高等数学讲义

下册

高等学校試用教材

高等数学講义

下册

樊映川等編

高等教育出版社

本書是同济大学数学教研組教师为了教学上的需要，根据中央高等教育部1954年頒布的高等工業学校高等数学教学大綱集体編写的。可供高等工業学校320—380學时类型的高等数学課程的教学用書。

本書分上、下两册。本册內容包括級数，傅里哀級数，多元函数的微分学和积分学，以及常微分方程等。

几年来，在教学实践中經过多次的修訂与补充。先后参加这項編写与修訂工作的有樊映川、張国隆、陈宗邦、侯希忠、方淑姝、王阳楷、王福保、王嘉善等。

高等数学講义

下册

樊映川等編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版业营业許可証出字第054号)

上海大东集成联合印刷厂印刷 新华书店发行

統一书号 13010·411 开本 850×1168 1/32 印张 9 8/16

字数 227,000 印数 233,001—273,000 定价 (4) ¥ 0.90

1953年4月第1版 1960年3月上海第12次印刷

下册目次

第二篇　数学分析(續)

第二篇 数学分析(續)

第九章 級数

I. 常数項級数

§9.1 無穷級数概念

設已給数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$, 則式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \quad (\text{或簡写为} \sum_{n=1}^{\infty} u_n) \tag{1}$$

叫做無穷級数,或就叫做級数,其中第 n 項 u_n 叫做級数的一般項。

作級数的前 n 項的和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

可得到另一个数列:

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots。$$

根据这个数列有無極限,我們可以引进無穷級数(1)的收斂或發散的概念。

定义 当 n 無限增大时,若数列 s_n 趋近于一个極限(有限的):

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n,$$

就叫無穷級数(1)收斂而其和为 s, 幷写成

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots;$$

若 s_n 沒有極限,就叫無穷級数發散。

当無穷級数收斂时,其前 n 項的和 s_n 是級数的和 s 的近似值,它們之間的差值

$$r_n=s-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

叫做級数的 n 項后的余項。用近似值 s_n 代替和 s 所产生的誤差是这个余項的絕对值,即誤差是 $|r_n|$。

最簡單的無穷級数之一是几何級数:

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots, \tag{2}$$

其中 r 叫做級数的公比。現在来考慮它的斂散性。

今若 $|r|\neq 1$, 則

$$s_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

当 $|r|<1$ 时,由于 $\frac{ar^n}{1-r}\to 0$,故 $s_n\to\frac{a}{1-r}$,这时几何級数收斂,其和为 $\frac{a}{1-r}$。当 $|r|>1$ 时,由于 $\frac{ar^n}{1-r}\to\infty$, 故 $s_n\to\infty$, 而几何級数發散。当 $r=1$ 时, $s_n=na\to\infty$, 而級数發散。当 $r=-1$ 时, 級数成为 $a-a+a-a+\cdots$, 显見 s_n 随 n 为奇数或为偶数而等于 a 或等于零,故極限不存在,从而級数發散。綜上結果,述之如次:**若几何級数之公比 r 的絕对值 $|r|<1$ 时, 則級数收斂, 若 $|r|\geq 1$ 时, 則級数發散。**

§9.2 無穷級数的基本性質　收斂的必要条件

1° 若級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

收斂于和 s, 則每項乘以一个不为零的常数 k 所得的級数

$$ku_1+ku_2+\cdots+ku_n+\cdots$$

收斂于和 ks。

因为級数的前 n 項的和是

$$\sigma_n=ku_1+ku_2+\cdots+ku_n=ks_n,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}ks_n=k\lim_{n\to\infty}s_n=ks.$$

又若 s_n 沒有極限，σ_n 也不可能有極限。所以級数的各項乘一不为零的常数后它的斂散性总是不变的。

2° 收斂級数可以逐項相加或逐項相減，就是說，若級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=s,$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots=\sigma,$$

則級数 $$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

必收斂于和 $s\pm\sigma$。

这是因为最后級数的前 n 項的和

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)=$$

$$=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)=$$

$$=s_n\pm\sigma_n\to s\pm\sigma。$$

3° 在級数前面加上有限項或去掉有限項，不会影响級数的斂散性，不过在收斂情形时，一般說来級数的和要改变的。

为确定起見，我們考虑下面兩个級数

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots,\quad u_3+u_4+u_5+u_6+\cdots,$$

第二个是由第一个去掉前兩項所得到的。仍用 s_n 表示第一个級数的前 n 項的和，用 σ_n 表示第二个級数的前 n 項的和，显然有

$$\sigma_{n-2}=s_n-(u_1+u_2),\quad s_n=\sigma_{n-2}+(u_1+u_2)。$$

由此可見，当 $n\to\infty$ 时，σ_{n-2}，s_n 或同时具有極限 σ，s 或同时沒有極限；在有極限时，其間关系为 $\sigma=s-(u_1+u_2)$。

4° 收斂級数加括弧后所成的級数仍然收斂于原来的和 s[①]。

---

① 收斂級数去括弧后所成的級数就不一定仍是收斂。例如級数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

显然收斂于零，但級数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是發散的。至于所論若是正項級数，則無論加括弧或去括弧都不会影响它的斂散性，这是由于單調增加数列的任何子数列必与原来数列同时趋近于無穷或同时趋近于同一極限的緣故。

設級数

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\cdots=s,$$

按照某一規律加括弧后所成的級数为

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots。$$

用 σ_m 表示第二个級数的前 m 項的和,用 s_n 表示相当于 σ_m 的第一个級数的前 n 項的和,这就是說,

$$\sigma_1=s_2,\quad \sigma_2=s_5,\cdots,\ \sigma_m=s_n,\cdots。$$

由此可見,当 $m\to\infty$ 时,$n\to\infty$,于是

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}s_n=s。$$

順便注意到若加括弧后所成的級数發散,則原来級数也必發散,因若收斂,那末根据刚才所証,加括弧后的級数就应收斂了。

5° 收斂性的必要条件　若級数(1)收斂,則当 n 無限增大时,它的一般項 u_n 必趋近于零:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0。$$

因为

$$u_n=s_n-s_{n-1},$$

所以

$$\lim u_n=\lim(s_n-s_{n-1})=$$
$$=\lim s_n-\lim s_{n-1}=s-s=0。$$

由此可知:若級数的一般項不趋近于零,則級数發散。但一般項趋近于零并不是收斂的充分条件,有些級数縦然一般項趋近于零,仍然是發散的。例如調和級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,\tag{2}$$

它的一般項 $u_n=\frac{1}{n}\to 0$,我們不难証明它是發散的。順序把級数(2)的一項,兩項,四項,八項,…括在一起:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots,$$

这个加括弧的級数的各項显然大于級数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

对应的各項，而后一級数前 n 項的和等于 $n\cdot\frac{1}{2}$，故發散于 $+\infty$，于是加括弧后的級数也發散于 $+\infty$ 而調和級数也必發散于 $+\infty$。

§9.3 正項級数 收斂性的充分判定法

在前兩节中所講的都是一般級数，現在我們只討論正項級数(各項 $u_n\geqslant 0$)，这个情形特別重要，以后可以看到許多其他級数收斂性的問題会导向于正項級数收斂性的問題。在下面我們先講基本的比較判定法，然后再由此推出在实用上很方便的比値法、根値法和积分法。

設級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

是一个正項級数，显然它的前 n 項的和 s_n 成一个單調增加数列：$s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant\cdots$。这时可能有兩种情形，当 n 無限增大时，或者 s_n 也無限增大，或者 s_n 恒小于某一定数 M。在第一种情形級数發散于 $+\infty$；在第二种情形，級数收斂于和 $s\leqslant M$ (§2.7 極限存在准則 II)。

基于这个原理，我們取另一正項級数

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \tag{2}$$

把它与級数(1)作比較。

若級数(2)收斂于和 σ，并且 $u_n\leqslant v_n(n=1, 2, \cdots)$，則

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n<\sigma,$$

即 s_n 恒小于这个定数 σ，故可肯定級数(1)收斂。

若級数(2)發散于 $+\infty$，并且 $u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，則

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\geqslant v_1+v_2+\cdots+v_n=\sigma_n\to+\infty,$$

即級数(1)也發散。

因此，我們証得

比較判定法 若級数(2)收斂，并且 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，則級数(1)也收斂；若級数(2)發散，并且 $u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，則級数(1)也發散。

注意到級数的斂散性不因各項乘一不为零的常数 k 而改变(前节基本性質 1°)，我們立得

推論 若級数(2)收斂，并且 $u_n\leqslant kv_n(n=1,2,\cdots)$，則級数(1)也收斂；若級数(2)發散，并且 $u_n\geqslant kv_n(k>0,\ n=1,2,\cdots)$，則級数(1)也發散。

例 作为比較判定法的一个例子，我們来討論 p-級数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots,\quad \text{常数 } p>0。\tag{3}$$

現在要分别証明当 $p\leqslant1$ 时級数發散，$p>1$ 时級数收斂。

設 $p\leqslant1$。这时級数的每一項不小于調和級数的对应項：$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$；但調和級数發散，故当 $p\leqslant1$ 时級数(3)發散。

例如級数 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$ 發散。

設 $p>1$。順序把級数(3)的一項，兩項，四項，八項，…括在一起

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots,$$

它的各項显然小于級数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots=$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots$$

对应的各項；而后一級数是几何級数，其公比 $r=\frac{1}{2^{p-1}}<1$，故收斂。于是，当 $p>1$ 时，級数(3)也收斂。

例如級数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ 收斂。

取一几何級数作为級数(2)来与已給級数比較，我們能得到在实用上極方便的兩个充分判定法：

比値判定法(达朗貝尔 d'Alembert) **設正項級数(1)之后項与前項的比値的極限等于 ρ：**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

則当 $\rho<1$ 时級数收斂，$\rho>1\left(\text{或}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\right)$ 时級数發散，$\rho=1$ 时級数可能收斂或可能發散。

我們分別討論之如下：

(i)設 $\rho<1$。选定一个小的正数 ε 使得 $\rho+\varepsilon=r<1$。根据極限性質，当 n 适当大时，比值 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 就含在区間 $(\rho-\varepsilon,\ \rho+\varepsilon)$ 内。这就是說，对于自某个 m 开始后所有的 n，我們有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r。$$

因此

$$u_{m+1}<ru_m,\ u_{m+2}<ru_{m+1}<r^2u_m,\ u_{m+3}<ru_{m+2}<r^3u_m,\ \cdots$$

而級数
$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots$$
的各項就小于公比为 $r<1$ 的收斂几何級数

$$ru_m+r^2u_m+r^3u_m+\cdots$$

之对应項，所以它是收斂的。由于已給級数(1)比它只多了前面 m 項，因此也是收斂的了(前节基本性質 3°)。

(ii)設 $\rho>1$。选定一个小的正数 ε 使得 $\rho-\varepsilon>1$。根据極限性質，当 $n\geqslant m$ 时，就有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon>1,$$

也就是 $$u_{n+1}>u_n。$$

因之，当 $n\geqslant m$ 时，級数的一般項 u_n 是增大着的，当 n 無限增大时它不可能趋近于零，所以級数發散(前节基本性質 5°)。$\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\right.$ 时，証明亦同$\left.\right)$。

(iii)設 $\rho=1$。我們注意到当 n 無限增大时，若比值 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 是由大于或等于 1 而趋近于極限 $\rho=1$ 时，显然一般項 u_n 不能趋近于零，故級数發散。一般而論，在 $\rho=1$ 的情形下，比值判定法不能解决級数的斂散性的問題。例如 p-級数(3)当 $n\to\infty$ 时均有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\to1,$$

但我們知道 $p\leqslant1$ 时級数發散，而 $p>1$ 时級数收斂。因此只根据 $\rho=1$ 不能断定級数是收斂或是發散。

根值判定法(柯西)　設正項級数(1)的一般項 u_n 的 n 次根的極限等于 ρ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho,$$

則当 $\rho<1$ 时級数收斂，$\rho>1$ (或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty$) 时級数發散 $\rho=1$ 时級数可能收斂或可能發散。

这个判定法的証法基本上与比值判定法的相同。

(i)設 $\rho<1$。对于自某个 m 开始后所有的 n 我們有

$$\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon=r<1。$$

因此 $$u_m<r^m,\quad u_{m+1}<r^{m+1},\quad u_{m+2}<r^{m+2},\ \cdots,$$

而級数 $$u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$$

的各項就小于公比 $r<1$ 的收斂几何級数

$$r^m+r^{m+1}+r^{m+2}+\cdots$$

之对应項。于是,級数(1)收斂。

(ii)設 $\rho>1$。这时 $u_n\geqslant 1, u_{n+1}\geqslant 1, \cdots$, (1)的一般項不能趋近于零,故必發散。

(iii)仍可取 p-級数为例。$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p\to 1$(因为当 $x\to+\infty$ 时未定式 $x^{\frac{1}{x}}\to 1$, 故 $n^{\frac{1}{n}}\to 1$)①, 这就說明了 $\rho=1$ 时級数可能收斂也可能發散。

在上面兩个判定法的証明中,我們看到如果級数自某項起,适合不等式:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r<1 \quad 或 \quad \sqrt[n]{u_n}<r<1,$$

則不論 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 或 $\sqrt[n]{u_n}$ 是否趋向極限,級数总是收斂的,因为級数从某項起各項均小于收斂几何級数的对应項。

如果上面的不等式自某 n 項起成立,則我們取級数开始 n 項的和 s_n 作为和 s 的近似值时所产生的誤差 r_n 可估計如下:在用比值法时,为

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots<ru_n+r^2u_n+\cdots=\frac{ru_n}{1-r};$$

在用根值法时,为

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots<r^{n+1}+r^{n+2}+\cdots=\frac{r^{n+1}}{1-r}。$$

例 1. 研究下面級数的收斂性并估計誤差:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}+\cdots。$$

---

① 另一直接証法如下:考慮数列 $x_n=\sqrt[n]{n}-1$, 当 $n>1$ 时 $x_n>0$。由此

$$n=(1+x_n)^n=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x_n^2+\cdots+x_n^n。$$

除右边的第三項外不計其他各正項,就得不等式

$$n>\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x_n^2 \quad 或 \quad x_n^2<\frac{2n}{n(n-1)}=\frac{2}{n-1}。$$

从而 $$x_n\to 0, \quad 即 \quad \sqrt[n]{n}\to 1。$$

解 第n項为

$$u_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)},$$

而
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot n}:\frac{1}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)}=\frac{1}{n}\to0。$$

这时 $\rho=0<1$，故級数收斂。

誤差 r_n 为

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots=$$
$$=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right)<$$
$$<\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=\frac{1}{(n-1)\cdot(n-1)!}。$$

例 2. 研究級数

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot2}{10^2}+\frac{1\cdot2\cdot3}{10^3}+\cdots。$$

解
$$u_n=\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot n}{10^n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n+1)}{10^{n+1}}:\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot n}{10^n}=\frac{n+1}{10}\to\infty。$$

这时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$，故級数發散。

例 3. 研究級数

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots。$$

解
$$u_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot2n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n-1)\cdot2n}{(2n+1)(2n+2)}\to1。$$

这时 $\rho=1$，比值判定法失效。但显然可見級数的各項小于收斂級数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

之对应項，根据比較法它是收斂的。

例 4. 研究級数的收斂性并估計誤差：

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots。$$

解
$$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0,$$

故級数收斂。誤差 r_n 为

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\frac{1}{(n+3)^{n+3}}+\cdots<$$

$$<\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)^{n+2}}+\frac{1}{(n+1)^{n+3}}+\cdots=\frac{1}{n(n+1)^n}。$$

积分判定法(柯西) 設級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

的各項可以看作是区間 $[1, \infty)$ 上正的減函数 $f(x)$ (連續的) 对应于 $x=1, 2, \cdots, n, \cdots$ 的各个值：

$$u_1=f(1), \quad u_2=f(2), \cdots, \quad u_n=f(n), \cdots,$$

則广义积分
$$I=\int_1^\infty f(x)dx$$

收斂或發散时級数也隨之收斂或發散。

考察曲綫 $y=f(x)$ 与縱綫 $x=1, x=n$ 及 x 軸所圍成的面积：

$$I_n=\int_1^n f(x)dx。$$

由圖 9.1 可見这个面积小于 $(n-1)$ 个高出于曲綫上面的矩形之和 $u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}=s_n-u_n$，而大于低入于曲綫下面的 $(n-1)$ 个矩形之和 $u_2+u_3+\cdots+u_n=s_n-u_1$，故有

$$s_n-u_1<I_n<s_n-u_n。$$

由此，即得不等式

$$s_n<I_n+u_1 \quad 及 \quad s_n>I_n。$$

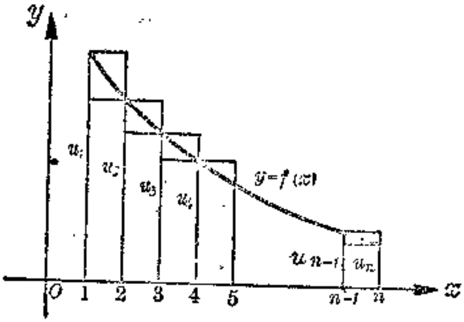

图 9.1

先設 $I=\lim I_n$ 存在。根据前一不等式，則單調增加数列 $s_n<I+u_1$ 是有界的，因之它必具有極限而級数(1)收斂。次設 $\lim I_n=\infty$。根据后一不等式，則極限 $\lim s_n=\infty$ 不存在而級数(1)發散。証明完畢。

下面举一个例子說明有时用比值法或根值法所不能解决的問題却很容易用积分法来解决。

例 5. 用柯西积分法研究 p-級数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \quad (p>0)$$

的斂散性。

解 这时 $u_n=\frac{1}{n^p}$，可取 $f(x)=\frac{1}{x^p}$。广义积分

$$I=\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p}=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{b\to\infty}\left[\dfrac{1}{1-p}\,x^{1-p}\right]_1^b, & 若\quad p\neq 1;\\ \lim\limits_{b\to\infty}\Big[\ln x\Big]_1^b, & 若\quad p=1。\end{cases}$$

不难看出，若 $p\leqslant 1$ 积分發散，若 $p>1$ 积分收斂而等于 $\frac{1}{p-1}$。于是