体育运动学校试用教材

数　学

第三册

体育运动学校《数学》教材编写组编

体育运动学校试用教材
数　　学
（第三册）
体育运动学校《数学》教材编写组编
人民体育出版社出版
河北新华印刷一厂印刷
新华书店北京发行所发行
*
787×1092毫米　32开本　$5\frac{4}{32}$印张　100千字
1987年6月第1版　　1987年6月第1次印刷
印数：1—15,100 册
*
统一书号：7015·2446　　定价：0.66 元

前　言

为提高体育运动学校的教学质量，加速培养有文化的高水平运动后备人才，遵照 1985 年全国中专教材规划会议精神和体育运动学校办校方案的规定，编写了这套全国体育运动学校文化课教材。本教材是以普通中学课本的乙种本为蓝本，并参考其它中专教材，根据体育运动学校的实际，作了适当的取舍和必要的修改。

这套《数学》教材共分四册，这是第三册，内容包括三角函数的图象和性质；两角和与差的三角函数；反三角函数和简单三角方程；数列与数学归纳法；排列、组合、二项式定理等章节。为了因材施教，使数学教材更富有适应性和稳定性，编写了带“※”号的章节，供教学时根据实际情况选用。本书的习题分练习和习题两类，练习供课堂练习用，习题主要供课堂作业用。此教材供从初中三年级办起的四年制体育运动学校使用，其它学制的体育运动学校也可选用。

本教材由国家体委群体司组织体育运动学校《数学》教材编写组集体编写。参加编写的有（按姓氏笔划排列）：武汉市体育运动学校的冯锡慈、天津市体育运动学校的许致中、吉林省体育运动学校的谷玉兰、辽宁省体育运动学校的张道翰、湖北省体育运动学校的曾庆同。最后经国家教委聘任的全国中等专业学校《数学》学科课程组成员张齐金审查修改定稿。

本书系试用教材。由于编写的时间紧迫，编者的业务水

平所限，不妥之处在所难免，恳请大家在试用中提出批评，予以指正，以便今后作进一步的修订。

体育运动学校《数学》教材编写组

目　录

第八章　三角函数的图象和性质……………………（ 1 ）
第九章　两角和与差的三角函数……………………（ 29 ）
※**第十章**　反三角函数和简单三角方程………………（ 63 ）
　一　反三角函数…………………………………………（ 63 ）
　二　简单三角方程………………………………………（ 81 ）
第十一章　数列与数学归纳法…………………………（ 95 ）
　一　数列…………………………………………………（ 95 ）
　二　数学归纳法…………………………………………（119）
第十二章　排列，组合，二项式定理…………………（126）
　一　排列与组合…………………………………………（126）
　二　二项式定理…………………………………………（152）

第八章　三角函数的图象和性质

8.1　正弦函数、余弦函数的图象和性质

我们利用单位圆中的正弦线、余弦线来作正弦函数、余弦函数的图象。

在直角坐标系的 x 轴上任取一点 O_1，以 O_1 为圆心作单位圆（见图 8-1 的上半部分），从这个圆与 x 轴的交点 A 起

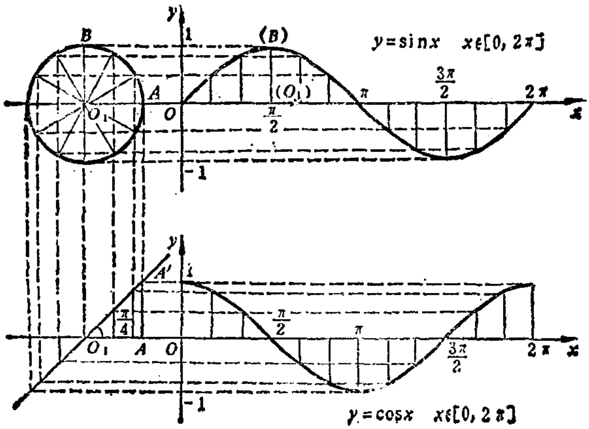

图 8-1

把圆分成 12 等份（等份越多，作出的图象越精确）。过圆上的各分点作 x 轴的垂线，可以得到对应于角 0，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，……，2π 的正弦线及余弦线（例如 O_1B 对应于角 $\frac{\pi}{2}$ 的正弦

线）。相应地，再把 x 轴上从 0 到 2π 这一段($2\pi\approx6.28$)分成 12 等份（例如，从原点起向右的第四个点，就是对应于角$\frac{\pi}{2}$的点）。把角 x 的正弦线向右平行移动，使得正弦线(是规定了方向的线段）的起点与 x 轴上的点 x 重合(例如，把单位圆中的正弦线 O_1B 向右平行移动，使得 O_1 与 x 轴上的点$\frac{\pi}{2}$重合)，再用光滑曲线把这些正弦线的终点连结起来，就得到了正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi)$ 的图象。

为了作出余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0,\ 2\pi)$ 的图象，我们把坐标系向下平移（见图 8-1 的下半部分)，过点 O_1 作与 x 轴的正半轴成$\frac{\pi}{4}$角的直线，又过余弦线 O_1A 的终点 A 作 x 轴的垂线，它与前面所作的直线交于 A'。那么，规定了方向的线段 $O'A$ 与 AA' 的长度相等且方向同时为正。这样，我们就把余弦线 O_1A “竖立”起来成为 AA'。用同样的方法，将其他的余弦线也都“竖立”起来。再将它们平移，使起点与 x 轴上的点 x 重合，最后用光滑曲线把这些竖立起来的线段的终点连结起来，就得到余弦函数 $y=\cos x, x\in[0,\ 2\pi)$ 的图象。

因为终边相同的角的三角函数值相等，所以正弦函数 $y=\sin x$ 在…，$x\in[-2\pi,\ 0)$，$x\in[2\pi,\ 4\pi)$，$x\in[4\pi,\ 6\pi)$，…时的图象，与 $x\in[0,\ 2\pi)$ 时的图象的形状完全一样，只是位置不同。余弦函数的情况也相同。我们把 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $x\in[0,\ 2\pi)$ 时的图象向左和向右平行移动 2π，4π，…，就可以得到 $y=\sin x$，$x\in R$ 及 $y=\cos x$，$x\in R$ 的图象（图 8-2)。

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in R$ 和余弦函数 $y=\cos x$，$x\in R$

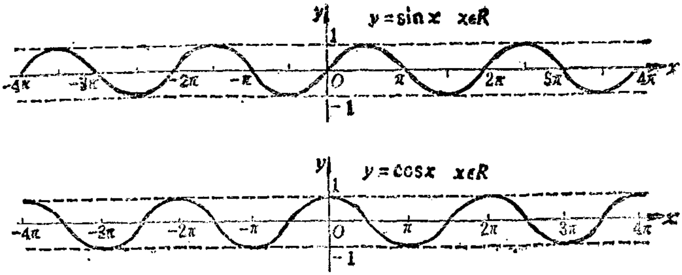

图 8-2

的图象分别叫做**正弦曲线和余弦曲线**。

练　习

用描点法作出正弦函数 $y=\sin x$, $x\in[0,\ 2\pi)$ 和余弦函数 $y=\cos x$, $x\in[0,\ 2\pi)$ 的图象。

由图 8-2 可以看出，下面五个点在确定图象形状时起着关键的作用：

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0).$$

这五点描出后，正弦函数 $y=\sin x$, $x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象的形状就基本上确定了；

$(0,1)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(\pi,\ -1)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $(2\pi,\ 1)$ 这五点描出后，余弦函数 $y=\cos x$, $x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象的形状就基本上确定了。

因此，在精确度要求不太高时，我们常常先描出这五个点，然后用光滑曲线将它们连结起来，就得到在相应区间内的正弦函数、余弦函数的简图。今后，我们作正、余弦函数的简图，一般都象这样先找出在确定图象形状时起着关键作

用的五个点，然后描点作图。

例 1 作下列函数的简图：

(1) $y=1+\sin x$, $x\in[0,2\pi]$;

(2) $y=-\cos x$, $x\in[0, 2\pi]$.

解：(1) 列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点作图（图 8-3）：

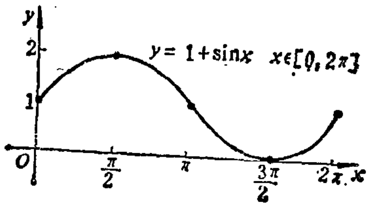

图 8-3

(2) 列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

描点作图（图 8-4）：

下面来研究正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的主要性质。

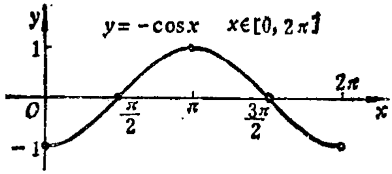

图 8-4

(1) 定义域

函数 $Y=\sin x$ 及 $Y=\cos x$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$。

(2) 值域

因为在单位圆中，正弦线、余弦线的长都是等于或小于半径的长 1 的，所以 $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$, 即 $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$, $-1\leqslant \cos x\leqslant 1$. **函数 $y=\sin x$, $x\in R$ 及 $y=\cos x$, $x\in R$ 的值域都是 $[-1, 1]$。**

函数 $y=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$ 时取最大值 $y=1$；在 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$ 时取最小值 $y=-1$。

函数 $y=\cos x$ 在 $x=2k\pi$, $k\in Z$ 时取最大值 $y=1$；在 $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$ 时取最小值 $y=-1$。

(3) 周期性

由诱导公式 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$, $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ $(k\in Z)$ 知道，正弦函数值、余弦函数值是按照一定的规律不断重复出现的，这是正弦函数和余弦函数的重要性质。

一般地，对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得当 x 取定义域内的每一个值时，

$$f(x+T)=f(x)$$

都成立，那么就把函数 $y=f(x)$ 叫做**周期函数**，不为零的常数 T 叫做这个函数的**周期**。例如，对于正弦函数 $\sin x$, $x\in R$ 来说，2π，4π，…，-2π，-4π，…都是它的周期。一般地，$2k\pi(k\in Z$，且 $k\neq 0)$ 都是它的周期。对于一个周期函数来说，如果在所有的周期中存在着一个最小的正数，就把这个最小的正数叫做**最小正周期**。例如，2π 是正弦函数 $\sin x$, $x\in R$ 的所有周期中的最小正数，因而 2π 是这个函数的最小正周期。

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in R$ 和余弦函数 $y=\cos x$，$x\in R$ 都是周期函数，$2k\pi(k\in Z$ 且 $k\neq 0)$ 都是它们的周期，最小正周期是 2π。❶

今后我们谈到三角函数的周期时，一般指的是三角函数的最小正周期。

(4) 奇偶性

由诱导公式 $\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$ 可知，**正弦函数 $y=\sin x$，$x\in R$ 是奇函数，余弦函数 $y=\cos x$，$x\in R$ 是偶函数。**

反映在图象上，**正弦曲线关于坐标系原点 O 对称，余函曲线关于 y 轴对称。**

(5) 单调性

由正弦曲线可以看出：当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时，曲线逐渐上升，$\sin x$ 由 -1 增大到 1；当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，曲线逐渐下降，$\sin x$ 由 1 减小到 -1。这个变化情况如下表所

---

❶ 这个结论可以证明，本书从略。

示：

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

由正弦函数的周期性知道：

正弦函数 $y=\sin x$ 在每一个闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in Z)$ 上，都从 -1 增大到 1，是增函数；在每一个闭区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3k}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in Z)$ 上，都从 1 减小到 -1，是减函数。也就是说，正弦函数 $y=\sin x$ 的单调区间是 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 及 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in Z)$。

类似地，由余弦曲线可以看出，函数 $y=\cos x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的变化情况如下表所示：

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

由余弦函数的周期性知道：

余弦函数 $y=\cos x$ 在每一个闭区间 $[(2k-1)\pi,\ 2k\pi]$，$(k\in Z)$ 上，都从 -1 增大到 1，是增函数；在每一个闭区间 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$(k\in Z)$ 上，都从 1 减小到 -1，是减函数。也就是说，余弦函数 $y=\cos x$ 的单调区间是 $[(2k-1)\pi,$

$2k\pi$]及[$2k\pi$, $(2k+1)\pi$], ($k\in\mathbf{Z}$).

例 2 求使下列函数取得最大值的 x 的集合，并说出最大值是多少。

(1) $y=\cos x+1$; (2) $y=\sin 2x$.

解：(1) 使函数 $y=\cos x$ 取得最大值的 x，就是使函数 $y=\cos x+1$ 取得最大值的 x，因而使 $y=\cos x$ 取得最大值的 x 的集合 $\{x|x=2k\pi,\ k\in Z\}$，就是使 $y=\cos x+1$ 取得最大值的 x 的集合。

函数 $y=\cos x+1$ 的最大值是 $1+1=2$。

(2) 令 $z=2x$，那么使函数 $y=\sin z$ 取得最大值的 z 的集合是 $\{z|z=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z\}$。由

$$2x=z=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

得

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,$$

就是说，使得 $y=\sin 2x$ 取得最大值的 x 的集合是

$$\left\{x|x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z\right\}.$$

函数 $y=\sin 2x$ 的最大值是 1。

例 3 求下列函数的周期：

(1) $y=3\cos x$; (2) $y=\sin 2x$;

(3) $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

解：(1) 因为 $\cos x$ 的最小正周期是 2π，所以当自变量

$x(x\in R)$增加到$x+2\pi$且必须增加到$x+2\pi$时，函数$\cos x$的值重复出现，函数$3\cos x$的值也重复出现，因此$y=3\cos x$的周期（即最小正周期，下同）是2π。

（2）把$2x$看成是一个新的变量z，那么$\sin z$的最小正周期是2π。就是说，当z增加到$z+2\pi$且必须增加到$z+2\pi$时，函数$\sin z$的值重复出现。而$z+2\pi=2x+2\pi=2(x+\pi)$，所以当自变量x增加到$x+\pi$且必须增加到$x+\pi$时，函数值重复出现，因此$y=\sin 2x$的周期是π。

（3）把$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}$看成是一个新的变量$z$，那么$2\sin z$的周期是$2\pi$。由于

$$z+2\pi=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi=\frac{1}{2}(x+4\pi)-\frac{\pi}{6},$$

所以当自变量x增加到$x+4\pi$且必须增加到$x+4\pi$时，函数值重复出现，因此$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$的周期是$4\pi$。

我们看到，例3中函数周期的变化仅与自变量x的系数有关．一般地，**函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$或$y=A\cos(\omega x+\varphi)$（其中$A$，$\omega$，$\varphi$为常数，且$A\neq 0$，$\omega>0$，$x\in R$）的周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$。**

事实上，设$\omega x+\varphi=z$，那么函数$A\sin z$或$A\cos z$的周期是2π，但是$\omega x+\varphi+2\pi=\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi$，所以当自变量$x$增加到$x+\frac{2\pi}{\omega}$且必须增加到$x+\frac{2\pi}{\omega}$时，函数值重复出现，因此函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi) \quad 或 \quad y=A\cos(\omega x+\varphi)$$

的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$。根据这个结论，我们可以由正弦函数式或余弦函数式直接写出它的周期。如在上面的例3中，(1)的周期是 2π，(2)的周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，(3)的周期是 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$。

例4 不通过求值，指出下列各式大于零，还是小于零。

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$;

(2) $\cos\left(-\frac{23}{5}\pi\right)-\cos-\left(\frac{17}{4}\pi\right)$.

解：(1) 因为 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{2}$，且正弦函数 $y=\sin x$ 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时是增函数，所以

$$\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right),$$

即

$$\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)>0.$$

(2) $\cos\left(-\frac{23}{5}\pi\right)=\cos\frac{23}{5}\pi=\cos\frac{3}{5}\pi$,

$$\cos\left(-\frac{17}{4}\pi\right)=\cos\frac{17}{4}\pi=\cos\frac{1}{4}\pi.$$

因为 $0<\frac{1}{4}\pi<\frac{3}{5}\pi<\pi$，且余弦函数 $y=\cos x$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上是减函数，所以

$$\cos\frac{3}{5}\pi<\cos\frac{1}{4}\pi,$$

即

$$\cos\frac{3}{5}\pi-\cos\frac{1}{4}\pi<0,$$

$$\therefore\quad \cos\left(-\frac{23}{5}\pi\right)-\cos\left(-\frac{17}{4}\pi\right)<0.$$

练　习

1. 作下列函数的简图($x\in[0,\ 2\pi]$)：

   (1) $y=-\sin x$；(2) $y=1+\cos x$；(3) $y=2\sin x$。

2. 观察正弦曲线和余弦曲线，写出满足下列条件的 x 的区间：

   (1) $\sin x>0$；　　(2) $\sin x<0$；

   (3) $\cos x>0$；　　(4) $\cos x<0$。

3. 下列各等式能否成立？为什么？

   (1) $2\cos x=3$；　　(2) $\sin^2 x=0.5$。

4. 求使下列函数取得最小值的 x 的集合，并说出函数的最小值是多少。

   (1) $y=2\sin x$；　　(2) $y=2-\cos\frac{x}{3}$。

5. 等式 $\sin(30°+120°)=\sin 30°$ 是否成立？如果这个等式成立，能不能说 $120°$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 的周期？为什么？

6．求下列函数的周期：

(1) $y=\sin 3x$；　　(2) $y=\cos\frac{x}{3}$；

(3) $y=3\sin\frac{x}{4}$；　　(4) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{10}\right)$；

(5) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；　　(6) $y=\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$。

7．不通过求值，比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\sin 250^\circ$，　　$\sin 260^\circ$；

(2) $\cos\frac{15}{8}\pi$，　　$\cos\frac{14}{9}\pi$；

(3) $\cos 515^\circ$，　　$\cos 530^\circ$；

(4) $\sin\left(-\frac{54}{7}\pi\right)$，　　$\sin\left(-\frac{63}{8}\pi\right)$。

8.2　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

在物理和工程技术的许多问题中，都要遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的函数（其中 A，ω，φ 是常数）。例如，物体作简谐振动时位移 y 与时间 x 的关系，交流电中电流强度 y 与时间 x 的关系等，都可用这类函数来表示。下面来讨论这类函数的简图的作法。

例 1　作函数 $y=2\sin x$ 及 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的简图。

解： 函数 $y=2\sin x$ 及 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的周期 $T=2\pi$，我们先来作 $x\in[0,2\pi]$ 时函数的简图。