

● 关继滕 房文静 编著

电磁场理论

ELECTROMAGNETIC THEORY

石油大学出版社

电 磁 场 理 论

关继腾 房文静 编著

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论/关继腾编著. —东营:
石油大学出版社, 2001. 4
ISBN 7-5636-1433-8

I. 电… II. 关… III. 电磁场-理论
IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 14906 号

电 磁 场 理 论

关继腾 房文静 编著

责任编辑: 宋秀勇(电话 0546—8392139)

封面设计: 孟卫东

出版者: 石油大学出版社(山东 东营, 邮编 257061)

网 址: <http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpress>

电子信箱: upcpress@sunctr.hdpu.edu.cn

印刷者: 山东沂南印刷总厂

发 行 者: 石油大学出版社(电话 0546—8392139)

开 本: 787×960 1/16 印张: 16.125 字数: 305 千字

版 次: 2001 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

印 数: 1—2000 册

定 价: 25.00 元

前 言

应用地球物理专业所涉及到的工程电磁问题是在地下特定范围、特定条件下从工程电磁技术中建立的数理模型问题。研究这些问题的定性分析方法和定量求解方法是该专业学生的专业基础和基本技能。

电磁场理论课列为应用地球物理专业的一门重要技术基础课。它的任务是阐明电磁场的基本概念、基本规律和基本的分析计算方法。同时加强学生用“场”的观点去观察、分析问题,用场论的方法去解决实际工程问题。因此,学好电磁场理论将有助于提高学生分析问题和解决问题的能力。

本书是根据教学现代化的要求,结合石油与地质院校应用地球物理类专业教学改革的具体情况编写的。一方面是为了适应拓宽专业面和新专业的需要,另一方面是为了保证与提高技术基础课的基本教学质量。

本书主要阐述宏观电磁场理论。第一章讲述数学场论的基础知识,为研究电磁场理论提供必需的数学基础和研究电磁场的数学方法。第二章、第三章讨论了静电场分析与求解的基本方法。第四章、第五章讨论了恒定电流场、恒定磁场的分析与解法。第六章总结了电磁场的普遍规律,建立了麦克斯韦方程组。介绍了一般情况下势的概念。第七章讨论了电磁波的传播规律和辐射规律,包括无界空间中的电磁波问题和辐射电磁场的计算方法。本书选编的例题有基本题和典型题。在解题中,既注意了物理分析,也注意了数学演算。引导学生提高自学和分析、解决问题的能力。

本书适用于学过《大学物理》、《高等数学》和《工程数学》的应用地球物理专业与相近专业的本科生作教材,可供40~60学时教学之用。也可以用于无线电技术类、电力类、通讯类专业短学时课程教学参

考书。考虑到各专业的不同情况,编写时适当添加了一些内容与份量,以利选用。

本书由关继腾编写前五章,房文静编写后两章。习题由房文静整理、收编并核对了答案。关继腾负责本书的统一、整理。

在本书编写过程中,参阅了许多专著、教材和工具书,并且还引用了其中的部分内容、数据和图表等资料,除了在书末参考文献中列出之外,谨在此一并向作者致谢。

由于作者水平有限,书中取材及论述难免有不妥与错误之处,敬请阅读本书的广大教师和读者批评指正。

编著者

2001年3月

目 录

| | |
|------------------------------------|-------|
| 第一章 数学场论概要 | (1) |
| § 1.1 矢量及其运算 | (1) |
| § 1.2 标量场的梯度 | (3) |
| § 1.3 矢量场的散度 | (7) |
| § 1.4 矢量场的旋度 | (12) |
| § 1.5 哈密顿算符 ∇ 及其恒等式 | (14) |
| § 1.6 广义正交曲线坐标系 | (20) |
| § 1.7 积分变换公式 | (28) |
| § 1.8 狄拉克(Dirac) δ 函数 | (31) |
| § 1.9 亥姆霍兹(Helmholtz)定理 | (33) |
| 习 题 | (34) |
| 第二章 静电场 | (36) |
| § 2.1 真空中静电场的基本方程 | (36) |
| § 2.2 真空中静电场的势及其微分方程 | (41) |
| § 2.3 电偶极子和电偶极层的电场 | (44) |
| § 2.4 电介质中静电场的基本方程 | (47) |
| § 2.5 静电场中不同电介质分界面上的边值关系 | (52) |
| 习 题 | (55) |
| 第三章 静电场边值问题的求解方法 | (57) |
| § 3.1 静电场边值问题的数学模型 | (57) |
| § 3.2 惟一性定理 | (60) |
| § 3.3 一维泊松方程的直接积分法 | (62) |
| § 3.4 电 象 法 | (66) |
| § 3.5 分离变量法 | (76) |
| § 3.6 引力场和静电场的相似性 | (88) |
| 习 题 | (95) |
| 第四章 恒定电流场 | (98) |
| § 4.1 电流密度矢量 | (98) |
| § 4.2 恒定电流场的基本方程 | (100) |

| | | |
|---------------|------------------------------|-------|
| § 4.3 | 恒定电流场的边值关系 | (103) |
| § 4.4 | 恒定电流场与静电场的比较 | (107) |
| § 4.5 | 恒定电流场边值问题的求解方法 | (112) |
| *§ 4.6 | 等效电阻与接地电阻 | (117) |
| *§ 4.7 | 互易定理 | (122) |
| 习题 | | (125) |
| 第五章 | 恒定磁场 | (127) |
| § 5.1 | 磁场的基本规律 | (127) |
| § 5.2 | 真空中恒定磁场的基本方程 | (130) |
| § 5.3 | 恒定磁场的矢势 | (135) |
| § 5.4 | 磁介质中恒定磁场的基本方程 | (142) |
| § 5.5 | 恒定磁场中不同分界面上的边值关系 | (147) |
| § 5.6 | 磁标势 磁荷观点 | (152) |
| § 5.7 | 恒定磁场边值问题的求解方法 | (159) |
| 习题 | | (166) |
| 第六章 | 时变电磁场 | (168) |
| § 6.1 | 麦克斯韦方程组和洛仑兹力公式 | (168) |
| § 6.2 | 时变电磁场的边值关系 | (174) |
| § 6.3 | 电磁场的能量守恒定律 | (176) |
| § 6.4 | 时变电磁场的矢势和标势 | (179) |
| *§ 6.5 | 似稳电磁场 | (185) |
| 习题 | | (187) |
| 第七章 | 电磁波的传播与辐射 | (189) |
| § 7.1 | 均匀平面波在理想介质中的传播 | (189) |
| § 7.2 | 均匀平面波在两种理想介质分界面上的反射和折射 | (201) |
| § 7.3 | 均匀平面波在导电介质中的传播 | (211) |
| *§ 7.4 | 导行电磁波 | (219) |
| § 7.5 | 电偶极子与磁偶极子的辐射 | (232) |
| 习题 | | (242) |
| 附录 | | (244) |
| 习题答案 | | (247) |
| 主要参考文献 | | (252) |

第一章 数学场论概要

现代物理学认为,自然界的物质有实物和场两种存在形式。作为物质存在形式的这个场就是物理场。物理场的物理性质要用适当的物理量来描述,例如静电场用电场强度 E , 磁场用磁感应强度 B 等等。如果这个物理量是标量,就称为这个场为标量场;如果这个物理量为矢量,就称这个场为矢量场。温度场、密度场、电势场都是标量场;而重力场、速度场、电场和磁场都是矢量场。一般情况下这些物理场的物理量均为空间、时间的函数。如果物理量不随时间而变化,则称该物理量的场为静态场;如果物理量随时间变化,则称该物理量的场为时变场。一个物理场的物理性质是物质存在的客观形式,数学场论是人们主观引入的量化表达方式,物理场的物理性质与是否引入数学描述无关,亦与引入的数学描述方法无关。也就是说,无论采用那种数学描述方法所反映的物理场的性质应该是惟一的、客观的。

在地球探测与信息技术中,常常要研究某种物理量在空间或地下的分布规律、变化规律以及物理量与产生它的源之间的相互关系,引进场的概念、应用场论这一数学工具,就可以很方便地揭示和探索这些规律。数学场论是研究电磁场理论的重要数学工具,因此,本章简要介绍数学场论的有关内容。

§ 1.1 矢量及其运算

1.1.1 矢量的表示方法

数学上称只有大小的量为标量,如时间、电势、温度、能量等。既有大小又有方向的量称为矢量,如力、流体流速、电场强度等。习惯上用黑体符号或在符号上加矢量号用箭头来表示矢量,如 A, B 或 \vec{A}, \vec{B} 。本书的所有矢量均采用黑体表示。模值为 1 的矢量称为单位矢量,由符号 e 来表示,如用 e_x, e_y, e_z 分别表示直角坐标系中的 x, y, z 方向上的单位矢量。

若三个相互垂直的坐标轴上的分量已知,一个矢量就确定了。例如在直角坐标系中,矢量 A 的三个分量模值分别是 A_x, A_y, A_z , 则 A 可表示为

$$A = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1-1)$$

该矢量的模为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-2)$$

A 的单位矢量为

$$e_A = \frac{A}{A} = e_x \frac{A_x}{A} + e_y \frac{A_y}{A} + e_z \frac{A_z}{A} = e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma \quad (1-3)$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为 A 的方向余弦。 α, β, γ 分别是 A 与 x, y, z 轴正向的夹角。

把两个矢量的对应分量相加或相减, 就得到它们的和或差。设

$$B = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z$$

$$\text{则} \quad A \pm B = e_x(A_x \pm B_x) + e_y(A_y \pm B_y) + e_z(A_z \pm B_z) \quad (1-4)$$

1.1.2 标量积和矢量积

矢量的相乘有两种定义: 标量积(点乘)和矢量积(叉乘)。标量积 $A \cdot B$ 是一标量, 其大小等于两个矢量模值相乘, 再乘以它们的夹角 α (取小角, 即 $\alpha \leq \pi$) 的余弦:

$$A \cdot B = AB \cos \alpha \quad (1-5)$$

它符合交换律:

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1-6)$$

并有

$$e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_x = e_x \cdot e_x = 0 \quad (1-7)$$

$$e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = e_z \cdot e_z = 1 \quad (1-8)$$

因而得

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-9)$$

$$A \cdot A = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1-10)$$

矢量积 $A \times B$ 是一个矢量, 其大小等于两个矢量的模值相乘, 再乘以它们夹角 α ($\alpha \leq \pi$) 的正弦, 其方向与 A, B 成右手螺旋关系, 为 A, B 所在平面的法线方向 n , 如图 1-1 所示。

$$A \times B = nAB \sin \alpha \quad (1-11)$$

它不符合交换律。由定义知:

$$A \times B = -(B \times A) \quad (1-12)$$

并有

$$e_x \times e_x = e_y \times e_y = e_z \times e_z = 0 \quad (1-13)$$

$$e_x \times e_y = e_z, e_y \times e_z = e_x, e_z \times e_x = e_y \quad (1-14)$$

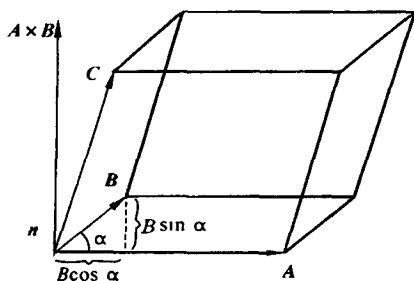


图 1-1 向量乘积的说明

故

$$\begin{aligned} A \times B &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \times (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= e_x (A_y B_z - A_z B_y) + e_y (A_z B_x - A_x B_z) + e_z (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \quad (1-15)$$

$A \times B$ 各分量的下标次序具有规律性。例如, e_x 分量第一项是 $y \rightarrow z$, 其第二项下标则次序对调: $z \rightarrow y$, 依次类推。通常, 上式写成行列式形式, 即

$$A \times B = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-16)$$

1.1.3 三重积

矢量的三连乘也有两种。标量三重积为

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (1-17)$$

注意, $A \times B$ 的模就是 A 与 B 所形成的平行四边形的面积(参看图 1-1), 因此 $C \cdot (A \times B)$ 就是该平行四边形与 C 所构成的平行六面体的体积。 $A \cdot (B \times C)$ 和 $B \cdot (C \times A)$ 也都等于 A, B, C 所构成的平行六面体的体积。

矢量三重积为

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (1-18)$$

§ 1.2 标量场的梯度

1.2.1 标量场的等值面

一个标量场, 可以用一个标量函数来表示。例如, 在直角坐标系中, 某一标量场 u 可以用标量函数

$$u = u(x, y, z, t) \quad (1-19)$$

表示出来。当研究静态的标量场,标量函数表示为

$$u = u(x, y, z) \quad (1-20)$$

为了直观地表示标量 u 在场中的分布状况,可以引入等值面的概念。场中使函数 u 取相同数值的点所构成的曲面称为等值面。若 u 代表电势,则其等值面就是等势面;若函数 u 代表温度,则其等值面就是等温面。标量场 u 的等值面方程为

$$u(x, y, z) = C \quad (C \text{ 为任意常数}) \quad (1-21)$$

常数 C 取不同的数值,便得到不同的等值面,从而构成等值面簇。由于函数 u 是空间坐标的单值函数,显然等值面互不相交,场中一点只有一个等值面通过。

如果函数 u 仅为坐标 (x, y) 的函数,则 $u = u(x, y)$ 表示的是平面标量场,函数 u 取相同数值的点所组成的曲线,称为平面标量场 u 的等值线。其等值线方程为

$$u(x, y) = C \quad (C \text{ 为任意常数}) \quad (1-22)$$

它在几何上一般表示为一簇等值曲线。

1.2.2 方向导数

在研究标量场时,不仅需要了解标量函数在场中总的分布情况,还常常需要了解标量函数 $u = u(x, y, z)$ 在空间任意一点处沿每个方向的变化情况。为此引入方向导数的概念。

如图 1-2 所示,设 P 为标量场 u 中的任一点,其场值为 $u(P)$,从点 P 出发朝任意方向引一条射线 l ,并在该方向靠近 P 点取一动点 Q ,该点的场值为 $u(Q) = u(P) + \Delta u$, P 点到 Q 点的距离表示为 Δl ,根据偏导数的定义,可以写出

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(Q) - u(P)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} \quad (1-23)$$

就称为标量场 u 在 P 点处沿 l 方向上的方向导数。若

$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P > 0$,说明标量场 u 沿 l 方向是增加的;若 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P < 0$,标量场 u 沿 l 方向是减小的;

若 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = 0$,标量场 u 沿 l 方向无变化。

根据方向导数的定义,可直接导出其计算公式。若函数 u 在 P 点可微,则式(1-23)中的 Δu 可表示为

$$\Delta u = u(Q) - u(P) = du + o(\Delta l)$$

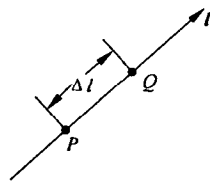


图 1-2 方向导数定义用图

式中 $o(\Delta l)$ 项当 $\Delta l \rightarrow 0$ 时也趋于零, du 为函数 u 在 P 点的全微分, 且

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

于是 Δu 又可表示成

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + o(\Delta l)$$

将上式代入式(1-23)得

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l}$$

若 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 是线段 \overline{PQ} 分别在 x, y, z 轴上的投影, 当 $\Delta l \rightarrow 0$ 时, 故上式中 $\frac{\partial x}{\partial l} = \cos \alpha, \frac{\partial y}{\partial l} = \cos \beta, \frac{\partial z}{\partial l} = \cos \gamma$ 分别是射线 l 的三个方向余弦, 因此, 上式又可表示成

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-24)$$

这就是直角坐标系中方向导数的计算公式。

1.2.3 标量场的梯度

在标量场 u 中计算某点标量函数 u 沿某个方向的方向导数, 即可知道函数 u 在该点沿该方向的变化率。但场中从给定点出发有无穷多个方向, 在该点函数 u 沿哪个方向变化率最大? 这个最大变化率的值又是多大呢? 为了解决这个问题, 引入梯度的概念。

在计算方向导数的公式(1-24)中, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 l 方向上的方向余弦, 取 e_l 为 l 方向上单位矢量, 即

$$e_l = e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma$$

如果在标量场 u 中定义一个矢量 G , 即令

$$G = e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

则式(1-24)可表示成 G 与 e_l 的标量积

$$\frac{\partial u}{\partial l} = G \cdot e_l = G \cos (\hat{G}, e_l)$$

(\hat{G}, e_l) 为 P 点处固定矢量 G 与单位矢量 e_l 的夹角。上式表明 P 点处 G 在 l 方向的投影正好等于函数 u 在 l 方向的方向导数, 并且沿 l 方向与 G 的方向一致时 $(\hat{G}, e_l) = 0^\circ$, 方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 取最大值, 该最大值为

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = |G|$$

由此可见, P 点处矢量 G 的方向是函数 u 在该点变化率最大的方向, G 的模也正好等于这个最大变化率的值。因此, 给出梯度 (gradient) 的定义: 若在标量场 u 中 P 点处存在矢量 G , 其方向为函数 u 在 P 点处变化率最大的方向, 其模等于这个变化率的最大值。则称矢量 G 为函数 u 在 P 点的梯度, 记为 $\text{grad } u$, 即

$$\text{grad } u = G$$

梯度的这个定义并未涉及具体的坐标系, 这意味着该定义适用于任何坐标系。由前面的推导过程, 已得到了直角坐标中梯度的计算公式

$$\text{grad } u = e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-25)$$

为了书写简洁, 引入读作“del”(德尔)或“Nabla”(那勃拉)的哈密顿 (Hamilton) 算符, 在直角坐标系中算符 ∇ 为

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-26)$$

显然在直角坐标系中 ∇ 算符具有矢量和微分的双重性质, 被称为矢量微分算符。

算符 ∇ 对标量函数 u 的计算结果为一矢量函数, 在直角坐标系中

$$\nabla u = (e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z})u = e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

上式右边恰好是梯度 $\text{grad } u$, 所以在直角坐标系中用算符 ∇ 将梯度记为

$$\text{grad } u = \nabla u$$

1.2.4 梯度的性质

梯度矢量具有以下两条重要性质:

性质 1 在标量场 u 中, P 点处标量函数 u 的梯度在 l 方向的投影等于标量函数 u 沿 l 方向的方向导数。即

$$\text{grad } u \cdot e_l = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \quad (1-27)$$

式中 e_l 为 l 方向上的单位矢量。

性质 2 标量场 u 中每一点 P 处的梯度矢量垂直于过该点的等值面, 且指向函数 u 增加最快的方向。

1.2.5 应用举例

例 1.1 产生场的场源所在空间位置点称为源点, 记为 (x', y', z') 或 r' ; 场所在的空间位置点称为场点, 记为 (x, y, z) 或 r 。设 R 表示空间场点和源点之间

的距离, 记为 $R = |r - r'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$; 从源点指向场点的矢量记为 $R = r - r'$, 如图 1-3 所示。当把 R 表示式中的 (x', y', z') 看作变数而求 R 的梯度时, 我们将哈密顿算符写成“ ∇' ”, 其定义是:

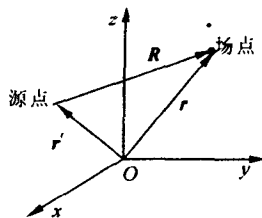


图 1-3 例题 1.1 图

$$\nabla' = e_x \frac{\partial}{\partial x'} + e_y \frac{\partial}{\partial y'} + e_z \frac{\partial}{\partial z'}$$

求证: $\nabla R = -\nabla' R = \frac{R}{R}$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明 } \nabla R &= e_x \frac{\partial R}{\partial x} + e_y \frac{\partial R}{\partial y} + e_z \frac{\partial R}{\partial z} = e_x \frac{x - x'}{R} + e_y \frac{y - y'}{R} + e_z \frac{z - z'}{R} \\ &= \frac{e_x(x - x') + e_y(y - y') + e_z(z - z')}{R} = \frac{R}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla' R &= e_x \frac{\partial R}{\partial x'} + e_y \frac{\partial R}{\partial y'} + e_z \frac{\partial R}{\partial z'} \\ &= e_x \frac{-(x - x')}{R} + e_y \frac{-(y - y')}{R} + e_z \frac{-(z - z')}{R} \\ &= -\frac{e_x(x - x') + e_y(y - y') + e_z(z - z')}{R} = -\frac{R}{R} \end{aligned}$$

所以

$$\nabla R = -\nabla' R = \frac{R}{R}$$

或者有

$$\nabla' R = -\nabla R = -\frac{R}{R}$$

§ 1.3 矢量场的散度

1.3.1 矢量场的矢量线

一个矢量场, 可以用矢量函数来表示。例如, 在直角坐标系中, 某一矢量场 A 可以用矢量函数

$$A = A(x, y, z, t) \quad (1-28)$$

表示出来。静态场的矢量函数表示为

$$A = A(x, y, z) \quad (1-29)$$

也可以用其分量表示为

$$A = e_x A_x(x, y, z) + e_y A_y(x, y, z) + e_z A_z(x, y, z) \quad (1-30)$$

式中 e_x, e_y, e_z 分别是直角坐标系中 x, y, z 三个方向上的单位矢量; $A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)$ 分别是矢量 $A(x, y, z)$ 在三个坐标轴上的投影, 我们假定它们都是坐标变量的单值函数, 且具有连续的偏导数。

为了形象地表示场矢量在场中的分布情况, 引入矢量线的概念。所谓的矢量线乃是这样的曲线, 在矢量场中画出一系列有指向的曲线, 使曲线上每一点的切线方向与该点场矢量的方向相同。通过垂直于该点场矢量方向单位面积上矢量线的条数与该矢量的量值成正比。这样的曲线也叫矢量场的流线。如静电场中的电力线、磁场中的磁力线分别是电场强度和磁感应强度描述的矢量场中的矢量线。

为了精确地绘出矢量线, 必须求出矢量线方程。在矢量场 A 中, 设 $P(x, y, z)$ 为矢量线上任意一点, 该点的线元矢量 $d\mathbf{l}$ 为

$$d\mathbf{l} = e_x dx + e_y dy + e_z dz$$

该点处的场矢量 A 为

$$A = e_x A_x(x, y, z) + e_y A_y(x, y, z) + e_z A_z(x, y, z)$$

根据矢量线的定义, 在矢量线上的任一点的切向长度元 $d\mathbf{l}$ 与该点的场矢量 A 的方向平行, 即

$$A \times d\mathbf{l} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

展开上式, 并根据零矢量的三个分量均为零的性质可得

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)} \quad (1-31)$$

这就是矢量线应满足的微分方程。解此方程即可得矢量线簇。由矢量场和矢量线的定义可知, 矢量线簇充满了矢量场所在的空间, 且矢量线互不相交。

例 1.2 已知位于坐标原点处电量为 q 的点电荷的电场强度矢量为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

式中 $\mathbf{r} = e_x x + e_y y + e_z z, r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, 求 E 的矢量线方程的通解。

解 将 \mathbf{r} 和 r 的表达式代入 E , 得

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (e_x x + e_y y + e_z z) \\ &= e_x E_x(x, y, z) + e_y E_y(x, y, z) + e_z E_z(x, y, z) \end{aligned}$$

将式(1-31)中的 A_x, A_y, A_z 分别换成上式中的 E_x, E_y, E_z , 得矢量线微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \\ \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \end{cases}$$

将上二式积分一次,就可得到此方程的通解

$$\begin{cases} y = C_1 x \\ z = C_2 y \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

可以看出,其图形是如图 1-4 所示的一簇从坐标原点向空间散发的径向辐射线,电磁学中称之为电力线。当 q 为正时,电力线的方向为图 1-4 所示方向; q 为负时电力线方向与图 1-4 所示方向相反。

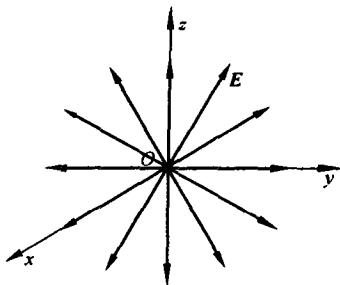


图 1-4 点电荷电场的矢量线

1.3.2 通量和散度的概念

人们在研究流体动力学的过程中,得到了一套研究矢量场的数学方法。通量和散度的概念,最初就是在研究流体时引入的。在流体动力学中,速度 v 是一个矢量点函数。即流体中每一点都有一个确定的流速,一般情况下,不同点有不同的流速,整个流体中各点的流速 v 构成一个流速场。

在流体中取一个小面元 dS ,以 n 表示其法线方向的单位矢量,记作 $dS = dS n$ 。设流体密度等于 1。我们把单位时间内流过面元 dS 的流体质量叫做 dS 面上流速场的通量。因为流速 v 是流体在单位时间内移过的距离,只有位于图 1-5 所示柱体内部的流体才能在单位时间内流过 dS ,所以 v 在 dS 上产生的通量 $d\Phi$ 在数值上等于柱体内的体积,即

$$d\Phi = v \cdot dS$$

对于流体中的任一有限曲面 S ,其通量 Φ 等于组成这一曲面的每个面元上的通量的代数和,用定积分表示为

$$\Phi = \int_S v \cdot dS \quad (1-32)$$

当 S 为闭合曲面时,则为

$$\Phi = \oint_S v \cdot dS \quad (1-33)$$

流速场的通量与它的“源头”分布有一定的关系。如果我们在场域中任取一点 P ,用一个很小的闭合曲面 S 把它包围起来,即取 P 点的一个小邻域,其体积

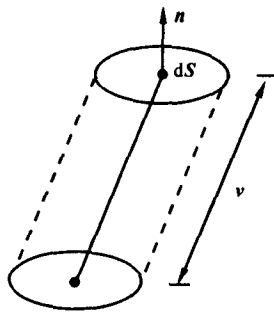


图 1-5 面积元 dS 上的通量

为 ΔV , 那么流速场 \boldsymbol{v} 在 S 上的通量 $\Delta\Phi$ 与体积 ΔV 的比值为 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}$, 这一比值的物理意义是: 单位时间内从 P 点附近单位体积中流出(流进)的流体质量。当需要精确描述 P 点附近的情况时, 令 S 向 P 点无限收缩并取极限, 这个比值的极限称为流速场 \boldsymbol{v} 在 P 点的散度(divergence), 记作 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ 。即

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ S \rightarrow 0}} \frac{\oint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} \quad (1-34)$$

散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ 的意义是明显的, 如果 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} > 0$, 则表示有流体从 P 点流出, 因此 P 点必是流速场的源头, 反之, 如果 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} < 0$, 则表示有流体流入 P 点, P 点必是流速场的尾间, 或称负源头; 当 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, 则它表示既无流体从 P 点流出又无流体流入 P 点, 流体只可能在 P 点经过, 因此 P 点既非源头也非尾间。由此可见, $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ 的数值大小既反映了流速场的源头及尾间的分布情况, 也反映了流体在 P 点流入流出的程度。

1.3.3 矢量场的通量与散度

通量和散度的意义可以推广到任意矢量场去, 虽然这时的矢量场不再具有流体质量的意义, 但其数学意义没有变化。在确定该矢量场在各点邻域中的“源头分布”方面仍起着同样的作用。它描述了矢量场各空间点的源头分布情况。

若给定一个矢量场 \boldsymbol{A} , 矢量函数 \boldsymbol{A} 在场中任一曲面 S 上产生的通量为

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \quad (1-35)$$

若 S 为闭合曲面, 则通量

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \quad (1-36)$$

在矢量场 \boldsymbol{A} 中的一点 P , 作一包围 P 点的闭合曲面 S , 设 S 包围的空间区域的体积为 ΔV , 并使 S 所限定的体积 ΔV 以任意方式向 P 点无限收缩并取极限。这个极限称为矢量场 \boldsymbol{A} 在 P 点的散度, 记作 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$, 即

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ S \rightarrow 0}} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} \quad (1-37)$$

应当注意, 这个定义与所选取的坐标系无关。在 P 点, 若 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} > 0$ 。则该点为该矢量场的矢量线的正源头, 如图 1-6(a) 所示; 若 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} < 0$, 则该点为矢量线的负源头, 如图 1-6(b) 所示; 若 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, 则该点无源, 矢量线只从该点穿过, 如图 1-6(c) 所示。若在某一区域内的所有点上矢量场的散度都等于零, 则称该区域内的矢量场为无源场。