性. 他认为，这种运动的不规律性是由其它行星的引力造成的. 勒威耶经过一年多的计算得到了这颗未知行星的位置，并把这个结果告诉了德国柏林天文台助理员伽勒 (J.G. Galle). 加勒按勒威耶所指方位进行观察，果然找到了一颗在星图上没有的行星——海王星.

另一个著名的例子是物理学中电磁波的发现. 英国物理学家麦克斯韦 (J.C. Maxwell) 概括了通过实验建立起来的电磁现象规律，把这些规律表述成方程的形式. 他运用纯数学的方法从这些方程中推导出可能存在的电磁波，并认为这些电磁波应该以光速传播. 据此，他提出了光的电磁理论. 这一理论后来被全面地发展和验证了.

此外，牛顿 (I. Newton) 力学特别是万有引力定律依赖于微积分的发现. 牛顿还把自己最重要的著作命名为《自然哲学的数学原

理》，意指他发现新宇宙的方式是数学的思维方式. 爱因斯坦 (A Einstein) 利用黎曼几何与张量分析等将狭义相对论发展为广义相对论，而相对论对物理学的发展产生了重大影响.

现代科技的迅速发展，大大地加强了数学在自然科学中的地位. 数学中许多一度被认为没有价值的抽象的数学概念和理论，出人意料地在其他领域中找到了它们的原型与应用. 数学的一些高深理论与方法也正深入广泛地渗透到自然科学的各个研究领域中.

20 世纪最伟大的技术成就之一 —— 电子计算机的发明，为数学提供了一条通往科学技术和工程技术中每一个领域的通道. 电子计算机不仅改变了数学的实践方式，而且极大地扩展了数学的应用范围. 但是，计算机应用的日益广泛与威力的不断增强，越来越需要我们把更多的现实问题归结或表示为数学问题，如天气预报、飞行器设计、DNA 分析等. 天气预报的准确与否在很大程度上与人们为之设计的数学模型和算法的优劣有密切的关系.

计算机科学和数学是密不可分的两个学科. 计算机在它的结构设计、组织和信息的处理方式方法都与数学有着根本的联系. 许多著名的计算机科学家同时也是杰出的数学家，他们在提高计算机应用能力的过程中不断地研究和运用数学. 例如，电子计算机的主要发明者 —— 图灵 (A.M. Turing) 和冯 · 诺依曼 (J. von Neumann)，分别是英国数学家和美籍匈牙利数学家.

信息技术已经被广泛地应用于人类生活的方方面面. 然而信息技术中的图像处理、语音识别、数据压缩以及信号传输等技术都需要复杂的现代数学知识. 信息技术的发展已经使得数学在科学技术中的地位与作用发生了重大的变化. 当今数学不再只是间接地应用于众多技术领域，而是广泛地直接地应用于各种技术之中.

目前，数学的一个分支 —— 运筹学，已经广泛应用于诸如资源的有效调拨和最优化等各种工业问题和国防建设之中 控制论作为数学、计算机科学和工程学的一种交叉学科，已应用于自动导航控制系统、化学处理、汽车的防抱死制动器系统等问题中. 数学的另一个分支 —— 统计学，在医药的质量监测和生产、地震预报等领域具

有广泛的应用

我们需要指出的是，数学除了深入到自然科学各研究领域外，还广泛深入到社会科学的各个领域. 例如，在经济学中运用数学模型研究宏观经济和微观经济，运用数学手段进行市场调查与预测，运用数学理论进行风险分析和指导金融投资等.

在文化教育与基础教育领域，数学的地位更是特殊. 良好的数学训练对提高各级人才的素质有重要的影响，如它在提高人的空间想象力、逻辑思维能力、归纳概括能力、符号表示和变换能力、辩证分析能力和创造力等方面，是其他训练难以替代的. 发展数学科学，培养各种数学人才，不仅有重大的现实意义，而且也是保持我国各个重要领域可持续发展的战略需要.

一、现代数学的形成

数学的产生和发展经历了漫长的历史过程. 从古到今，整个数学的发展大体可以分为四个时期：

第一个时期是数学萌芽时期. 这是人类建立最基本的数学概念的时期. 人类从数数开始逐步建立了自然数的概念，掌握了简单的计算法则. 并认识了简单的几何图形.

第二个时期是初等数学时期 (或称常量数学时期) 这个时期从公元前 5 世纪开始，直到公元 17 世纪，在这个时期逐渐形成了初等数学的主要分支：算术、几何、代数、三角.

第三个时期是变量数学时期 (或称古典高等数学时期). 变量数学以解析几何的建立为起点，接着是微积分学的兴起. 这一时期还出现了概率论和射影几何等新的领域.

这一时期数学发展的特点，可以概括如下：

产生了几个影响很大的新领域，如解析几何、微积分、概率论、射影几何等. 每一个领域都使古希腊人的成就相形见绌.

代数化的趋势. 希腊数学的主体是几何学，代数的问题往往也要用几何方法去论证. 17 世纪的代数学比几何学占有更重要的位置. 它冲破希腊人的框框，进一步向符号代数转化，几何问题常常反过来用代数方法去解决. 此期间出现了大量新概念，如无理数、

虚数、瞬时变化率、导数、积分等等.

第四个时期是现代数学时期. 此时期是以其所有基础部门——代数、几何、分析的深刻变化为其特征的.

1829 年, 罗巴切夫斯基 (N.I. Lobatchevsky) 的文章《论几何基础》引发了几何学的革命. 自古希腊时代始, 欧氏几何一直被认为是客观物质空间惟一正确的理想模型, 是严格推理的典范. 16 世纪后的数学家在论证代数或分析结果的合理性时, 都试图归之为欧氏几何问题. 罗巴切夫斯基创立的非欧几何, 使几何的研究对象与应用范围迅速扩大, 为人们认识物质世界的空间形式提供了有力武器. 这项发现的技术细节是简单的, 但观念的变革是深刻的. 欧氏几何不再是神圣的, 数学家从此步入了创造新几何的时代.

1854 年, 德国数学家黎曼 (G F.B. Riemann) 继罗巴切夫斯基后在这个方向上完成了最重要的步骤. 他提出了几何学研究的"空间"有无限多的一般思想. 因此"空间"这一术语在数学中获得了新的更广泛的, 也是更专门的意义. 同时几何学方法本身也发生了很大的变化, 产生了各种新的"空间"和它们的"几何", 如罗巴切夫斯基空间、射影空间、各种不同维数的欧氏空间、黎曼空间和拓扑空间等.

1868 年, 贝尔特拉米 (E. Beltrami) 在伪球面上实现了罗巴切夫斯基几何, 在欧氏空间中给出直观上难以想象的非欧几何模型. 之后克莱因 (F. Klein) 和庞加莱 (H. Poincare) 分别给出各自的非欧几何模型, 说明非欧几何本身的相容性 (即无矛盾性) 与欧氏几何一致, 加速了人们接受非欧几何的进程.

在数学的另一个重要方向——分析, 也发生了深刻的变化. 柯西 (A.L. Cauchy) 是对分析严格化影响最大的学者. 1821 年他发表了《分析教程》, 除独立地得到波尔查诺 (B. Bolzano) 的基本结果外, 还用极限概念定义了连续函数的定积分. 这是建立分析严格理论的第一部重要著作. 此外, 狄利克雷 (P.G.L. Dirichlet) 按变量间对应的说法给出了现代意义下的函数定义.

随着分析工具的逐步完善, 数学家开始更自觉地在数学其他分

支使用它们. 除微分几何外, 解析数论也应运而生. 1837 年, 狄利克雷在证明算术序列包含无穷多素数时, 精心使用了级数理论, 这是近代解析数论最早的重要成果. 刘维尔 (J. Liouville) 则在 1844 年首次证明了超越数的存在, 引起数学家对寻找超越数和证明某些特殊的数为超越数的兴趣.

魏尔斯特拉斯 (K.T.W. Weierstrass) 开始了将分析奠基于算术的工作, 从 1842 年起在分析学中引入了一致收敛概念, 使级数理论更趋完善. 他还提出了现代通用的极限定义, 即用静态的方法 (不等式) 刻画变化过程. 他构造出处处不可微的连续函数实例, 告诫人们必须精细地处理分析学的对象, 并对实变函数论的兴起起了催化作用. 在复变函数论方面, 他提出了基于幂级数的解析开拓理论. 鉴于他为分析奠基的出色成就, 后被誉为 "现代分析之父".

同时, 在分析中发展出一系列新的分支, 如实变函数论, 函数逼近论, 微分方程定性理论, 变分学, 积分方程论, 泛函分析. 它们在现代数学中起着特殊重要的作用.

代数思想的革命发生在十九世纪 30~40 年代. 1830 年, 皮考克 (G. Peacok) 的《代数学》问世, 书中对代数运算的基本法则进行了探索性研究. 在这之前, 代数的符号运算实际仅是实数与复数运算的翻版. 皮科克试图建立一门更一般的代数, 它仅是符号及其满足的某些运算法则的科学. 他和德 · 摩根 (De Morgan) 等英国学者围绕这一目标的工作, 为代数结构观点的形成及代数公理化研究作了尝试, 因而皮科克被誉为 "代数中的欧几里得". 皮科克的目标虽然很有价值, 但方法过于含糊, 无法达到他的愿望.

代数中更深刻的思想来自于数学史上传奇式的人物伽罗瓦 (E. Galois). 在 1829~1832 年间, 他提出并论证了代数方程可用根式解的普遍判别准则, 阐明了群的正规子群及同构等重要概念, 从概念和方法上为最基本的一种代数结构 (群) 理论奠定了基础. 1854 年, 布尔 (G. Boole) 发表了《思维规律的研究》, 创立了符号逻辑代数, 这是使演绎推理形式化的有力工具. 布尔强调数学的本质不是探究对象的内容, 而是研究其形式, 因而数学不必限于讨论数和连续量

的问题，凡可由符号表示的一切事物都可纳入数学领域.

1855 年，凯莱 (A. Cayley) 在研究线性变换的不变量时，系统地提出矩阵概念及其运算法则. 在凯莱之后，矩阵理论不断完善，不仅成为数学中的锐利武器，还是描述和解决诸如量子力量等物理问题的有效武器.

现代代数的概念、方法和结果在分析、几何、物理都有重要的应用. 群论与线性代数是现代代数中内容丰富的两个分支，并在自己的发展中得到广泛的应用.

从十九世纪七十年代初到十九世纪末，数学经过十九世纪前七十年的发展，讨论数学基础问题的条件已趋成熟.

1872 年，魏尔斯特拉斯、康托尔 (G Cantor)、戴德金 (R.J.W. Dedekind) 和其他一些数学家，在确认有理数存在的前提下，通过不同途径给无理数下了精确定义. 又经过不少数学家的努力，最终由意大利学者皮亚诺 (G Peano) 完成了有理数理论. 1881 年，他在《算术原理新方法》中，给出了自然数的公理体系，由此可从逻辑上严格定义正整数、负数、分数、无理数. 另一方面，康托尔在探讨实数定义的同时，研究了傅里叶级数收敛点集的结构. 1874 年起他发表一系列有关无穷集合的文章，开创了集合论这一基础性的数学分支.

康托尔的成果具有高度独创性. 他把无穷集本身作为研究对象，通过一一对应方法，区分无穷集的大小，定义了集合的基数 (或称势)，引进序数以及一些属于拓扑学的基本概念. 他提出了著名的连续统假设. 康托尔的工作影响十分深远：第一，重新唤起人们对实无穷的研究，开拓了点集拓扑的研究领域；第二，使人们把函数的定义域建立在一般的点集之上，推动了测度论和泛函分析的研究；第三，由于集合论的内在矛盾，激发起对数理逻辑和数学基础的深入研究.

希尔伯特 (D. Hilbert) 的工作掀起了公理化的热潮：一方面，数学家为各数学分支建立公理体系；另一方面，通过略去否定或其它方式改变所论体系的公理来探索新体系、新问题.

组合拓扑学作为一门学科在十九世纪末登上了数学舞台. 庞加