

《高中复习指导丛书》

高中数学复习指导

杨佩祥等编

南京大学出版社

《高中复习指导丛书》

高中数学复习指导

杨佩祥 王 峰
杨海燕 徐金碧 编
仇炳生

南京大学出版社

1985·南京

内 容 提 要

本书分16个专题,概括了中学数学教材的基本内容。根据中学数学各部分内容的有机联系,作了综合归类,思路清晰,逻辑性强。通过典型例题的分析,突出重点和难点,可指导学生提高分析问题和解决问题的能力。书中介绍了许多巧妙的方法,凝聚了编者丰富的教学经验和研究成果,是高考者的良师益友。对广大中学生和中学数学教师是一本有益的读物。对在职干部、职工参加成人高考也有一定参考价值。

本书附有综合试题三套,各部分后均附有一定量的练习题及其答案。

《高中复习指导丛书》

高中数学复习指导

杨佩祥 王 峰 编
杨海燕
仇炳生 徐金碧

南京大学出版社出版

(南京大学校内)

江苏省新华书店发行 国营练湖印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: $9\frac{7}{16}$ 字数: 212千

1985年8月第1版 1985年11月第1次印刷

印数 1—47,500

统一书号: 7336·010

定价: 1.40元

责任编辑: 秦 涛

出版说明

本社出版之《高中复习指导丛书》共分十册,包括政治、时政、语文、数学、物理、化学、生物、历史、地理和英语。

本《丛书》是由江苏省和南京市二十多位富有教学经验的教师,在总结了多年来指导高考,编写高考复习资料的基础上,根据教育部规定的教学大纲和当前的实际情况编写的。各册从实际出发概括和总结了高中阶段课程的主要内容,包括复习的基本要求,基本概念,问题分析,还附有例题分析和习题等,充分体现了少(字数少)、精(内容精)、新(构思新)的特点。本《丛书》各册内容曾在近几年指导高考复习中起过良好作用,成绩显著。这次正式出版,对于应届高中毕业生和社会青年系统掌握高中教材内容,提高解题分析能力,无疑将会起到事半功倍,相得益彰之功效。它不仅是应届毕业生和社会青年的良师益友,而且也是一套对广大中学教师有益的参考资料。

本《丛书》各册内容,均经南京大学有关专业教师审阅,力求达到内容准确,言简意赅,重点突出,便于复习。在编写体例上,则从各科复习的实际要求出发,不强求一致,以充分体现各科编写教师的原有风格。

由于我们水平有限,加之编辑时间仓促,错误之处,恳请读者不吝指正。

《高中复习指导丛书》编写组

1985年8月

前 言

为了帮助高中学生复习数学，我们从中学数学的基本内容中，择其重点与难点，分16个专题编写了本书。本书力求贯彻“字数少、内容精、构思新”的原则，不机械地罗列基础知识和基本概念，而是抓住数学各部分内容之间的有机联系，通过典型例题的分析，着重指导学生提高分析问题、解决问题的能力。因此，读者应把本书和中学数学教科书结合起来使用，在掌握教材的基本概念和基础知识的基础上认真阅读本书，将能进一步深化概念，开阔视野，提高解题能力。

本书篇幅少，概括全面，便于阅读和检查；内容精，有代表性，便于加深和拓宽；材料新，启发思维，便于类比和推广。各个专题均有练习题，书末还附有综合性思考题三套，全部附有答案，以便读者自我检查时订正。

复习时不要拘泥于个别例题的特殊解法，而是要通过例题的分析说明，掌握方法，提高能力。

本书作者都具有多年的教学经验，特别是高考复习班的教学指导和实践的经验，希望本书能帮助参加高考复习的同志从题海中解脱出来。

由于水平所限，书中缺点与错误在所难免，尚望读者予以指正。

编 者

1985年9月

目 录

1	数的性质及其应用仇炳生 (1)
§ 1.1	数集的发展及其相互联系..... (1)
§ 1.2	自然数集、整数集和数学归纳法..... (5)
§ 1.3	有理数集的特征..... (11)
§ 1.4	实数集的一个重要性质..... (11)
§ 1.5	复数集..... (12)
2	方程 (组) 的复习徐金碧 (22)
§ 2.1	关于方程的复习..... (22)
§ 2.2	关于方程组的复习..... (29)
§ 2.3	方程化分析法..... (32)
3	参数方程的解及应用徐金碧 (39)
§ 3.1	一元一次、二次方程的解..... (39)
§ 3.2	分式、指数、对数、无理方程的解..... (41)
§ 3.3	图象法..... (42)
§ 3.4	含参数的方程的应用..... (44)
§ 3.5	其它应用的例题..... (52)
4	函数及其图象杨佩祥 (55)
§ 4.1	函数的定义..... (55)
§ 4.2	函数的定义域和值域..... (56)

§ 4.3 函数的图象	(59)
§ 4.4 函数的性质	(63)
§ 4.5 应用函数图象解题举例	(70)
5 不等式的证明	王峰 (75)
§ 5.1 比较法	(75)
§ 5.2 分析法	(76)
§ 5.3 应用基本不等式法	(77)
§ 5.4 换元法	(79)
§ 5.5 反证法	(81)
§ 5.6 数学归纳法	(82)
§ 5.7 判别式法	(84)
§ 5.8 放缩法	(86)
§ 5.9 应用函数单调性证不等式	(87)
§ 5.10 几何法	(88)
6 初等极值问题	王峰、徐金碧 (90)
§ 6.1 基本题型及其解法	(90)
§ 6.2 条件极值	(92)
§ 6.3 极值应用题	(97)
§ 6.4 综合题选解	(100)
7 排列与组合	杨佩祥 (105)
§ 7.1 基本原理	(105)
§ 7.2 排列与组合数公式	(106)
§ 7.3 排列与组合的应用问题	(110)

8	数列与极限	杨佩祥 (121)
§ 8.1	数列的通项公式.....	(121)
§ 8.2	等差数列和等比数列.....	(123)
§ 8.3	数列的求和.....	(125)
§ 8.4	极限.....	(129)
§ 8.5	应用问题.....	(133)
9	三角变换	杨海燕 (137)
§ 9.1	适当进行角的变换.....	(137)
§ 9.2	特殊角函数的应用.....	(141)
§ 9.3	灵活应用基本公式.....	(142)
§ 9.4	处理好符号问题.....	(143)
§ 9.5	综合所学, 择优解题.....	(145)
10	解三角形及其应用	杨海燕 (155)
§ 10.1	三角形中的边角关系	(155)
§ 10.2	解三角形	(164)
§ 10.3	解三角形的应用	(167)
11	立体几何总复习的若干要点	王峰、徐金碧 (173)
§ 11.1	识图和画图	(173)
§ 11.2	线面垂直和平行关系 的判定与应用	(175)
§ 11.3	角和距离的计算	(178)
§ 11.4	截面问题	(186)

12	类比法和隔离法在立体几何中的应用仇炳生 (191)
§ 12.1	类比法 (191)
§ 12.2	隔离法 (197)
§ 12.3	一点说明 (205)
13	解析法求轨迹徐金碧 (209)
§ 13.1	应用直角坐标系求轨迹 的基本方法 (210)
§ 13.2	参数法 (216)
§ 13.3	综合题选解 (221)
14	在解析几何中如何减少计算量仇炳生 (225)
§ 14.1	建立适当的坐标系 (227)
§ 14.2	参数方程的应用 (230)
§ 14.3	合理制定解题方案 (236)
15	形数结合, 开拓思路仇炳生 (245)
§ 15.1	一道高考试题的启示 (245)
§ 15.2	形数结合法在解析几何中的应用 ... (246)
§ 15.3	形数结合法在代数和三角中 的应用 (250)
§ 15.4	形数结合法在极值问题中的应用 ... (254)
§ 15.5	形数结合在解选择题、填充题时 的应用 (257)
§ 15.6	扬长避短, 发挥优势 (260)

16 微积分初步复习纲要.....徐金碧 (263)

§ 16.1 掌握基本概念 (263)

§ 16.2 熟练掌握求导方法 (265)

§ 16.3 一阶导数的应用 (268)

§ 16.4 综合题选解 (273)

§ 16.5 关于积分部分的复习 (275)

【附录】

综合练习题 (280)

练习题答案 (287)

1

数的性质及其应用

从自然数集扩充到复数集的过程中，数集越来越复杂，其应用也越来越广泛，复杂中包含了简单，解决复杂问题总离不开基本概念和基本性质。因此，掌握各数集的性质及它们之间的联系是很重要的。

§ 1.1 数集的发展及其相互联系

1. 数集的扩充

从自然数集(N)，经整数集(Z)，有理数集(Q)，实数集(R)到复数集(C)逐步完成了数集的扩充。在数集扩充的顺序中，前者是后者的真子集，即有

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

一个集合对于某个运算是可以施行的，是指这集合中的元素，经该运算后，其结果仍属于这集合。例如，在自然数集中加法和乘法运算是可施行的，而减法则未必。如 $2-3=-1$ ， 2 和 $3 \in N$ ，但差 $-1 \notin N$ 。数集扩充的内在因素正是为了解决运算的可施行性。

运算贯穿于解题过程的始终，但运算在一个数集中，并不总是可行的。在解题时，应注意被解的题要求在什么数集内给出解答。

【例1】 设 $f(x)=18x^5+9x^4-32x-16$ ，分别在整数

集, 有理数集, 实数集, 复数集内把 $f(x)$ 分解因式, 並分别在上述数集内求出方程 $f(x)=0$ 的根.

$$[\text{解}] \quad f(x) = (2x+1)(3x^2-4)(3x^2+4) \quad (1)$$

$$= (2x+1)(\sqrt{3}x-2) \times (\sqrt{3}x+2)(3x^2+4) \quad (2)$$

$$= (2x+1)(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2) \times (\sqrt{3}x-2i)(\sqrt{3}x+2i) \quad (3)$$

$\therefore f(x)$ 在整数集或有理数集内, 可分解为 (1) 式;
在实数集内可分解为 (2) 式; 在复数集内可分解为 (3) 式.
请读者自己确定方程 $f(x)=0$ 在指定数集内的根.

【例2】 设 x_1, x_2 是 $x^2 - x \sin \alpha + \sin 2\alpha = 0$ 的两根,

$$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 求不等式}$$

$$\log_{x_1+x_2} \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \log_{x_1+x_2} \frac{x_2}{\sqrt{2}} > 1$$

成立时, α 的范围.

【解】 按题意得

$$\begin{cases} \Delta = \sin^2 \alpha - 4 \sin 2\alpha \geq 0 & (1) \\ x_1 + x_2 = \sin \alpha > 0 & (2) \\ x_1 x_2 = \sin 2\alpha > 0 & (3) \end{cases}$$

$$\therefore \alpha \in (0, \pi/2)$$

$$\therefore \text{由 (1) 得 } \arctg 8 \leq \alpha < \pi/2$$

$$\therefore \log_{x_1+x_2} \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \log_{x_1+x_2} \frac{x_2}{\sqrt{2}} = \log_{x_1+x_2} \frac{x_1 x_2}{2}$$

$$= \log_{\sin \alpha} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha) = 1 + \log_{\sin \alpha} \cos \alpha > 1$$

$\therefore$ 这是一绝对不等式, 所求 α 的范围为

$$\arctan 8 \leq \alpha < \pi/2$$

一元二次方程的韦达定理，对于实根或复根均成立。例2中，並未指明 x_1, x_2 是方程 $x^2 - x \sin \alpha + \sin 2\alpha = 0$ 在哪个数集内的根。若不注意判断 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ ，仅作形式上的推导，会得到 α 的范围是 $(0, \pi/2)$ 的错误结论。

2. 数集间问题的转化

数集的扩充，使我们对数的认识加深了。由于数集之间是互相联系的，使我们有可能把复杂问题转化为简单的问题，给分析、解决问题带来灵活性。

复数都具有 $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的形式，故根据复数相等的充要条件可把复数问题转化为相应的实数问题。

【例3】解方程 $Z^2 - |Z|^2 = \bar{Z}$

〔解〕设 $Z = a + bi$ $a, b \in \mathbb{R}$ ，则原方程为

$$\begin{aligned} (a+bi)^2 - (a^2+b^2) &= a-bi \\ -2b^2 + 2abi &= a-bi \end{aligned}$$

又 $a, b \in \mathbb{R}$

$$\therefore \begin{cases} -2b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$$

由此解得： $Z = 0, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ 。

【例4】设复数 α 所表示的点，在连接点 $1+i$ 和 $1-i$ 的线段上运动，求 α^2 所表示的点的轨迹，並指出它是什么曲线。

〔解〕设轨迹上任意一点所对应的复数为

$$Z = x + yi \quad x, y \in \mathbb{R}$$

由题意可设 $\alpha = 1 + ti, -1 \leq t \leq 1$,

$$\therefore x + yi = (1 + ti)^2 = 1 - t^2 + 2ti$$

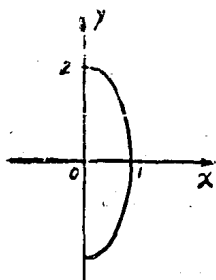


图1-1

$$\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=2t \end{cases}$$

消去 t , 得 $y^2 = -4(x-1)$, $0 \leq x \leq 1$.

$\therefore$ 所求轨迹为一段抛物线弧 (如图 1-1).

我们比较熟悉实数集, 解题方法也
多些, 因而把一些复数问题转化为实数
问题, 往往容易获解, 如例 4 就是通过解析法求解的. 而有
些实数问题也可转化为复数问题来解决 (见例 20 和例 21).

任何一个有理数总可以表示为两个整数之比的形式, 它
或是有限小数 (包括整数), 或是无限循环小数. 反之亦
然. 因此, 有理数问题又可转化为整数问题.

【例 5】 设 $y=f(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, 若 $n \in \mathbb{Z}$ 时, $f(x^n)$
 $=nf(x)$ 成立, 求证该式当 $n \in \mathbb{Q}$ 时也成立.

〔证〕

设有理数 $a = \frac{q}{p}$, p 和 q 为互质的整数

$$\because x \in \mathbb{R}^+ \quad \therefore x^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{又 } q \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore f\left[\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^q\right] = qf\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\text{又} \quad f(x) = f\left[\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^p\right] = pf\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\therefore f\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p}f(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x^a) &= f\left(x^{\frac{q}{p}}\right) = \frac{q}{p}f(x) \\ &= af(x) \end{aligned}$$

即本题得证。

§ 1.2 自然数集、整数集 和数学归纳法

自然数集和整数集有一个共同特性：相邻两数之差为1。由此可得推论：设 $m, n \in \mathbb{Z}$ ，若 $m > n$ ，则有 $m \geq n + 1$ 。更重要的是，由于相邻两数之差为常数，为递推创造了条件，使数学归纳法在自然数集或整数集中得到广泛应用。

1. 数学归纳法的原理

应用数学归纳法证明命题 $f(n) (n \in \mathbb{N})$ 的步骤是：

(1) 验证当 $n = n_0$ 时命题 $f(n)$ 成立，这里 n_0 是某一自然数；

(2) 假设当 $n = k$ 时命题 $f(n)$ 成立，即 $f(k)$ 正确，在这假设下可推出当 $n = k + 1$ 时，命题 $f(n)$ 也成立，即 $f(k + 1)$ 正确；

(3) 根据 (1)、(2)，对于一切 $n \geq n_0$ 的自然数，命题 $f(n)$ 是成立的。

在应用数学归纳法时，必须注意以下几点：

第一，证明步骤中，三条缺一不可。其中 (1) 为归纳基础，若 $n_0 = 1$ ，则证得的结论对一切自然数均成立。一般， n_0 应根据具体命题的性质而定，仅有 (1)，只证明了特殊的命题。(2) 是归纳的依据，其中所作的假设“当 $n = k$ 时，命题 $f(n)$ 成立”叫做归纳假设。特别要注意 (3) 也是不可少的。

第二，数学归纳法是针对与自然数 n 有关的命题的一种

证明方法，不难理解：

若把上述证明步骤中的 (1)、(2) 改为

(1) 验证当 $n=m$ 时，命题 $f(n)$ 成立， $m \in \mathbb{Z}$ ；

(2) 假设 $n=k$ 时命题 $f(n)$ 成立，即 $f(k)$ 正确，再证明 $n=k+1$ 时命题 $f(n)$ 也成立，则可知当 $n \geq m$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时，命题 $f(n)$ 正确。

第三，证明 $f(k+1)$ 正确时，必须应用归纳假设。这是我们由“ $f(n_0)$ 正确”递推到“ $f(n)$ 正确”的关键。否则，就不是应用数学归纳法了。

【例 6】应用数学归纳法证明

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

错误的证明

(1) 验证 $n=1$ 时命题成立，

(2) 设 $n=k$ 时，命题成立，即

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^k} = \frac{\sin \alpha}{2^k \sin \left(\frac{\alpha}{2^k} \right)}$$

当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^k} \cos \frac{\alpha}{2^{k+1}} \\ &= \frac{2^{k+1} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^{k+1}} \sin \frac{\alpha}{2^{k+1}}}{2^{k+1} \sin \frac{\alpha}{2^{k+1}}} \\ &= \frac{2^k \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^k} \sin \frac{\alpha}{2^k}}{2^{k+1} \sin \frac{\alpha}{2^{k+1}}} = \cdots \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{2^{k+1} \sin \frac{\alpha}{2^{k+1}}}$$

即当 $n=k+1$ 时, 命题亦成立.

根据 (1)、(2), 对一切自然数 n 命题成立.

上述证明的错误在于没有应用归纳假设, 使递推中断.

若把 $k+1$ 改为 n , 则步骤 (2) 中的推导可作为原等式的证法之一, 但这是不合题意的证明. 应将步骤 (2) 中推导 $n=k+1$ 时的方法更改如下:

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^k} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^{k+1}} \\ &= \frac{\sin \alpha}{2^k \sin \frac{\alpha}{2^k}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^{k+1}} \\ &= \frac{\sin \alpha}{2^k \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2^{k+1}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^{k+1}}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^{k+1}} \\ &= \frac{\sin \alpha}{2^{k+1} \sin \frac{\alpha}{2^{k+1}}} \end{aligned}$$

2. 如何应用数学归纳法

应用数学归纳法证明的命题, 必须是与自然数集或整数集有关的命题.

【例 7】求证 n 为非负整数时, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ 被 133 整除.

〔证〕

(1) 易证 $n=0$ 时, 命题正确 (请读者给出).

(2) 设 $n=k$ 时, $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ 能被 133 整除.