

日本中学生数学丛书

1



集合与逻辑

日本中学生数学丛书(1)

集合与逻辑

[日] 横地 清 著

马 忠 林 译

吉林人民出版社

内 容 提 要

《集合与逻辑》一书包括有初等数学中集合、映射、逻辑和证明等四方面内容，作者用现代数学的观点和方法，形象而又系统地阐述了这些专题。这本书为我们从理论上，思考问题的方法上不断提高分析理解能力，增强对事物的逻辑思维能力等是十分有益的。

日本中学生数学丛书(1)

集 合 与 逻 辑

(日)横地清 著

马忠林 译

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 4 1/4印张 73,000字

1980年8月第1版 1980年8月第1次印刷

印数: 1—4,660册

书号: 13091·45 定价: 0.56元

出版说明

为了解国外教学情况，我们组织翻译出版由日本山梨大学教授横地 清主编的一套中学生数学丛书共十二卷，它是日本中学生的数学课外读物。这套丛书是以近代数学的观点和方法，系统地阐述初等数学中的一些重要专题，对我国广大中学生和中学数学教师在理论上和思考分析问题的方法上均有参考价值。

共有十二名同志参加丛书翻译工作，由吉林师大数学系马忠林同志审校，从一九八〇年起陆续出版发行。

吉林人民出版社 一九八〇年元月

目 录

第一章 集合也有运算

§ 1	集合中的集合	1
(1)	全集合与子集合	1
(2)	子集合的个数	4
(3)	交集合与并集合	6
§ 2	集合的代数	8
(1)	集合的表示法	8
(2)	子集合与运算	12
(3)	运算的法则	15
(4)	集合在代数上的应用	19
§ 3	包含关系	23
(1)	元素与特征	23
(2)	包含关系的性质	27
§ 4	元素的个数	31
(1)	一一对应	31
(2)	两个集合的大小	34

第二章 集合的应用

§ 1	直积集合	39
§ 2	映射	42
§ 3	函数	46

第三章 命题及其有关问题

§ 1	命题	50
§ 2	命题的运算	53
	(1) 否定(非)	53
	(2) 合取(与)	54
	(3) 析取(或)	55
§ 3	相等命题	57
	(1) 复合命题的值	57
	(2) 所有的命题	61
	(3) 相等命题	64
	(4) 命题的变形	66
§ 4	推理	68
	(1) 条件式	68
	(2) 推理格式	72
§ 5	侦察	75

§ 6 “所有”与“存在”	79
(1) 全称命题与特称命题	79
(2) 全称命题与特称命题的否定	82
(3) 在推理中的应用	86

第四章 数学的证明

§ 1 什么是证明	91
§ 2 反证法	97
§ 3 几何的证明	105
(1) 证明的必备知识	105
(2) 证明方法的发现	108
(3) 证明问题	115
§ 4 逆命题与逆否命题	120

后 记	127
-----------	-----

编者的话	128
------------	-----

第一章 集合也有运算

§1. 集合中的集合

(1) 全集合与子集合

每当我们听到“集合”这个词时，就联想到学生们跑步去参加学校里朝会的情形。也还想到在野游时，学生们停止游戏聚集在老师身边的情形。从现在起所要讲的“集合”，也和这种集合有关系。但是，它与集合时的动作和口令无关。只把集合后的结果，作为我们所要研究的课题。

在上朝会时，一经喊出“集合”的口令，一年一班的学生就按纵队站在一起了。在野游时，也有同样情形，二年三班的学生站在一起了。二年三班的学生，男生在前面站成两排，女生在后面站成两排。我们要研究，一年一班，二年三班，二年三班的男生，二年三班的女生，这样的集合问题。

怎样作成集合？以图 1① 的小人村为例。这里有九个人，但这个人数并不是什么问题。这些小人在游戏当中，能作成各种集合。图 1② 的左下角在跳舞的小人们作成一个集合。

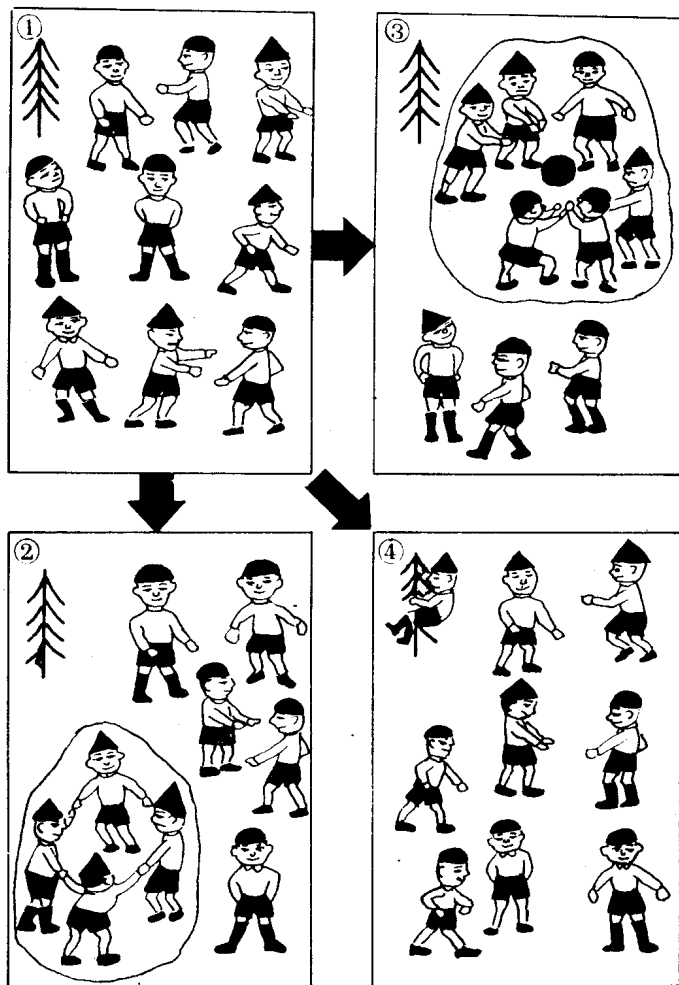


图1 小人村与集合

把这个集合命名为A，可以把它的成员并列着画在下面。

以帽子和鞋为特征来说，

则有：

$A = \{ \text{戴三角帽的小人} \}$

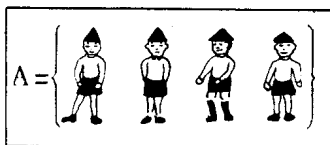


图2 集合A

实际上，在此以外，再没有戴三角帽的小人了。在图1③的右上角也作成集合。

把它命名为B时，则可以说，

$B = \{ \text{穿鞋的小人} \}$ 。

图1④的左上角，只有一个人，但也作成集合。它是，

$C = \{ \text{戴红色三角帽，且穿红靴子的小人} \}$ 。

实际上，在这以外，再没有戴红色三角帽且穿红色靴子的小人了。集合还可以从形式上来考虑。

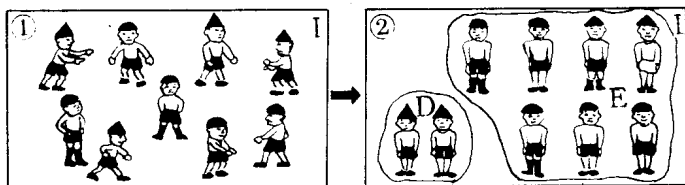


图3 子集合及其余集合

象前页图3①那样，把所有的小人都聚集在矩形的框子里。这个集体可以说是一个集合。只是和前面所说的不同，因为它是全体成员的集体，特称为全集。用I表示。由于确定了全集，所以，由全集的若干个成员所作成的集合，叫做子集合。（简称子集）集合A，B，C都是子集合。

图 3②的左下角，作成了子集合 D 。为了明确起见，用环状线把它围起来。 $D = \{ \text{戴黑色三角帽的小人} \}$ 。

如果确定了集合 D 以后，在集合 I 中剩下的全体成员的集体，仍可看作是一个集合。设它为 E ，当然，它也是一个子集合。

$$E = \{ \text{不戴黑色三角帽的小人} \}。$$

如果将集合 E 加到集合 D 上，则是全集合 I 。于是把集合 E ，叫做集合 D 的余集合（简称余集）。

集合 D 的余集合，用 $\bar{D}$ 表示。读作“ D 的余集合”。即 $\bar{D} = E$ 。

在第 7 页上，集合 A 的余集合 $\bar{A}$ ，是什么样的集体？可以写作：

$$\bar{A} = \{ \text{不戴三角帽的小人} \}。 \quad \text{或}$$

$$\bar{A} = \{ \text{戴圆帽的小人} \}。$$

【想一想】在第 7 页上的 $\bar{B}$ 是什么样的集体？

【略解】 $\bar{B} = \{ \text{穿靴子的小人} \}$ ，还有另外的说法。

（2）子集合的个数

现在来考察在一个全集合里，可作出多少个子集合。如图 4，选择了小狗 a ，布娃娃 b ，喷气式飞机 c ，想把它摆在彩色电视机上。根据全家每个人的意见，用全集合 $I = \{ a, b, c \}$ 的子集合表示。

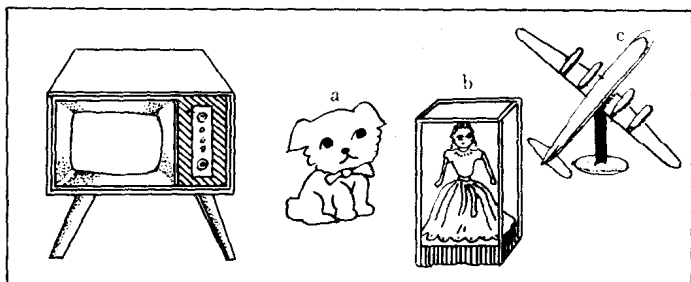


图4 电视机与摆设

“只摆小狗” $\rightarrow \{ a \}$ 。 “摆布娃娃和喷气式飞机” $\rightarrow \{ b, c \}$ 。

“全都摆上” $\rightarrow \{ a, b, c \}$ 。 “什么也不摆” $\rightarrow \{ \}$ 。

因为摆 $\{ a, b, c \}$ 和 $\{ \}$ 也是一种意见，所以，也和其他情形一样，叫做子集合。即全集 I 本身，是 I 的子集合。没有任何成员的集合也承认它是存在的。没有任何成员的集合，显然它是空的，叫做空集合。空集合特用 $\emptyset$ 再画一斜线 $\emptyset$ 来表示，读作“空集合”。

那么，到底能想出多少种意见？就是说，这是 I 的子集合有多少个的问题。

用图 5 上的卷轴来考察。在①上，就小狗来说，有摆与不摆两种情况。如果关于小狗的意见，一旦确定了，在②上就布娃娃来说，又可分成两种意见。到此，一共有四种意见了。如果这四种意见的某一种，一旦确定了，在③上，就喷气式飞机来说，又可分成两种意见。

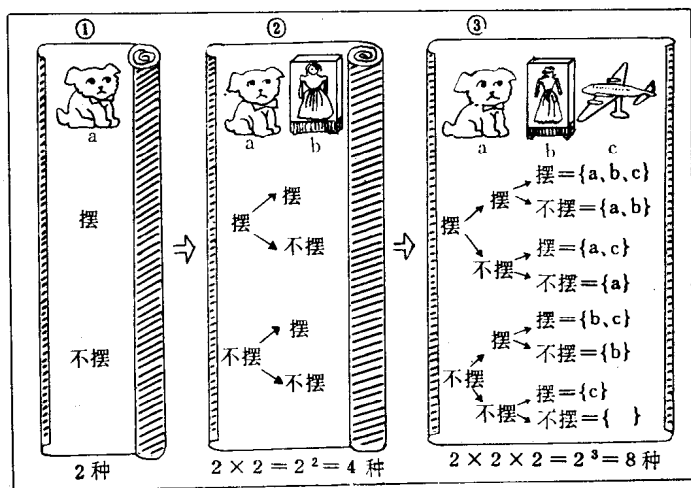


图5 $\{a, b, c\}$ 的子集的总数

结果是一共有 8 种意见。即 $I = \{a, b, c\}$ 的子集合总数是 $2^3 = 8$ 。这里 2^3 的 3, 是 I 的成员 a, b, c 的个数。

(3) 交集与并集合

设图 6 中的四面体的顶点的集合 $\{a, b, c, d\}$, 为全集 I , 可有 $2^4 = 16$ 种子集合。

如图 7 ①, 集合 A 与集合 M 有公共点 C 为其公共成员。把这个公共成员作成的集合 N , 写作 $A \cap M$, 叫做“ A 与 M 的交集” (简称交集)。把 A 与 M 的所有成员放在一起, 如图 7 ②, 作成 I 。这样的由两个集合的所有成员作成的集合, 写作 $A \cup M$, 叫做“ A 与 M 的并集合” (简称并集)。

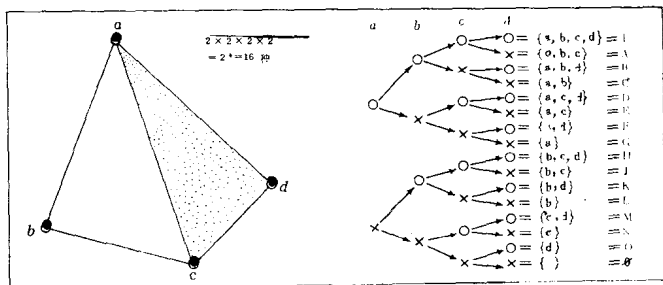


图6 所有的子集

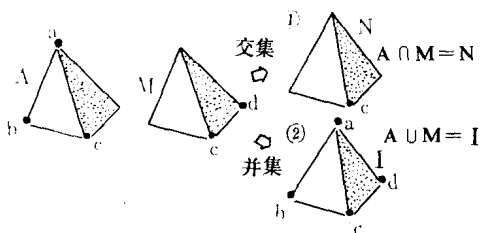


图7 A, M的交集与并集

就集合K, G来考虑, 如图8①, 它们没有公共成员, 它们的交集是空集。所以,

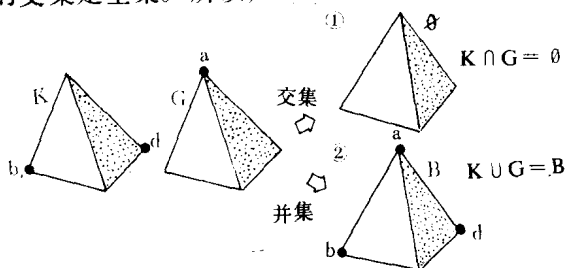


图8 K, G的交集与并集

$$K \cap G = \emptyset$$

另一方面，由K，G两者所有成员作成的集合，成为②那样的并集B。所以，

$$K \cup G = B。$$

希望不要弄错 $\cap$ 和 $\cup$ 的使用方法。交是开口向下，并是开口向上。

【想一想】 用符号写出下列集合：

$$(1) C \cap D \quad (2) L \cup O \quad (3) \bar{I} \quad (4) \bar{H}$$

【略 解】 (1) G (2) K (3) $\emptyset$ (4) G

使用 $\cap$ ， $\cup$ ， $\bar{}$ 也可作出以下的计算。

$$\bar{A} \cap \bar{B} = O \cap N = \emptyset, (G \cup K) \cap M = B \cap M = O。$$

【想一想】 求 $E \cup \bar{F}$ ， $(\bar{N} \cup \bar{K}) \cap C$ 。

【略 解】 A， $\bar{H} \cap C = G \cap C = G$ 。

§ 2. 集合的代数

(1) 集合的表示法

在前一节，用实例论述了集合的问题。在那里已经研究了 $A \cap B$ ， $\bar{A} \cup B$ 这样的有关集合的结合问题。它们与 2.8×3.6 ， $(-a) + b$ 这样的结合关系，有些地方是相似的。实际上，真是那样，集合也有计算，它也是一门数学。在这一节

里，想论述集合将是怎样的一门数学？首先，在这一项谈一谈定义和符号问题。

【定 义】在某一个确定范围内的事物的集体，叫做集合。

从这个定义来看，如在图 9 中，说柿树的果实的集合时，就必须明确○和○所表示的柿子，属不属于所说的集合。又，图10的集合怎么样？要考虑如何确定这个集合。应明确下图中的粗线部分是什么集合。

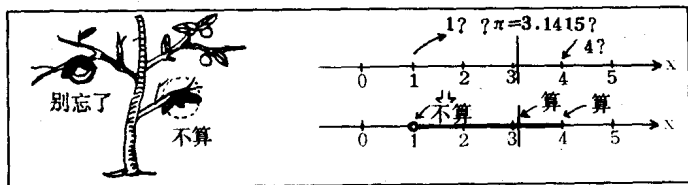


图9 柿树的果的集合

图10 由大于1至4的点的集合

表示集合时，通常使用A，B，P这样的大写字母。构成集合的各个事物，叫做元素或简称为元。通常用 a ， b ， y 等小写字母表示。特别是，表示元素时，也常常就直接使用各事物的名称。

在图11中，集合P的元素，用 a ， b 等表示。集合Q的元素就直接用各事物的名称表示。

若某元素 a 是集合K里的元素时，则说此元素 a 属于集合K，写作 $a \in K$ 或 $K \ni a$ ，读作“ a 属于K”。又，若元素 a 不是集合K里的元素时，则说元素 a 不属于集合K，写作 $a \notin K$ 或 $K \not\ni a$ ，读作“ a 不属于集合K”。

在图11中, $a \in p$, $d \notin p$ 。

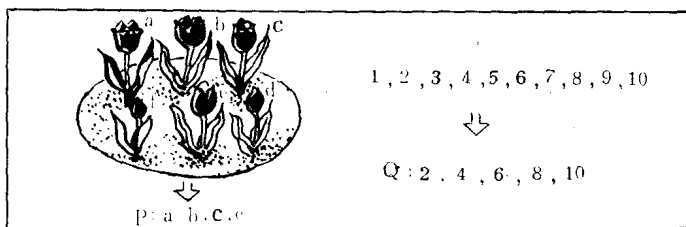


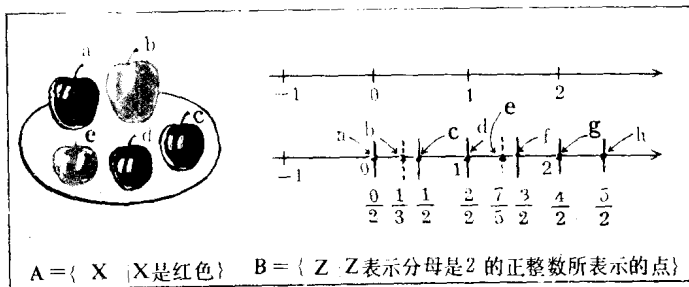
图11 花坛中开的郁金香花的集合 p 图12 1至10的数中偶数的集合 Q

【想一想】试在图12中, 往 $Q \square 7$ 中的 $\square$ 里填写适当的符号。

【略 解】 $\notin$ 。

为了表示集合是由哪些元素构成的, 在中括弧 $\{ \}$ 中列出其全部元素即可。例如, 在图13中, $A = \{ a, c, d \}$ 。

在图14中, 因为集合 B 的元素是写不尽的, 可用……表示, 写作



$A = \{ x \mid x \text{ 是红色} \}$ $B = \{ z \mid z \text{ 表示分母是2的正整数所表示的点} \}$

图13 红苹果的集合 A

图14 分母为2的正分数的集合 B