《高中复习指导丛书》

高中数学复习指导

杨佩祥等编

南京大学出版社

《高中复习指导丛书》

高中数学复习指导

杨佩祥 王 峰
杨海燕 编
仇炳生 徐金碧

南京大学出版社

1985 · 南京

内 容 提 要

本书分 16 个专题，概括了中学数学教材的基本内容。根据中学数学各部分内容的有机联系，作了综合归类，思路清晰，逻辑性强。通过典型例题的分析，突出重点和难点，可指导学生提高分析问题和解决问题的能力。书中介绍了许多巧妙的方法，凝聚了编者丰富的教学经验和研究成果，是高考者的良师益友。对广大中学生和中学数学教师是一本有益的读物。对在职干部、职工参加成人高考也有一定参考价值。

本书附有综合试题三套，各部分后均附有一定量的练习题及其答案。

《高中复习指导丛书》

高中数学复习指导

杨佩祥 王峰 杨海燕 徐金碧 仇炳生 编

南京大学出版社出版
（南京大学校内）
江苏省新华书店发行　国营练湖印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：9 7/16 字数：212千
1985年8月第1版　1985年11月第1次印刷
印数 1—47,500

统一书号：7336·010　定价：1.40元
责任编辑：秦 涛

出版说明

本社出版之《高中复习指导丛书》共分十册，包括政治、时政、语文、数学、物理、化学、生物、历史、地理和英语。

本《丛书》是由江苏省和南京市二十多位富有教学经验的教师，在总结了多年来指导高考，编写高考复习资料的基础上，根据教育部规定的教学大纲和当前的实际情况编写的。各册从实际出发概括和总结了高中阶段课程的主要内容，包括复习的基本要求，基本概念，问题分析，还附有例题分析和习题等，充分体现了少（字数少）、精(内容精)、新（构思新）的特点。本《丛书》各册内容曾在近几年指导高考复习中起过良好作用，成绩显著。这次正式出版，对于应届高中毕业生和社会青年系统掌握高中教材内容，提高解题分析能力，无疑将会起到事半功倍，相得益彰之功效。它不仅是应届毕业生和社会青年的良师益友，而且也是一套对广大中学教师有益的参考资料。

本《丛书》各册内容，均经南京大学有关专业教师审阅，力求达到内容准确，言简意赅，重点突出，便于复习。在编写体例上，则从各科复习的实际要求出发，不强求一致，以充分体现各科编写教师的原有风格。

由于我们水平有限，加之编辑时间仓促，错误之处，恳请读者不吝指正。

《高中复习指导丛书》编写组

1985 年 8 月

前　言

为了帮助高中学生复习数学，我们从中学数学的基本内容中，择其重点与难点，分16个专题编写了本书。本书力求贯彻"字数少、内容精、构思新"的原则，不机械地罗列基础知识和基本概念，而是抓住数学各部分内容之间的有机联系，通过典型例题的分析，着重指导学生提高分析问题、解决问题的能力。因此，读者应把本书和中学数学教科书结合起来使用，在掌握教材的基本概念和基础知识的基础上认真阅读本书，将能进一步深化概念，开阔视野，提高解题能力。

本书篇幅少，概括全面，便于阅读和检查；内容精，有代表性，便于加深和拓宽；材料新，启发思维，便于类比和推广。各个专题均有练习题，书末还附有综合性思考题三套，全部附有答案，以便读者自我检查时订正。

复习时不要拘泥于个别例题的特殊解法，而是要通过例题的分析说明，掌握方法，提高能力。

本书作者都具有多年的教学经验，特别是高考复习班的教学指导和实践的经验，希望本书能帮助参加高考复习的同志从题海中解脱出来。

由于水平所限，书中缺点与错误在所难免，尚望读者予以指正。

编　者

1985年9月

目　录

1

数的性质及其应用

从自然数集扩充到复数集的过程中，数集越来越复杂，其应用也越来越广泛，复杂中包含了简单，解决复杂问题总离不开基本概念和基本性质. 因此，掌握各数集的性质及它们之间的联系是很重要的.

§1.1 数集的发展及其相互联系

1. 数集的扩充

从自然数集(N)，经整数集(Z)，有理数集(Q)，实数集(R)到复数集(C)逐步完成了数集的扩充. 在数集扩充的顺序中，前者是后者的真子集，即有

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$$

一个集合对于某个运算是可以施行的，是指这集合中的元素，经该运算后，其结果仍属于这集合. 例如，在自然数集中加法和乘法运算是可施行的，而减法则未必. 如 $2-3=-1$，2 和 $3\in N$，但差 $-1\overline{\in} N$. 数集扩充的内在因素正是为了解决运算的可施行性.

运算贯穿于解题过程的始终，但运算在一个数集中，並不总是可行的. 在解题时，应注意被解的题要求在什么数集内给出解答.

【例1】 设 $f(x)=18x^5+9x^4-32x-16$，分别在整数

集，有理数集，实数集，复数集内把 $f(x)$ 分解因式，並分别在上述数集内求出方程 $f(x)=0$ 的根。

〔解〕 $f(x)=(2x+1)(3x^2-4)(3x^2+4)$ (1)

$=(2x+1)(\sqrt{3}x-2)$

$\times(\sqrt{3}x+2)(3x^2+4)$ (2)

$=(2x+1)(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)$

$\times(\sqrt{3}x-2i)(\sqrt{3}x+2i)$ (3)

$\therefore$ $f(x)$ 在整数集或有理数集内，可分解为（1）式；在实数集内可分解为（2）式；在复数集内可分解为（3）式。

请读者自己确定方程 $f(x)=0$ 在指定数集内的根。

【例2】 设 x_1、x_2 是 $x^2-x\sin\alpha+\sin 2\alpha=0$ 的两根，

$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，求不等式

$$\log_{x_1+x_2}\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\log_{x_1+x_2}\frac{x_2}{\sqrt{2}}>1$$

成立时，α 的范围。

〔解〕 按题意得

$$\begin{cases}\Delta=\sin^2\alpha-4\sin2\alpha\geqslant0 & (1)\\ x_1+x_2=\sin\alpha>0 & (2)\\ x_1x_2=\sin 2\alpha>0 & (3)\end{cases}$$

$\because$ $\alpha\in(0,\pi/2)$

$\therefore$ 由（1）得 $\operatorname{arc\,tg}8\leqslant\alpha<\pi/2$

$\because \log_{x_1+x_2}\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\log_{x_1+x_2}\frac{x_2}{\sqrt{2}}=\log_{x_1+x_2}\frac{x_1x_2}{2}$

$=\log_{\sin\alpha}(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=1+\log_{\sin\alpha}\cos\alpha>1$

$\therefore$ 这是一绝对不等式，所求 α 的范围为

$$\operatorname{arc\,tg} 8 \leqslant \alpha < \pi/2$$

一元二次方程的韦达定理，对于实根或复根均成立。例2中，並未指明 x_1，x_2 是方程 $x^2 - x\sin\alpha + \sin 2\alpha = 0$ 在哪个数集内的根。若不注意判断 x_1，$x_2 \in R^+$，仅作形式上的推导，会得到 α 的范围是 $(0, \pi/2)$ 的错误结论。

2．数集间问题的转化

数集的扩充，使我们对数的认识加深了。由于数集之间是互相联系的，使我们有可能把复杂问题转化为简单的问题，给分析、解决问题带来灵活性。

复数都具有 $a+bi$（a、$b \in R$）的形式，故根据复数相等的充要条件可把复数问题转化为相应的实数问题。

【例3】 解方程 $Z^2 - |Z|^2 = \overline{Z}$

〔解〕 设 $Z = a + bi$ a，$b \in R$，则原方程为

$$(a+bi)^2 - (a^2+b^2) = a - bi$$

$$-2b^2 + 2abi = a - bi$$

又 a，$b \in R$

$$\therefore \qquad \begin{cases} -2b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$$

由此解得：$Z = 0$，$\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$。

【例4】 设复数 α 所表示的点，在连接点 $1+i$ 和 $1-i$ 的线段上运动，求 α^2 所表示的点的轨迹，並指出它是什么曲线。

〔解〕 设轨迹上任意一点所对应的复数为

$$Z = x + yi \quad x, y \in R$$

由题意可设 $\alpha = 1 + ti$，$-1 \leqslant t \leqslant 1$，

$$\because \qquad x + yi = (1+ti)^2 = 1 - t^2 + 2ti$$

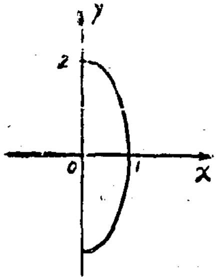

图1-1

$$\therefore \quad \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 2t \end{cases}$$

消去 t，得 $y^2 = -4(x-1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

∴ 所求轨迹为一段抛物线弧（如图 1-1 ）。

我们比较熟悉实数集，解题方法也多些，因而把一些复数问题转化为实数问题，往往容易获解，如例 4 就是通过解析法求解的。而有些实数问题也可转化为复数问题来解决（见例20和例21）。

任何一个有理数总可以表示为两个整数之比的形式，它或是有限小数（包括整数），或是无限循环小数。反之亦然。因此，有理数问题又可转化为整数问题。

【例5】 设 $y = f(x)$，$x \in R^+$，若 $n \in Z$ 时，$f(x^n) = nf(x)$成立，求证该式当 $n \in Q$ 时也成立。

〔证〕

设有理数 $a = \frac{q}{p}$，p 和 q 为互质的整数

$\because \quad x \in R^+ \quad \therefore \quad x^{\frac{1}{p}} \in R^+$ 又 $q \in Z$

$$\therefore \quad f[(x^{\frac{1}{p}})^q] = qf(x^{\frac{1}{p}})$$

$$\text{又} \quad f(x) = f[(x^{\frac{1}{p}})^p] = pf(x^{\frac{1}{p}})$$

$$\therefore \quad f(x^{\frac{1}{p}}) = \frac{1}{p} f(x)$$

$$\therefore \quad f(x^a) = f(x^{\frac{q}{p}}) = \frac{q}{p} f(x) = af(x)$$

即本题得证。

§1.2 自然数集、整数集和数学归纳法

自然数集和整数集有一个共同特性：相邻两数之差为1。由此可得推论：设 $m, n \in Z$，若 $m>n$，则有 $m \geqslant n+1$。更重要的是，由于相邻两数之差为常数，为递推创造了条件，使数学归纳法在自然数集或整数集中得到广泛应用。

1. 数学归纳法的原理

应用数学归纳法证明命题 $f(n)(n \in N)$ 的步骤是：

（1）验证当 $n=n_0$ 时命题 $f(n)$ 成立，这里 n_0 是某一自然数；

（2）假设当 $n=k$ 时命题 $f(n)$ 成立，即 $f(k)$ 正确，在这假设下可推出当 $n=k+1$ 时，命题 $f(n)$ 也成立，即 $f(k+1)$ 正确；

（3）根据（1）、（2），对于一切 $n \geqslant n_0$ 的自然数，命题 $f(n)$ 是成立的。

在应用数学归纳法时，必须注意以下几点：

第一，证明步骤中，三条缺一不可。其中（1）为归纳基础，若 $n_0=1$，则证得的结论对一切自然数均成立。一般，n_0 应根据具体命题的性质而定，仅有（1），只证明了特殊的命题。（2）是归纳的依据，其中所作的假设“当 $n=k$ 时，命题 $f(n)$ 成立”叫做归纳假设。特别要注意(3)也是不可少的。

第二，数学归纳法是对于与自然数 n 有关的命题的一种

证明方法，不难理解：

若把上述证明步骤中的（1）、（2）改为

（1）验证当 $n=m$ 时，命题 $f(m)$ 成立，$m\in Z$；

（2）假设 $n=k$ 时命题 $f(n)$ 成立，即 $f(k)$ 正确，再证明 $n=k+1$ 时命题 $f(n)$ 也成立，则可知当 $n\geq m$（$n\in Z$）时，命题 $f(n)$ 正确。

第三，证明 $f(k+1)$ 正确时，必须应用归纳假设。这是我们由"$f(n_0)$ 正确"递推到"$f(n)$ 正确"的关键。否则，就不是应用数学归纳法了。

【例 6】应用数学归纳法证明

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}\qquad(n\in N)$$

错误的证明

（1）验证 $n=1$ 时命题成立，

（2）设 $n=k$ 时，命题成立，即

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^k}=\frac{\sin\alpha}{2^k\sin(\frac{\alpha}{2^k})}$$

当 $n=k+1$ 时

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^k}\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{2^{k+1}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}{2^{k+1}\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}$$

$$=\frac{2^k\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^k}\sin\frac{\alpha}{2^k}}{2^{k+1}\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}=\cdots\cdots$$

$$=\frac{\sin\alpha}{2^{k+1}\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}$$

即当 $n=k+1$ 时，命题亦成立。

根据（1）、（2），对一切自然数 n 命题成立。

上述证明的错误在于没有应用归纳假设，使递推中断。若把 $k+1$ 改为 n，则步骤（2）中的推导可作为原等式的证法之一，但这是不合题意的证明。应将步骤（2）中推导 $n=k+1$ 时的方法更改如下：

当 $n=k+1$ 时，

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^k}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{2^k\sin\frac{\alpha}{2^k}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{2^k\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{2^{k+1}\sin\frac{\alpha}{2^{k+1}}}.$$

2. 如何应用数学归纳法

应用数学归纳法证明的命题，必须是与自然数集或整数集有关的命题。

【例 7】求证 n为非负整数时，$11^{n+2}+12^{2n+1}$ 被 133 整除。

〔证〕

（1）易证 $n=0$ 时，命题正确（请读者给出）。

（2）设$n=k$时，$11^{k+2}+12^{2k+1}$ 能被 133 整除。