全国高等教育自学考试教材

经济管理类专业

JINGJIGUANLILEIZHUANYEJIAOCAI

姚慕生　高汝熹 编

高等数学（二）

第一分册　线性代数

武汉大学出版社

全国高等教育自学考试教材

高等数学

（二）

第一分册　线性代数

（经济管理类专业）

姚慕生　高汝熹　编

武汉大学出版社
1989年·武昌

图书在版编目(CIP)数据

高等数学第一分册：线性代数/姚慕生，高汝熹编一武汉：武汉大学出版社，1989.12

ISBN 7-307-00494-1

Ⅰ.高…

Ⅱ.①姚… ②高…

Ⅲ.①高等数学一多卷书一教材 ②线性代数一教材

Ⅳ.O13 O151.2

武汉大学出版社出版发行

（430072 武昌 珞珈山）

湖北科技出版社黄冈印刷厂印刷

（436100 湖北省黄冈市宝塔路85号）

1989年12月第1版 1997年1月第14次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:10.75

字数:270千字 印数:305601－335600

ISBN 7-307-00494-1/O·45 定价:11.50元

内容提要

本书系按国家教委颁布的关于经济、管理类大学本科《高等数学（二）自学考试大纲》编写的。全书共五章：第一章讲行列式论；第二、三、五章介绍矩阵论的基础知识，包括矩阵的运算、矩阵的初等变换、线性方程组的求解与解的结构问题以及矩阵的特征值及实二次型理论，在论述中充分发挥了初等变换的作用，易为初学者所接受；第四章择要引进了线性空间的基本概念。

本书可供参加经济、管理类的自学考试者作教材用，对同类专业的大学生也是一本很有用的参考书。

出版前言

高等教育自学考试教材建设是高等教育自学考试工作的一项基本建设。经国家教育委员会同意，我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材，以满足社会自学和适应考试的需要。《高等数学（二）》是为高等教育自学考试经济管理类专业组编的一套教材中的一种。这本教材根据专业考试计划，从造就和选拔人才的需要出发，按照全国颁布的《高等数学（二）自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点，组织高等院校一些专家学者集体编写而成的。

经济管理类专业《高等数学（二）》自学考试教材，是供个人自学、社会助学和国家考试使用的。无疑也适用于其他相同专业方面的学习需要。现经审定同意予以出版发行。我们相信，随着高教自学考试教材的陆续出版，必将对我国高等教育事业的发展，保证自学考试的质量起到积极的促进作用。

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试，希望得到社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善。

全国高等教育自学考试指导委员会

一九八八年二月

序　言

本书是按照国家教委对经济、管理类大学本科高等数学（二）自学考试大纲编写的。众所周知，线性代数这一数学工具在经济科学、管理科学中有着广泛的应用。著名的投入一产出模型就是以线性代数理论为基础的。因此，学好这一门课程不仅对学习后继课程是必不可少的，而且对掌握现代经济理论并应用于实际也是很有必要的。

本书力求以通俗的语言向读者介绍线性代数最基础的知识。全书共分五章，外加一个附录。第一章的内容以行列式为中心，介绍了行列式的概念、性质与计算以及用克莱姆法则求解线性方程组的方法。第二章介绍了矩阵这一十分有用的工具，讨论了矩阵的运算及初等变换。第三章以矩阵为工具，进一步讨论了线性方程的求解与解的结构。第四章引进了线性空间，介绍了一些最常用的基本概念与方法。第五章简要地介绍了矩阵特征值理论与实二次型的理论。学完这些内容，可为读者以后进一步的学习打下必要的基础。考虑到实用的需要，我们在附录中介绍了几种常用的线性代数的数值方法。读者可用这些方法借助于电子计算机来处理实际工作中遇到的问题。读者只要具备高中数学的基础知识就可阅读本书，为了使对中学数学已比较生疏了的读者能顺利地阅读本书，书的开头还安排了预备知识。

在内容的编写上，我们力求做到科学性与通俗性结合，由浅入深、逐步提高。对一些比较困难的概念，尽量多举例子。对一些复杂的证明都打上了 * 号。初学者只需记住结论、弄清含义就

可以了。本书中个别章节也打上了*号对这些章节初学者可以跳过去，也不作考试的要求。本书除了可供经济、管理类自学考试考生作教材外，也可供经济、管理类的大学生作参考书。

编 者 1987.12.

目　　录

预 备 知 识

一、和号$\sum$

为书写与运算的简便，我们引进求和号“$\sum$”（读作“西格玛”）来表示若干个数的和，即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

这里，$\sum$表示求和，$i=1$ 表示a_i 的足标i 从1 开始，n 表示到a_n 为止. 一般都将始足标写在$\sum$的下方，而终足标写在$\sum$的上方. 如：

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1,$$

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = a_1 + a_2,$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

求和号有以下二个简单的性质，读者不难自己验证：

性质 1 $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$

性质 2 $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$，这里$c$ 是不随足标i 变化的一个常数.

性质 3 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \quad (1 \leqslant k < n)$.

对同一个和式，有时因为运算的需要，可以采用不同的表示方式，主要有两种变化：

第一种：$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 与 $\sum_{j=1}^{n} a_j$ 都表示和式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，因此

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

在这种变化中，虽然足标符号不同，一个用 i，另一个用 j，但实际上这只是足标符号形式上的不同，实质上都表示从 a_1 一直加到 a_n，因此是一回事.

第二种：$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$ 与 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 看上去似乎不一样，但仔细算一下，发现在 $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$ 中，$i=0$ 时 $a_{i+1}=a_1$，因此求和仍从 a_1 开始；终足标 $i+1=(n-1)+1=n$，因此求和也到 a_n 为止. 这表明

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

在这种变化中，似乎求和号上、下方的数字变化了，但由于 a_i 写成了 a_{i+1}，最后结果仍不变. 我们还可以举出这类变化的其它的例子：

$$\sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=3}^{n+2} a_{i-2} = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

等等.

总之，初学者切不要被形式上的不同所迷惑. 关键是要看被求和的项究竟是什么. 读者如一时搞不清楚，可将和号展开写成具体的式子，从而认定其异同.

在本课程中，有时还要采用双重和号. 双重和号的使用往往比较复杂，我们需要熟悉它.

设有 mn 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，其和记为

$$\begin{aligned}S=&a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+\\&a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}+\\&\cdots+\\&a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}.\end{aligned}$$

先用单和号将每一行之和写出，如第一行为 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}$，第二行为 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}$，等等，于是

$$S=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}+\sum_{j=1}^{n}a_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{n}a_{mj}.$$

对这个和式又可写为

$$S=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big),\tag{1}$$

或记为

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.$$

当然在求 S 的过程中，我们也可以先对列项加然后再求和. 如第一列可写为 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i1}$，第二列可写为 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i2}$，等等，于是

$$\begin{aligned}S&=\sum_{i=1}^{m}a_{i1}+\sum_{i=1}^{m}a_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}a_{in}\\&=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\Big)\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}.\end{aligned}\tag{2}$$

将(1)式与(2)式相比较得到下列等式：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}.\tag{3}$$

注意(3)式中二边的 $\sum$，它表明此时求和号的次序是可以交换的.

下面我们来看一个稍为复杂一点的双重和式

$$
\begin{aligned}
S=c_{21}+ & \\
& c_{31}+c_{32}+ \\
& c_{41}+c_{42}+c_{43}+ \\
& \cdots+ \\
& c_{n1}+c_{n2}+c_{n3}+\cdots+c_{n,n-1}.
\end{aligned}
$$

先对行写出和式可求得

$$S=\sum_{k=1}^{1} c_{2k}+\sum_{k=1}^{2} c_{3k}+\cdots+\sum_{k=1}^{n-1} c_{nk}=\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}.$$

再对列先写出和式有

$$S=\sum_{i=2}^{n} c_{i1}+\sum_{i=3}^{n} c_{i2}+\cdots+\sum_{i=n}^{n} c_{i,n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} c_{ik}.$$

于是又可得到等式：

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} c_{ik}, \tag{4}$$

这个等式我们以后要用到.

二、复数

在中学里我们已经学习过有理数、实数、复数的概念. 所有有理数全体我们称为**有理数域**,所有实数全体我们称为**实数域**,所有复数全体则称之为**复数域**.

所谓复数域，是指形如

$$a+b\mathrm{i} \quad (\mathrm{i}=\sqrt{-1}，a,b \text{ 为实数})$$

的数的全体. 任意两个复数的加、减、乘、除(零不能做除数)所得的数仍是复数，任意一个复数的开方也仍是复数.

复数域包含实数域，实数域包含有理数域.

复数 $a+b\mathrm{i}$ 中的 a 称为**实部**，b 称为**虚部**. 二个复数相等当且仅当它们的实部相等，虚部也相等. 换句话说，要 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$，

有只有 $a=c$，$b=d$.

复数 $a+bi$ 中若 $a=0$，$b\neq 0$ 则称它为纯虚数；若 $b=0$，就成了实数.

复数 $a+bi$ 的绝对值定义为

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2},$$

绝对值有时又称为"模长".

复数 $a-bi$ 称为复数 $a+bi$ 的共轭复数. 若记 z 是任意一个复数，它的共轭复数记之为 $\bar{z}$. 如

$$\bar{i}=-i,\quad \overline{-i}=i;$$

$$\overline{3+2i}=3-2i,\quad \overline{3-2i}=3+2i;$$

$$\overline{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}=\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i,\quad \overline{\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i}=\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i.$$

显然一个复数的共轭复数的共轭复数就是它自身，即

$$\bar{\bar{z}}=z.$$

一个复数 $z=a+bi$ 是实数当且仅当 $b=0$，这时 $z=a+0\cdot i=a-0\cdot i=\bar{z}$. 反过来若 $\bar{z}=z$，则 $a+bi=a-bi$，由复数相等的条件知 $b=-b$，因此 $b=0$，即这时 z 是一个实数. 于是我们有下列命题：

一个复数 z 是实数当且仅当 $\bar{z}=z$.

一个复数与它的共轭复数间还有如下关系：

(i) 一复数与它的共轭复数相加等于实数.

事实上若 $z=a+bi$，则 $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$，是实数.

(ii) 一复数与其共轭复数的乘积等于实数.

事实上若 $z=a+bi$，则 $z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$，是实数，且等于 $|z|$ 的平方.

三、充分必要条件

在数学命题的叙述中，常常采用"充分必要条件"这个术语.

所谓“充分必要条件”实际上由两部分组成：一是“**充分条件**”，即这个条件如满足，就足以保证命题的正确性；二是“**必要条件**”，即这个条件虽然不一定能保证命题的正确性，但它是必不可少的．换句话说，如果缺少这个条件，命题就肯定不成立．下面我们用具体的例子来说明：

命题　一个三角形是等腰三角形的充分必要条件是它的两个底角相等．

这个命题有两层意思．一是如果一个三角形的两底角相等，则它一定是等腰三角形．也就是说两底角相等是三角形为等腰三角形的充分条件．第二层意思是说若一个三角形是等腰三角形，则它的两底角必相等，即两底角相等是三角形为等腰三角形的必要条件．充分必要条件常简称为充要条件．

要证明一个条件是充分而且必要的，必须从两方面进行论证．一方面必须证明条件是充分的，即若这个条件成立，则结论必正确．另一方面必须证明条件是必要的，即证明若结论为真，则条件必成立．或者证明若条件不成立，结论必不成立．在许多场合，一个条件不一定是结论的充分必要条件，可能只是充分条件，也可能只是必要条件．

命题　一个四边形是正方形的必要条件是四边相等．

在这个命题中，四边相等是一个四边形成为正方形所必不可少的，因而是必要条件．但是四边相等的四边形并不一定是正方形，它可能是菱形．因此四边相等并不是四边形成为正方形的充分条件．

命题　一个四边形为平行四边形的充分条件是它的 4 个角相等．

这里 4 个角相等保证了一个四边形一定是平行四边形，因而是充分条件．但是平行四边形的 4 个角不一定相等，或者说，4 个角不相等的四边形也有可能是平行四边形（只需两对对角相等就可以了）．因此这个条件即 4 个角相等并不是必要条件．

充分必要条件还有另外一种说法，即“当且仅当”．比如上面的第一个命题可说为：一个三角形为等腰三角形当且仅当它的两底角相等．这里“当”的意思即是条件的充分性就是说当这个条件满足时，结论必成立；“仅当”的意思是条件的必要性，即如果条件不满足，结论必不成立．换句话说，结论“仅仅”在这个条件下成立．

四、数学归纳法

数学归纳法是用来论证数学命题的一种常用的方法．

用数学归纳法来论证数学命题，一般分两步来做：首先证明命题对 $n=1$ 正确，这一步叫归纳基础；第二步，假设命题对 $n=k$ 正确（不必证明），从这个假设（又称归纳假设）出发，证明命题对 $n=k+1$ 也正确．这时便完成了命题的证明．

例 1 用数学归纳法证明下列公式对一切 n 均成立：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

证 $n=1$ 时，上式左边 $=1$，右边 $=\frac{1}{2}\times1\times(1+1)=1$．因此公式成立．

现假设 $n=k$ 时公式成立，即 $1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$．当 $n=k+1$ 时，

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=(1+2+3+\cdots+k)+(k+1).$$

由假设，$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$，因此

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1],\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，公式也成立，因而命题得证.

有时归纳基础可能不从 1 开始，比如可能从 $n=2$ 开始，这时就首先需要论证 $n=2$ 时命题的正确性，然后再假设 $n=k$ 时命题正确，进而证明 $n=k+1$ 时也正确. 下面的命题就是这样的例子：

命题 当 $n\geqslant 3$ 时，$2^n>2n$.

这时归纳基础要从 $n=3$ 开始，$n=3$ 时 $2^3=8$，$2\times 3=6$，$8>6$，因此 $2^3>2\times 3$. 然后假定 $n=k$ 时有 $2^k>2k$. 再来看 $n=k+1$ 时的情形. $2^{k+1}=2\cdot 2^k=2^k+2^k$. 由假定 $2^k>2k$，因此 $2^k+2^k>2k+2k$. 由于 $k\geqslant 3$ 时，$2k>2$，故

$$2k+2k>2k+2=2(k+1).$$

于是 $2^{k+1}>2(k+1)$. 命题得证.

在用归纳法论证的过程中，也可用等价的第二数学归纳法的说法：即在归纳基础论证完了后，假设对 $<k$ 的每个自然数 n，命题成立，然后论证 $n=k$ 时命题也成立. 有时甚至说得更简单：假设对小于 n 的每个自然数命题成立，接着论证命题对 n 也成立. 读者在阅读本书时需要注意这些变化.

五、反证法

反证法是又一种论证数学命题的常用方法. 在论证数学命题时有时从命题的条件直接推出结论有困难，或比较繁，就往往采用反证法. 所谓反证法就是先假设结论不真，然后一步一步引出矛盾. 产生矛盾的根源是因为否定了结论，也就是说结论应该是对的. 下面我们举例来说明这一点.

例 2 设在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C>\angle B$，求证：$AB>AC$，即大角所对的边较大.

证 用反证法. 假设 $AB\leqslant AC$，分两种情况来讨论.

第一种情形：若 $AB=AC$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，因此有 $\angle B=\angle C$（等腰三角形底角相等）. 这与已知条件 $\angle C>\angle B$ 矛盾.