新编数学习题集系列丛书

Mathematics

平面解析几何习题集

杨文茂 李全英 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

新编数学习题集系列丛书

Mathematics

平面解析几何习题集

▶ 杨文茂 李全英 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

内 容 简 介

本书为平面解析几何课程的教学参考书。全书有五章共包括800多道习题。各章或各节之首有内容提要，列举了有关的基本概念、公式与定理。所有题目都给出了答案，对具有代表性的典型题目或较难题目给出了解法要点或多种解法。

本书可供大专院校与空间解析几何课程有关的师生使用，也可供中学与平面解析几何课程有关的师生使用。

图书在版编目(CIP)数据

平面解析几何习题集/杨文茂，李全英编著. — 武汉：武汉大学出版社，2005.1

新编数学习题集系列丛书

ISBN 7-307-04403-X

Ⅰ.平…　Ⅱ.①杨…　②李…　Ⅲ.平面几何：解析几何—高等学校—习题　Ⅳ.O182.1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第129249号

责任编辑：夏炽元　　责任校对：程小宜　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)

印刷：武汉凯威印务有限公司

开本：787×980　1/16　印张：10.625　字数：192千字

版次：2005年1月第1版　　2005年1月第1次印刷

ISBN 7-307-04403-X/O·314　　定价：16.00元

前　　言

本习题集为平面解析几何课程的教学参考书。目前这门课程只在中学开设，在高等学校一般尚未单独另开此课，但是在大学里学习空间解析几何课程时，按教学大纲的要求，通常还要在中学所学平面解析几何基础上另外补充或增加一些属于平面解析几何基本理论方面的内容。例如各种坐标变换(直角坐标、仿射坐标与极坐标之间的坐标变换)，各种点变换(正交变换与仿射变换)，还有平面上一般二次曲线的分类定理，等等。本书超出中学平面解析几何的范围，包括了上述所说作为平面解析几何基本理论方面的习题。全书有五章，共包括800多道习题。所有习题按章节组合，每章(节)前面有内容提要，扼要介绍基本概念、公式与定理。各节中题目有属于熟悉与掌握基本概念与公式的；有属于灵活运用理论和技巧的，均由浅入深地编排。书中附有习题答案，并对具有一定代表性或较难习题给出解法要点或提示，有的还给出多种解法。本书可供与空间解析几何课程有关的大学教师与学生使用，也可供中学与平面解析几何课程有关的师生使用。

书中收集的习题，除编者讲授这门课程与习题课时选用的题目外，还参考了国内外这方面有关的教材与习题集。

编写本书的过程中，作者们得到了教研室内及其他同行们多方面的帮助；还有使用过本书原稿的教师们提出过不少有益的意见；在做习题答案时，不少学生也给我们提供过帮助。在此一并向他们表示衷心的感谢。由于我们水平有限，书中难免有不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

编　　者

于仰恩大学

2004年12月

目　录

第一章　平面上点的坐标与曲线的方程

内容提要

(一)平面上点的坐标

(1)直角坐标系

平面直角坐标系又叫做**笛卡儿直角坐标系**或**正交坐标系**.它是由具有同一个单位长度的两根互相垂直的数轴组成.设一个轴是 Ox 轴,另一个是 Oy 轴,它们之交点 O 叫做**坐标原点**.Ox 与 Oy 轴分别叫做**横轴与纵轴**,从 Ox 轴正向绕原点 O 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角到达 Oy 轴的正向可能是逆时针或顺时针方向两种情况(见图 1),因此有逆时针、顺时针的两种旋转方向的平面直角坐标系,我们多采用前一种.

在坐标系中点 $E_1(1,0)$,$E_2(0,1)$分别叫做 Ox,Oy 轴上的**单位点**,矢量(或向量)$\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$ 分别叫做 Ox,Oy 轴上的**单位矢量**或**基矢量**.坐标系记为 Oxy 或$[O;E_1,E_2]$或$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$.

轴 Oy 分全平面为两个半平面;其中位于轴 Ox 正向方面的叫做**右半平面**,而另一个叫做**左半平面**.同样轴 Ox 也分全平面为两个半平面;其中位于轴 Oy 正向方面的叫做**上半平面**,而另一个叫做**下半平面**.

两坐标轴共同分平面为四个**象限**,按下列法则编序:同时在右半平面和上半平面的叫做**第一象限**,同时在左半平面和上半平面的叫做**第二象限**,同时在左半平面和下半平面的叫做**第三象限**,同时在右半平面和下半平面的叫做**第四象限**(图 1).

在取定了坐标系后,平面上任意一点 P 可用两个有顺序的实数来确定它的位置.从点 P 分别向 Ox 轴、Oy 轴引垂线得垂足 Q,R,叫做点 P 的**射影点**、点 Q 在 Ox 轴上有坐标 x,点 R 在 Oy 轴上有坐标 y,实数对(x,y)称为**点 P 的坐**

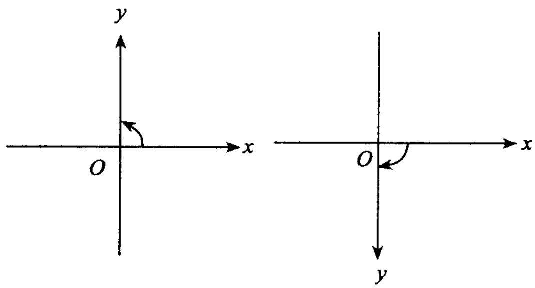

图 1

标，x 叫做横坐标，y 叫做纵坐标，记为 $P(x,y)$. 原点的坐标为 $O(0,0)$.

设平面上两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则它们之间的距离

$$d(P_1,P_2)=P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1}$$

设点 P 是线段 P_1P_2 或其延长线上的一个内分点或外分点，记定比

$$\lambda=\begin{cases}\dfrac{P_1P}{PP_2}(\text{当 } P \text{ 为内分点}),\\ -\dfrac{P_1P}{PP_2}(\text{当 } P \text{ 为外分点}).\end{cases} \tag{2}$$

则点 P 的坐标可按定比分点公式求得

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\end{cases} \tag{3}$$

式中 $\lambda\neq-1$. 如果 $\lambda=1$，即点 P 为 P_1P_2 之中点，则有

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{4}$$

顶点为

$$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3) \tag{5}$$

的$\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}. \tag{6}$$

$$\sigma_{\triangle}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix} \tag{7}$$

称为$\triangle ABC$的**有向面积**,其绝对值为三角形的面积:$S_{\triangle}=|\sigma_{\triangle}|$,而$\sigma_{\triangle}>0$表示$\triangle ABC$按$A,B,C$的依次旋转方向与坐标系的旋转方向相同(同为逆时针或同为顺时针方向);当$\sigma_{\triangle}<0$表示$\triangle ABC$的旋转方向与坐标系的旋转方向相反,或者说与$\triangle OE_1E_2$旋转方向相同或相反.

三点共线的必要充分条件是

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

(2)仿射坐标系与斜角坐标系

平面**仿射坐标系**又叫做一般**笛卡儿坐标系**或**平行坐标系**.它是由两根相交的数轴组成.这里并不要求两根轴具有相同的单位长度,也不要求它们互相垂直.设一个轴是Ox轴,另一个是Oy轴,它们的交点O叫做**坐标原点**.Ox轴与Oy轴分别叫做**横轴**与**纵轴**.

在Ox,Oy轴上分别取定指明方向的矢量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$(它们本身不一定是单位长度).从$Ox$轴正向到$Oy$轴正向的旋转角$\omega$叫做**坐标角**(图2).坐标系记为$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$.

设平面上任一点M,通过它分别作Ox轴与Oy轴的平行线,交坐标轴于点M_x与M_y,设

$$\overrightarrow{OM_x}=x\boldsymbol{e}_1,\quad \overrightarrow{OM_y}=y\boldsymbol{e}_2, \tag{9}$$

称x,y为点M的**仿射坐标**,记为$M(x,y)$.

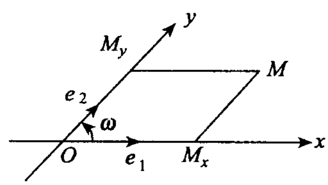

图2

原点坐标为$O(0,0)$.坐标为$E_1(1,0)$与$E_2(0,1)$的点分别叫做Ox与Oy轴上的**单位点**,$E(1,1)$为平面上的**单位点**.

若$\boldsymbol{e}_1$与$\boldsymbol{e}_2$为单位矢量($|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$),当$\omega\neq\frac{\pi}{2}$称此仿射坐标系为**斜角坐标系**,当$\omega=\frac{\pi}{2}$为直角坐标系.

在仿射坐标系中,关于定比分点的公式(3)与(4)及三点共线的公式(8)都成立.但有关两点间距离及三角形面积的公式比直角坐标系中相应公式要复杂些.

设关于仿射坐标系的基本矢量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$有

$$|e_1|^2 = g_{11}, \quad |e_2|^2 = g_{22}, \quad |e_1| \cdot |e_2| \cos\omega = g_{12}. \tag{10}$$

那么两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$之间的距离

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{g_{11}(x_2 - x_1)^2 + 2g_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + g_{22}(y_2 - y_1)^2}. \tag{11}$$

(10)中的系数满足

$$g_{11} > 0, \quad g_{22} > 0, \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0.$$

记矢量

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (X, Y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

则矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长为

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{g_{11}X^2 + 2g_{12}XY + g_{22}Y^2}. \tag{12}$$

两个矢量 $\boldsymbol{a} = (X_1, Y_1)$, $\boldsymbol{b} = (X_2, Y_2)$之间的夹角 φ 由下式确定:

$$\cos\varphi = \frac{g_{11}X_1X_2 + g_{12}(X_1Y_2 + X_2Y_1) + g_{22}Y_1Y_2}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}, \tag{13}$$

$$\sin\varphi = \frac{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}. \tag{14}$$

特别地,在斜角坐标系中公式(11)~(14)分别为

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega + (y_2 - y_1)^2},$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{X^2 + 2XY\cos\omega + Y^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + (X_1Y_2 + X_2Y_1)\cos\omega + Y_1Y_2}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|},$$

$$\sin\varphi = \frac{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \sin\omega}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.$$

(3)极坐标系

平面**极坐标系**是由一个称为**极点**的某点 O,和从极点引出的称为**极轴**的某 Ox 轴组成。此外,还要给出测量长度与角度的单位,并且还要规定平面上绕极点 O 的旋转正向(一般取逆时针方向为正).

对于平面上的任一点 M,可以用一个表示长度与一个表示角度的数来确定它的位置,这两个数为(图 3)

$$\rho = |OM|, \quad \theta = \angle xOM. \tag{15}$$

数 ρ 称为**极径**,θ 称为**幅角或极角**,这两个数称为点 M 的**极坐标**,记为 $M(\rho, \theta)$.

如果规定

$$\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \tag{16}$$

那么平面上任一点(除极点 O 外)有惟一一组极坐标与它对应. 而极点 O 的 $\rho=0$, θ 不定.

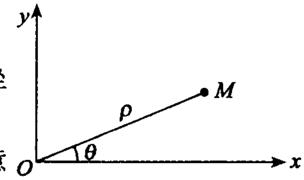

图 3

若对极坐标取消(16)的限制,让 ρ,θ 可取任意值,显然有如下结果:下列坐标代表同一点.

$$A(\rho,\theta) = A(\rho,\theta+2k\pi), \tag{17}$$

$$A(\rho,\theta) = A(-\rho,\theta+(2k+1)\pi), \tag{18}$$

式中 $k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

关于极轴对称的两点坐标为

$$A(\rho,\theta) \text{ 与 } B(\rho,-\theta); \tag{19}$$

关于过极点与极轴垂直的直线对称的两点坐标为

$$A(\rho,\theta) \text{ 与 } B(\rho,\pi-\theta); \tag{20}$$

关于极点对称的两点坐标为

$$A(\rho,\theta) \text{ 与 } B(-\rho,\theta) \text{ 或 } A(\rho,\theta) \text{ 与 } B(\rho,\theta\pm\pi). \tag{21}$$

在同一平面上同时建立直角坐标系与极坐标系时,我们规定:(1)测量长度的单位对两系选得一致;(2)测量角度旋转正向规定得一致. 例如,从横轴正向按反时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$角就得到纵轴,那么极角也是按反时针方向旋转就是正的. 在这种规定下,如果选取直角坐标系原点重合于极坐标系极点,横轴重合于极轴(图 3),则任意点 A 的两种坐标(x,y)与(ρ,θ)的变换公式为

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta \tag{22}$$

或

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{23}$$

用极坐标表示的两点 $P_1(\rho_1,\theta_1)$, $P_2(\rho_2,\theta_2)$之间的距离为

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)}. \tag{24}$$

(4)坐标变换

我们讨论在平面上同一个点在不同坐标系中坐标之间的变换公式. 主要有下列几种情况.

1)直角坐标系与直角坐标系

直角坐标系在坐标轴平行移动时的坐标变换公式是

$$x = x' + a_1, \quad y = y' + a_2. \tag{25}$$

在这里(x,y)和(x',y')分别是平面上同一个点 P 在旧坐标系 Oxy 和新坐标系 $O'x'y'$中的坐标，而(a_1,a_2)是新坐标系 $O'x'y'$的原点 O'在旧坐标系 Oxy 中的坐标.

直角坐标系在**坐标轴旋转 θ 角时的坐标变换公式**是

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases} \tag{26}$$

式中(x,y)和(x',y')分别是同一个点 P 在旧坐标系 Oxy 和新坐标系 $Ox'y'$中的坐标.一般情况:设新坐标系 $O'x'y'$的原点 O'在旧坐标系 Oxy 中的坐标为(a_1,a_2),旧坐标系的 Ox 轴旋转到新坐标系的 $O'x'$轴的角为 θ,这样**一般坐标变换**的变换公式是

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + a_1, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + a_2. \end{cases} \tag{27}$$

在这里(x,y)和(x',y')分别是平面上同一个点 P 在旧坐标系 Oxy 和新坐标系 $O'x'y'$中的坐标.

2)仿射坐标系与仿射坐标系

设仿射坐标系$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$与$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$(分别称为旧坐标系与新坐标系),且新原点 O'与新基矢量$\boldsymbol{e}_1'$,$\boldsymbol{e}_2'$在旧系中的坐标为

$$O'(a_1,a_2), \quad \boldsymbol{e}_1' = (a_{11},a_{21}), \quad \boldsymbol{e}_2' = (a_{12},a_{22}), \tag{28}$$

那么同一点 P 在这两系中的坐标(x,y)与(x',y')之间的变换公式为

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_1, \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_2. \end{cases} \tag{29}$$

3)斜角坐标系与斜角坐标系

设有坐标角为 ω 的斜角坐标系 Oxy(旧系),另有坐标角为 ω'的斜角坐标系 $O'x'y'$(新系),设 O'在旧系中坐标为 $O'(a_1,a_2)$,从 Ox 轴旋转到 $O'x'$轴的角为 θ,那么同一点 P 在这两系中的坐标(x,y)与(x',y')之间的变换公式为

$$\begin{cases} x - a_1 = [x'\sin(\omega - \theta) + y'\sin(\omega - \omega' - \theta)]/\sin\omega, \\ y - a_2 = [x'\sin\theta + y'\sin(\theta + \omega')]/\sin\omega. \end{cases} \tag{30}$$

当 $\omega = \omega' = \frac{\pi}{2}$,公式(30)变为(27),即成为两个直角坐标系的相应变换公式.

(二)平面上曲线的方程

平面上给定坐标系后,曲线上动点的运动规律反映为它的坐标 x,y 之间的一定的函数关系

$$y = f(x) \quad \text{或} \quad x = g(y). \tag{31}$$

这里要求:1)凡曲线 C 上的点 M 的坐标(x,y)都满足方程(31);2)凡满足方程(31)的(x,y),所代表的点 $M(x,y)$都在曲线 C 上,称方程(31)为曲线 C 的**一般方程**,而曲线 C 为方程(31)的**图形**.

有时方程(31)也可以用方程

$$F(x,y) = 0 \tag{32}$$

来代替,(32)称为曲线的**隐方程**,而(31)又称为**显方程**,都是曲线的一般方程.

如果已知两条曲线

$$C_1 : F_1(x,y) = 0, \quad C_2 : F_2(x,y) = 0, \tag{33}$$

那么它们的交点就是方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases} \tag{34}$$

的公共解,每一组解(x,y)确定一个交点.

如果方程(32)只有若干组实解:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_k,y_k),$$

则称(32)表示**退化的曲线**(即由这些点构成的"曲线").如果方程(32)只有复解,无实解,则称(32)表示**虚的曲线**(或虚图形与无轨迹).

如果方程组(34)无实解,则两曲线无实的交点,但它们有复解时,也称两曲线交于虚点.当方程组(34)无解时,那么两曲线不相交.一般来说,两曲线交于虚点,也叫做不相交.

如果在直角坐标系中曲线 C 上的动点坐标 x,y 表示为变量 t 的函数

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)(a \leqslant t \leqslant b), \tag{35}$$

或是在极坐标系中,曲线 C 上的动点坐标 ρ,θ 表示为变量 t 的函数

$$\rho = \varphi(t), \theta = \psi(t)(a \leqslant t \leqslant b), \tag{36}$$

(35)与(36)都称为曲线的**参数方程**,t 称为**参数**或**参变数**.

为了使(35)或(36)所代表的点与曲线 C 上的点有一一对应的关系,还需要规定两点,这就是:1)对于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的每一个 t 值,用(35)所确定的点$(\varphi(t),\psi(t))$都在曲线 C 上;2)曲线 C 上任一点 M 的坐标 x,y 都可用区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的某一个 t 值代入(35)得到.这里的区间也可以是开的或半开半闭的.在参数方程(35)中若消去参数 t,得到关于变数 x,y 的方程(31)或(32),即一般方程.

解析几何学常常面临这样两方面的课题:1)给出了曲线 C 上动点的几何条件(或称为**轨迹条件**),导出它的方程;2)已知曲线的方程,运用解析的方法研究

曲线的几何性质.

已知曲线的方程,可以算出曲线上一系列点的坐标,在图上将它们逐点描出,再连成光滑的曲线,从而得到曲线的图形,这种方法称为**描迹法**.

用解析法证明几何命题时常有下列几个步骤:

1)适当选取坐标系(直角坐标系、仿射坐标系或极坐标系等),使已知的几何条件用坐标表示时,取最简单的形式.

2)将已知的几何条件转化为用坐标表示的各种数量关系(等式或不等式).

3)将待证的几何结论转化为用坐标表示的各种数量关系.

4)利用各种代数知识,通过推理演算与变形整理,从已知的数量关系推导出待证的数量关系.

1.1 直角坐标系

一、习题

1. 在 Oxy 坐标系的平面上,描绘出下列各点:$A(3,2)$,$B(2,-1)$,$C(-5,2)$,$D(-3,-2)$,$E\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$.

2. 求下列各点在横轴上的射影点的坐标:
$A(2,-3)$,$B(3,-1)$,$C(-5,1)$,$D(-3,-2)$.

3. 求下列各点在纵轴上的射影点的坐标:
$A(-3,2)$,$B(-5,1)$,$C(3,-2)$,$D(-1,1)$.

4. 求与下列各点关于 Ox 轴对称的点的坐标:
(1)$A(2,3)$;　(2)$B(-1,-1)$;
(3)$C(-3,-5)$;　(4)$D(a,b)$.

5. 求与下列各点关于 Oy 轴对称的点的坐标:
(1)$A(-1,2)$;　(2)$B(-2,-2)$;
(3)$C(-2,5)$;　(4)$D(a,b)$.

6. 求与下列各点关于坐标原点对称的点的坐标:
(1)$A(3,3)$;　(2)$B(-2,1)$;
(3)$C(-2,5)$;　(4)$D(a,b)$.

7. 求与下列各点关于第一象限角的平分线对称的点的坐标:
(1)$A(2,3)$;　(2)$B(5,-2)$;
(3)$C(-3,4)$;　(4)$D(a,b)$.

8. 求与下列各点关于第二象限角的平分线对称的点的坐标：

(1)$A(3,5)$；　(2)$B(-4,3)$；

(3)$C(7,-2)$；　(4)$D(a,b)$.

9. 边长为 a 的正方形，取坐标原点于它的中心处，Ox 轴与它的一条边平行，求正方形四顶点的坐标.

10. 边长为 a 的正六边形，坐标原点在它的中心，Ox 轴平行于它的一边，求正六边形的各顶点坐标.

11. 确定点 $P(x,y)$所在的象限，如果

(1)$xy>0$；　(2)$xy<0$；　(3)$x-y=0$；

(4)$x+y=0$；　(5)$x+y>0$；　(6)$x+y<0$；

(7)$x-y>0$；　(8)$x-y<0$.

12. 动点沿与 Ox 轴平行的直线移动，问这动点的坐标有什么特点？又如果沿与 Oy 轴平行的直线移动，它的坐标有什么特点？

13. 已知点 $A(0,0)$，$B(3,-4)$，$C(-3,4)$，$D(-2,2)$和 $E(10,-3)$，确定下列两点间的距离：

(1)A 和B；　(2)B 和 C；　(3)A 和 C；

(4)C 和D；　(5)A 和 D；　(6)D 和 E.

14. 已知点 $A(3,4)$，$B(-2,4)$，$C(2,2)$，求$\triangle ABC$ 的周长.

15. 已知四边形顶点为$(-a,0)$，$(0,b)$，$(a,0)$，$(0,-b)$，求其周长.

16. 证明：顶点为 $A(1,2)$，$B(3,4)$，$C(-1,4)$的三角形是直角三角形.

17. 证明：顶点为 $A(1,4)$，$B(4,1)$，$C(5,5)$的三角形是等腰三角形.

18. 问以 $M_1(1,1)$，$M_2(0,2)$和 $M_3(2,-1)$为顶点的三角形，其中内角有无钝角？

19. 证明：以 $M(-1,3)$，$N(1,2)$和 $P(0,4)$为顶点的三角形，其中内角都是锐角.

20. 在 Ox 轴上求与点$(8,4)$的距离为 5 的点.

21. 在 Oy 轴上求与点$(-8,13)$的距离为 17 的点.

22. 求点$(5,3)$到 Ox 轴，Oy 轴，及到原点的距离.

23. 已知两点 $M(2,2)$和 $N(5,-2)$，在横轴上求点 P，使$\angle MPN$ 成直角.

24. 过点 $A(4,2)$作切于两坐标轴的圆周，确定它的中心 C 和半径R.

25. 过点 $M(1,-2)$作半径为 5 且切于 Ox 轴的圆周，确定这个圆周的中心 C.

26. 按定比 λ 分割AB 线段，求分点 C 之坐标，已知

(1)$A(5,-1)$，$B(2,4)$，$\lambda=3$；

(2)$A(0,-2)$, $B(7,5)$, $\lambda=-\frac{1}{2}$;

(3)$A(1,5)$, $B(6,3)$, $\lambda=-3$.

27. 求两点 $A(5,-5)$和 $B(-3,1)$所定线段之中点.

28. 将两点 $A(1,-3)$和 $B(4,3)$所连线段三等分,求分点坐标.

29. 已知三角形的顶点为 $A(1,-3)$,$B(3,-5)$和 $C(-5,7)$,确定它的各边的中点.

30. 已知两点 $A(3,-1)$和 $B(2,1)$,确定:

(1)关于点 A 与点 B 对称的点 M 的坐标;

(2)关于点 B 与点 A 对称的点 N 的坐标.

31. 已知点 $M(2,-1)$,$N(-1,4)$和 $P(-2,2)$是三角形各边的中点,确定三角形的顶点.

32. 求$\triangle ABC$ 的三中线长以及重心,其中三角形的顶点为 $A(1,2)$,$B(0,5)$,$C(-2,3)$.

33. 已知 A,B,C,D 四点依次构成平行四边形,且其中三点为 $A(0,0)$,$B(0,a)$,$C(b,c)$,求点 D 的坐标.

34. 已知平行四边形相邻两个顶点 $A(0,0)$,$B(a,0)$,其中心(对角线交点)为 $M(b,c)$,求它的另两个顶点.

35. 设以定比 λ 分割线段AB 的分点是C,如果已知

(1)$A(1,2)$, $C(3,6)$, $\lambda=2$,求点 B;

(2)$C(-3,8)$, $B(7,2)$, $\lambda=-2$,求点 A.

36. 已知三角形三顶点为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,证明:它的三条中线相交于一点,即三角形的重心,并写出这点的坐标.

37. 在点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$处分别系有质量为 m_1,m_2,m_3 的物体,确定这质量组的重心坐标.

38. 在平面上有一组点 $A_i(x_i,y_i)$,$i=1,2,\cdots,k$,在 A_i 处系有质量 m_i,求这质量组的重心坐标.

39. 已知三角形的重心与原点重合,且一个顶点在横轴上到原点距离为 a,第二个顶点在纵轴上到原点距离为 b,求第三个顶点的坐标.

40. 计算顶点为$(-2,1)$,$(2,-2)$,$(8,6)$的三角形面积.

41. 计算顶点为$(-2,0)$,$(0,-1)$,$(2,0)$,$(3,2)$,$(-1,3)$的五边形面积.

42. 判断下列各三点是否共线:

(1)$(0,5)$,$(2,1)$,$(-1,7)$;

(2)$(3,1)$,$(-2,-9)$,$(8,11)$;

(3)(0,2),(−1,5),(3,4).

43. 已知菱形的两个相邻顶点为 $A(x_1,y_1)$ 与 $B(x_2,y_2)$,且它的对角线平行于坐标轴,求另外两个顶点的坐标.

44. 已知正六边形的两个相邻顶点为 $A(2,0)$ 与 $B(5,3\sqrt{3})$,求它的中心.

45. 已知菱形的两个相对顶点为 $A(8,-3)$ 与 $C(10,11)$,且它的边长是 10,求菱形的其余顶点的坐标.

46. 已知三角形顶点 $A(4,1)$,$B(7,5)$,$C(-4,7)$,求$\angle A$ 的平分线与对边 BC 的交点之坐标.

47. 两个相似三角形有共同顶点 $A(-3,-6)$,且在这点上有公共的角.如果已知小三角形的顶点 $B(6.2,-3.6)$及 $C(5,1)$,且相似边的比等于 5/2,求大三角形的其余二个顶点.

48. 求圆心在点 $C_1(2,5)$和 $C_2\left(7\frac{1}{3},10\frac{1}{3}\right)$,而半径分别等于 3 和 7 的二圆的公切线的交点.

49. 已知梯形的三个顶点 $A(-1,-2)$,$B(1,3)$,$C(9,9)$,且底边 $AD=15$,求它的第四个顶点 D 的坐标.

50. 已知正 n 边形的顶点$A_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$,求证它的中心的坐标为 $x=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$,$y=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$.

51. 用坐标法证明梯形的中位线平行于底边,且长度为两底和的一半.

52. 证明欧拉定理:任意四边形 $ABCD$,K,L 分别为对角线AC,BD 的中点,则下式成立

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2-|AC|^2-|BD|^2=4|KL|^2.$$

53. 在 52 题中,证明:KL 的中点为四边形的重心.

二、习题解法、提示与答案(直角坐标系)

2. $A_x(2,0)$,$B_x(3,0)$,$C_x(-5,0)$,$D_x(-3,0)$.
3. $A_y(0,2)$,$B_y(0,1)$,$C_y(0,-2)$,$D_y(0,1)$.
4. (1)(2,−3);(2)(−1,1);(3)(−3,5);(4)$(a,-b)$.
5. (1)(1,2);(2)(2,−2);(3)(2,5);(4)$(-a,b)$.
6. (1)(−3,−3);(2)(2,−1);(3)(−5,3);(4)$(-a,-a)$.
7. (1)(3,2);(2)(−2,5);(3)(4,−3);(4)(b,a).
8. (1)(−5,−3);(2)(−3,4);(3)(2,−7);(4)$(-b,-a)$.
9. $\left(\pm\frac{a}{2},\pm\frac{a}{2}\right)$.