

高等数学讲义

下册

高等学校試用教材



高等数学讲义
下 册

樊映川等編

高等教育出版社



本書是同濟大學數學教研組教師為了教學上的需要，根據中央高等教育部 1954 年頒布的高等工業學校高等數學教學大綱編寫的。可供高等工業學校 320—380 學時類型的高等數學課程的教學用書。

本書分上、下兩冊。本書內容包括微分，微分變換，多元函數的微分學和積分學，以及常微分方程等。

幾年來，在教學實踐中經過多次的修訂與補充。先後參加這項編寫與修訂工作的有樊映川、張國隆、阮振邦、侯希忠、方淑珍、王昭楨、王福保、王嘉善等。

高等數學講義

下 冊

樊映川等編

高等教育出版社出版 北京宣武門內大街 27 號
(北京市書刊出版業登記證出字第 054 號)

上海大東集成聯合印刷廠印刷 新华書店發行

統一書號 13010·411 訂本 850/1168 1/32 印張 9 8/16
字數 227,000 印數 233,001 273,000 定價 (4) 冊 0.90
1953 年 4 月第 1 版 1960 年 3 月上海第 12 次印刷

下册目次

第二篇 数学分析(續)

第九章 級数	441	第十章 福里哀級数	493
I 常數項級数	441	§ 10.1 三角級数 三角函数的 正交性	488
§ 9.1 無窮級数概念	441	§ 10.2 尤拉-福里哀公式	499
§ 9.2 無窮級数的基本性質 收敛的必要条件	442	§ 10.3 福里哀級数	500
§ 9.3 正項級数 收敛性的充 分判定法	445	§ 10.4 偶函数及奇函数的福里 哀級数	504
§ 9.4 任意項級数 绝对收敛	453	§ 10.5 展开函数为正弦或余弦 级数	509
§ 9.5 广义积分的收敛性 Γ -函数	453	§ 10.6 任意区間	511
II 函数項級数	464	§ 10.7 平方中值誤差	514
§ 9.6 函数項級数的一般概念	464	第十一章 多元函数的微分法及 其应用	518
§ 9.7 均匀收敛及均匀收敛級 数的基本性質	465	§ 11.1 一般概念	518
III 幂級数	470	§ 11.2 二元函数的極限及連續 性	520
§ 9.8 幂級数的收敛半径	470	§ 11.3 偏导数	524
§ 9.9 幂級数的运算	474	§ 11.4 全增量及全微分	527
§ 9.10 幂級数的微分法与积 分法	475	§ 11.5 方向导数 梯度	532
§ 9.11 戴勞級数	478	§ 11.6 复合函数的微分法	537
§ 9.12 初等函数的展开式	480	§ 11.7 隐函数及其微分法	540
§ 9.13 戴勞级数应用于近似計 算	485	§ 11.8 空間曲綫的切綫及法平 面 弧長	547
§ 9.14 司得林公式	489	§ 11.9 曲面的切平面及法綫	550
§ 9.15 复数	492	§ 11.10 高阶偏导数	553
§ 9.16 复变量的指数函数 尤 拉公式	495	§ 11.11 二元函数的戴勞公式	556

§ 11.12 多元函数的極值	559	§ 12.19 貝塞爾方程	637
§ 11.13 条件極值——拉格朗日 乘数法則	564	第十三章 重积分	643
第十二章 微分方程	568	§ 13.1 体积問題 二重积分	643
I 一阶微分方程	568	§ 13.2 二重积分的簡單性質 中值定理	646
§ 12.1 一般概念	568	§ 13.3 积分号下的积分与微分	648
§ 12.2 可分离变量的微分方程	571	§ 13.4 二重积分計算法	654
§ 12.3 齐次微分方程	573	§ 13.5 利用極坐标計算二重积 分	660
§ 12.4 綫性方程及柏努利方程	576	§ 13.6 补充討論	664
§ 12.5 全微分方程 积分因子	579	§ 13.7 三重积分及其計算法	670
§ 12.6 方向場 尤拉-柯西近 似法	583	§ 13.8 柱面坐标和球面坐标	674
§ 12.7 未解出導数的簡單的一 阶方程	585	§ 13.9 曲綫坐标 三重积分換 元法	678
§ 12.8 包絡 克萊洛方程及其 奇解	588	§ 13.10 广义积分	684
II 高阶微分方程	592	§ 13.11 曲面的面积	687
§ 12.9 一般概念	592	§ 13.12 在靜力学上一些应用	693
§ 12.10 高阶微分方程的几个特 殊类型	594	第十四章 曲綫积分及曲面积分	697
III 綫性微分方程	599	§ 14.1 功的問題 曲綫积分的 概念	697
§ 12.11 綫性微分方程的一般理 論	599	§ 14.2 曲綫积分的基本性質及 計算法	700
§ 12.12 常系数齐次綫性方程	607	§ 14.3 格林公式	707
§ 12.13 常系数非齐次綫性方程	612	§ 14.4 曲綫积分与路綫無关的 条件	711
§ 12.14 尤拉方程	618	§ 14.5 曲面积分及其計算法	715
§ 12.15 振动現象	620	§ 14.6 奧斯特罗格拉特斯基公 式	720
§ 12.16 微分方程組	624	§ 14.7 斯托克斯公式	725
IV 級数解法	632	§ 14.8 向量分析基礎	731
§ 12.17 能用幂級数求解实例	632		
§ 12.18 勒讓德方程	634		

第二篇 数学分析(續)

第九章 級数

I. 常数項級数

§ 9.1 無穷級数概念

設已給数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, 則式子

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (\text{或簡写为 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n) \quad (1)$$

叫做無穷級数, 也就叫做級数, 其中第 n 項 u_n 叫做級数的一般項。

作級数的前 n 項的和

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

可得到另一个数列:

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

根据这个数列有無極限, 我們可以引进無穷級数 (1) 的收敛或發散的概念。

定义 当 n 无限增大时, 若数列 s_n 趋近于一个極限(有限的):

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

就叫無穷級数 (1) 收敛而其和为 s , 并写成

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots;$$

若 s_n 沒有極限, 就叫無穷級数發散。

当無穷級数收敛时, 其前 n 項的和 s_n 是級数的和 s 的近似值, 它們之間的差值

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

叫做級数的 n 項后的余項。用近似值 s_n 代替和 s 所产生的誤差是这个余項的絕對值, 即誤差是 $|r_n|$ 。

最簡單的無窮級数之一是几何級数:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots, \quad (2)$$

其中 r 叫做級数的公比。現在来考虑它的斂散性。

今若 $|r| \neq 1$, 則

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}.$$

当 $|r| < 1$ 时, 由于 $\frac{ar^n}{1 - r} \rightarrow 0$, 故 $s_n \rightarrow \frac{a}{1 - r}$, 这时几何級数收斂, 其和为 $\frac{a}{1 - r}$ 。当 $|r| > 1$ 时, 由于 $\frac{ar^n}{1 - r} \rightarrow \infty$, 故 $s_n \rightarrow \infty$, 而几何級数發散。当 $r = 1$ 时, $s_n = na \rightarrow \infty$, 而級数發散。当 $r = -1$ 时, 級数成为 $a - a + a - a + \cdots$, 显見 s_n 随 n 为奇数或为偶数而等于 a 或等于零, 故極限不存在, 从而級数發散。綜上結果, 述之如次: 若几何級数之公比 r 的絕對值 $|r| < 1$ 时, 則級数收斂, 若 $|r| \geq 1$ 时, 則級数發散。

§ 9.2 無窮級数的基本性質 收斂的必要条件

1° 若級数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

收斂于和 s , 則每項乘以一个不为零的常数 k 所得的級数

$$ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n + \cdots$$

收斂于和 ks 。

因为級数的前 n 項的和是

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = ks_n,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ks_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = ks.$$

又若 s_n 沒有極限, σ_n 也不可能有限。所以級數的各項乘一不為零的常數後它的斂散性總是不變的。

2° 收斂級數可以逐項相加或逐項相減, 就是說, 若級數

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = s,$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots = \sigma,$$

則級數 $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$

必收斂于和 $s \pm \sigma$ 。

這是因為最後級數的前 n 項的和

$$\begin{aligned} & (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) = \\ & = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = \\ & = s_n \pm \sigma_n \rightarrow s \pm \sigma. \end{aligned}$$

8° 在級數前面加上有限項或去掉有限項, 不會影響級數的斂散性, 不過在收斂情形時, 一般說來級數的和要改變的。

為確定起見, 我們考慮下面兩個級數

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots, \quad u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \cdots,$$

第二個是由第一個去掉前兩項所得到的。仍用 s_n 表示第一個級數的前 n 項的和, 用 σ_n 表示第二個級數的前 n 項的和, 顯然有

$$\sigma_{n-2} = s_n - (u_1 + u_2), \quad s_n = \sigma_{n-2} + (u_1 + u_2).$$

由此可見, 當 $n \rightarrow \infty$ 時, σ_{n-2} , s_n 或同時具有極限 σ , s 或同時沒有極限; 在有極限時, 其間關係為 $\sigma = s - (u_1 + u_2)$ 。

4° 收斂級數加括弧後所成的級數仍然收斂于原來的和 s ①。

① 收斂級數去括弧後所成的級數就不一定仍是收斂。例如級數

$$(1-1) + (1-1) + \cdots$$

顯然收斂于零, 但級數

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是發散的。至于所論若是正項級數, 則無論加括弧或去括弧都不會影響它的斂散性, 這是由于單調增加數列的任何子數列必與原來數列同時趨近于無窮或同時趨近于同一極限的緣故。

設級数

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots = s,$$

按照某一規律加括弧后所成的級数为

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \cdots$$

用 σ_m 表示第二个級数的前 m 項的和, 用 s_n 表示相当于 σ_m 的第一个級数的前 n 項的和, 这就是說,

$$\sigma_1 = s_2, \quad \sigma_2 = s_5, \quad \cdots, \quad \sigma_m = s_n, \quad \cdots$$

由此可見, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $n \rightarrow \infty$, 于是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

順便注意到若加括弧后所成的級数發散, 則原来級数也必發散, 因若收敛, 那末根据剛才所証, 加括弧后的級数就应收敛了。

5° 收敛性的必要条件 若級数(1)收敛, 則当 n 無限增大时, 它的一般項 u_n 必趋近于零:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

因为

$$u_n = s_n - s_{n-1},$$

所以

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim (s_n - s_{n-1}) = \\ &= \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0. \end{aligned}$$

由此可知: 若級数的一般項不趋近于零, 則級数發散。但一般項趋近于零并不是收敛的充分条件, 有些級数縱然一般項趋近于零, 仍然是發散的。例如調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \quad (2)$$

它的一般項 $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, 我們不难証明它是發散的。順序把級数(2)的一項, 兩項, 四項, 八項, ... 括在一起:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots,$$

这个加括弧的級數的各項显然大于級數

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

对应的各項,而后一級數前 n 項的和等于 $n \cdot \frac{1}{2}$, 故發散于 $+\infty$, 于是加括弧后的級數也發散于 $+\infty$ 而調和級數也必發散于 $+\infty$ 。

§ 9.3 正項級數 收斂性的充分判定法

在前兩节中所講的都是一般級數,現在我們只討論正項級數 (各項 $u_n \geq 0$), 这个情形特別重要,以后可以看到許多其他級數收斂性的問題会导向于正項級數收斂性的問題。在下面我們先講基本的比較判定法,然后再由此推出在實用上很方便的比值法、根值法和積分法。

設級數

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

是一個正項級數,顯然它的前 n 項的和 s_n 成一個單調增加數列: $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$ 。這時可能有兩種情形,當 n 無限增大時,或者 s_n 也無限增大,或者 s_n 恒小于某一定數 M 。在第一种情形級數發散于 $+\infty$; 在第二种情形,級數收斂于和 $s \leq M$ (§ 2.7 極限存在准則 II)。

基于这个原理,我們取另一正項級數

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \quad (2)$$

把它与級數 (1) 作比較。

若級數 (2) 收斂于和 σ , 并且 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \cdots)$, 則

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq v_1 + v_2 + \cdots + v_n < \sigma,$$

即 s_n 恒小于这个定數 σ , 故可肯定級數 (1) 收斂。

若級數(2)發散于 $+\infty$, 并且 $u_n \geq v_n (n=1, 2, \dots)$, 則

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \geq v_1 + v_2 + \dots + v_n = \sigma_n \rightarrow +\infty,$$

即級數(1)也發散。

因此, 我們證得

比較判定法 若級數(2)收斂, 并且 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$, 則級數(1)也收斂; 若級數(2)發散, 并且 $u_n \geq v_n (n=1, 2, \dots)$, 則級數(1)也發散。

注意到級數的斂散性不因各項乘一不為零的常數 k 而改變(前節基本性質1°), 我們立得

推論 若級數(2)收斂, 并且 $u_n \leq k v_n (n=1, 2, \dots)$, 則級數(1)也收斂; 若級數(2)發散, 并且 $u_n \geq k v_n (k > 0, n=1, 2, \dots)$, 則級數(1)也發散。

例 作為比較判定法的一個例子, 我們來討論 p -級數

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots, \quad \text{常數 } p > 0. \quad (3)$$

現在要分別證明當 $p \leq 1$ 時級數發散, $p > 1$ 時級數收斂。

設 $p \leq 1$ 。這時級數的每一項不小於調和級數的對應項:
 $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$; 但調和級數發散, 故當 $p \leq 1$ 時級數(3)發散。

例如級數 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$ 發散。

設 $p > 1$ 。順序把級數(3)的一項, 兩項, 四項, 八項, ... 括在一起

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{7^p} \right) + \left(\frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{15^p} \right) + \dots,$$

它的各項顯然小於級數

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{4^p} \right) + \left(\frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} \right) + \dots = \\ & = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

对应的各項；而后一級數是幾何級數，其公比 $r = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ ，故收斂。于是，当 $p > 1$ 时，級數 (3) 也收斂。

例如級數 $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$ 收斂。

取一幾何級數作為級數 (2) 来与已給級數比較，我們能得到在实用上極方便的兩個充分判定法：

比值判定法 (达朗貝尔 d'Alembert) 設正項級數 (1) 之后項与前項的比值的極限等于 ρ ：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

則当 $\rho < 1$ 时級數收斂， $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$) 时級數發散， $\rho = 1$ 时級數可能收斂或可能發散。

我們分別討論之如下：

(i) 設 $\rho < 1$ 。选定一个小的正数 ε 使得 $\rho + \varepsilon = r < 1$ 。根据極限性質，当 n 适当大时，比值 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 就含在区間 $(\rho - \varepsilon, \rho + \varepsilon)$ 內。这就是說，对于自某个 m 开始后所有的 n ，我們有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = r.$$

因此

$$u_{m+1} < r u_m, u_{m+2} < r u_{m+1} < r^2 u_m, u_{m+3} < r u_{m+2} < r^3 u_m, \dots$$

而級數 $u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots$

的各項就小于公比为 $r < 1$ 的收斂幾何級數

$$r u_m + r^2 u_m + r^3 u_m + \cdots$$

之对应項，所以它是收斂的。由于已給級數 (1) 比它只多了前面 m 項，因此也是收斂的了 (前节基本性質 3°)。

(ii) 設 $\rho > 1$ 。选定一个小的正数 ε 使得 $\rho - \varepsilon > 1$ 。根据極限性質，当 $n \geq m$ 时，就有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \delta > 1,$$

也就是

$$u_{n+1} > u_n.$$

因之, 当 $n \geq m$ 时, 級数的一般項 u_n 是增大着的, 当 n 無限增大时它不可能趋近于零, 所以級数發散(前节基本性質 5°)。

($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ 时, 証明亦同)。

(iii) 設 $\rho = 1$ 。我們注意到当 n 無限增大时, 若比值 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 是由大于或等于 1 而趋近于極限 $\rho = 1$ 时, 显然一般項 u_n 不能趋近于零, 故級数發散。一般而論, 在 $\rho = 1$ 的情形下, 比值判定法不能解决級数的敛散性的問題。例如 p -級数 (3) 当 $n \rightarrow \infty$ 时均有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^p \rightarrow 1,$$

但我們知道 $p \leq 1$ 时級数發散, 而 $p > 1$ 时級数收斂。因此只根据 $\rho = 1$ 不能断定級数是收斂或是發散。

根值判定法(柯西) 設正項級数 (1) 的一般項 u_n 的 n 次根的極限等于 ρ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

則当 $\rho < 1$ 时級数收斂, $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \infty$) 时級数發散, $\rho = 1$ 时級数可能收斂或可能發散。

这个判定法的証法基本上与比值判定法的相同。

(i) 設 $\rho < 1$ 。对于自某个 m 开始后所有的 n 我們有

$$\sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon = r < 1.$$

因此

$$u_m < r^m, \quad u_{m+1} < r^{m+1}, \quad u_{m+2} < r^{m+2}, \quad \dots,$$

而級数

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \dots$$

的各项就小于公比 $r < 1$ 的收斂几何級数

$$r^m + r^{m+1} + r^{m+2} + \dots$$

之对应項。于是,級數(1)收斂。

(ii) 設 $\rho > 1$ 。这时 $u_n \geq 1, u_{n+1} \geq 1, \dots$, (1) 的一般項不能趋近于零, 故必發散。

(iii) 仍可取 p -級數为例。 $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p \rightarrow 1$ (因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时未定式 $x^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$, 故 $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$)^①, 这就說明了 $\rho = 1$ 时級數可能收斂也可能發散。

在上面两个判定法的証明中, 我們看到如果級數自某項起, 適合不等式:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1 \quad \text{或} \quad \sqrt[n]{u_n} < r < 1,$$

則不論 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 或 $\sqrt[n]{u_n}$ 是否趋向極限, 級數总是收斂的, 因为級數从某項起各項均小于收斂几何級數的对应項。

如果上面的不等式自某 n 項起成立, 則我們取級數开始 n 項的和 s_n 作为和 s 的近似值时所产生的誤差 r_n 可估計如下: 在用比值法时, 为

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots < r u_n + r^2 u_n + \dots = \frac{r u_n}{1-r};$$

在用根值法时, 为

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots < r^{n+1} + r^{n+2} + \dots = \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

例 1. 研究下面級數的收斂性并估計誤差:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots (n-1)} + \dots.$$

① 另一直接証法如下: 考虑数列 $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$, 当 $n > 1$ 时 $x_n > 0$ 。由此

$$n = (1+x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x_n^2 + \dots + x_n^n.$$

除右边的第三項外不計其他各正項, 就得不等式

$$n > \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x_n^2 \quad \text{或} \quad x_n^2 < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}.$$

从而

$$x_n \rightarrow 0, \quad \text{即} \quad \sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$$

解 第 n 項为

$$u_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)},$$

而
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

这时 $\rho = 0 < 1$, 故級数收敛。

誤差 r_n 为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \\ &= \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \right) < \\ &< \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots \right) = \frac{1}{(n-1) \cdot (n-1)!}. \end{aligned}$$

例 2. 研究級数

$$\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \cdots.$$

解

$$u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{10^n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n+1)}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{n+1}{10} \rightarrow \infty.$$

这时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, 故級数发散。

例 3. 研究級数

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots.$$

解

$$u_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1) \cdot 2n}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow 1.$$

这时 $\rho = 1$, 比值判定法失效。但显然可見級数的各項小于收敛級数

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

之对应項, 根据比較法它是收斂的。

例 4. 研究級數的收斂性并估計誤差:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

解

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

故級數收斂。誤差 r_n 为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)^{n+2}} + \frac{1}{(n+3)^{n+3}} + \cdots < \\ & < \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+1)^{n+2}} + \frac{1}{(n+1)^{n+3}} + \cdots = \frac{1}{n(n+1)^n}. \end{aligned}$$

积分判定法(柯西) 設級數

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

的各項可以看作是區間 $[1, \infty)$ 上正的減函數 $f(x)$ (連續的) 对应于 $x=1, 2, \dots, n, \dots$ 的各个值:

$$u_1 = f(1), \quad u_2 = f(2), \quad \dots, \quad u_n = f(n), \quad \dots,$$

則广义积分

$$I = \int_1^{\infty} f(x) dx$$

收斂或發散时級數也隨之收斂或發散。

考察曲綫 $y=f(x)$ 与縱綫 $x=1, x=n$ 及 x 軸所圍成的面积:

$$I_n = \int_1^n f(x) dx.$$

由圖 9.1 可見这个面积小于 $(n-1)$ 个高出于曲綫上面的矩形之和 $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = s_n - u_n$, 而大于低入于曲綫下面的 $(n-1)$ 个矩形之和 $u_2 + u_3 + \cdots + u_n = s_n - u_1$, 故有

$$s_n - u_1 < I_n < s_n - u_n.$$

由此, 即得不等式

$$s_n < I_n + u_1 \quad \text{及} \quad s_n > I_n.$$

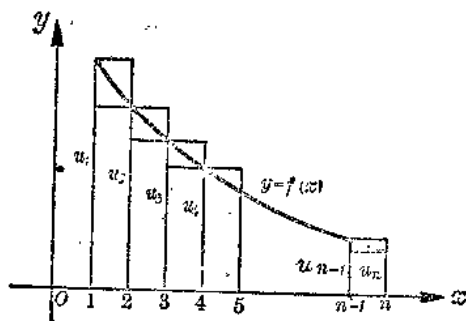


图 9.1

先设 $I = \lim I_n$ 存在。根据前一不等式, 则单调增加数列 $s_n < I + u_1$ 是有界的, 因之它必具有极限而级数 (1) 收敛。次设 $\lim I_n = \infty$ 。根据后一不等式, 则极限 $\lim s_n = \infty$ 不存在而级数 (1) 发散。证明完毕。

下面举一个例子说明有时用比值法或根值法所不能解决的问题却很容易用积分法来解决。

例 5. 用柯西积分法研究 p -级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \quad (p > 0)$$

的敛散性。

解 这时 $u_n = \frac{1}{n^p}$, 可取 $f(x) = \frac{1}{x^p}$ 。广义积分

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^b, & \text{若 } p \neq 1; \\ \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b, & \text{若 } p = 1. \end{cases}$$

不难看出, 若 $p \leq 1$ 积分发散, 若 $p > 1$ 积分收敛而等于 $\frac{1}{p-1}$ 。于是