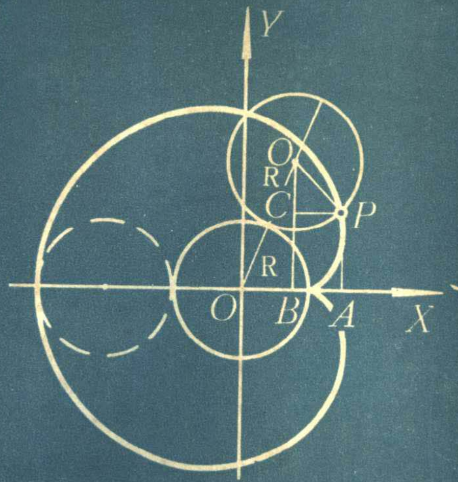

郭 孝 英

平面曲线的参数与极坐标方程

NG MIAN QU XIAN DE CAN SHU YU
ZUO BIAO FANG CHENG

数学进修用书

平面曲线的参数与极坐标方程

郭孝英

浙江人民出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了平面曲线的参数方程和极坐标方程的概念、作用、特点以及它们与普通方程的互化方法，并通过典型例题说明一些解题规律。适合中学数学教师进修、教学参考，也可供具有高中水平的青年学生学习。

数学进修用书
平面曲线的参数
与极坐标方程
郭 孝 英
*
浙江人民出版社出版
浙江新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本787×1092 1/32 印张3.625 字数76,000
1979年9月第 一 版
1979年9月第一次印刷
印数：1—7,500
统一书号：7103·1070
定 价： 0.31 元

编 辑 说 明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的。随着教育事业的发展，教师队伍迅速壮大，新教师大量增加。在新的长征中，他们担负着为祖国培养千千万万建设人才的极其光荣的任务。当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材，努力提高教育质量，因而进修的要求十分迫切。本丛书出版目的，就是为他们进修提供一点比较系统的材料。编写时照顾教师队伍的实际状况，内容比教育部新编中学数学教材要扩大、加深和提高一些，使学完以后继续自学大学有关数学课程，基础打得更加扎实。同时也注意适当联系中学教学实际，有助于教师进行教学。丛书也适合具有高中程度的学生和工农青年自学。

目　　录

第一章　曲线的参数方程 ……………………………………（ 1 ）

§1　参数方程的概念 ……………………………………（ 1 ）

§2　曲线参数方程的建立和作图 ……………………………（ 5 ）

§3　曲线的参数方程和普通方程的互化 ………………………（ 15 ）

§4　几个例子 ……………………………………………（ 25 ）

*§5　用参数方程表示的曲线的某些几何量的计算 ………（ 37 ）

习题 ………………………………………………………（ 51 ）

第二章　曲线的极坐标方程 …………………………………（ 56 ）

§1　极坐标的概念 ………………………………………（ 56 ）

§2　曲线的极坐标方程 …………………………………（ 58 ）

§3　极坐标和直角坐标的关系．曲线方程的互化 ………（ 69 ）

§4　圆锥曲线的极坐标方程 ……………………………（ 75 ）

§5　螺线的极坐标方程 …………………………………（ 79 ）

*§6　用极坐标方程表示的曲线的某些
几何量的计算 ………………………………………（ 89 ）

习题 ………………………………………………………（ 98 ）

习题答案……………………………………………………（104）

第一章　曲线的参数方程

§1　参数方程的概念

曲线可以看成是由具有某些特征性质的点构成的. 在给定的直角坐标系中，由于点被它的坐标完全确定，因而曲线上的点的特征性质就反映为曲线上的点的坐标（x，y）所应当满足的限制条件①. 这个限制条件通常可以表示为一个等式

$$F(x, y)=0,$$

它就称为曲线的方程. 例如，半径为R的圆可以看成是由到一定点距离为R的所有点构成的，此定点即为圆心. 若在一给定的坐标系中，定点（圆心）的坐标为(x_0, y_0)，那么圆上的点的坐标(x, y)应当满足以下限制条件：

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R,$$

或写成

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

这就是半径为R，圆心坐标为(x_0, y_0)的圆的方程.

但是，在实际中曲线又常常表现为质点运动的轨迹. 这时，运动的规律不是直接反映成质点位置坐标x和y之间的相互关系，而是表现为质点的位置坐标x和y各自随时间的连续变化而变动的规律. 当这样的变化规律确定之后，运动的轨迹也就确定了. 因此，我们可以用运动规律来表示运动轨迹.

例如，我们求一抛射体（质点）在重力作用下的运动轨迹时，考虑到抛射体的运动是在一平面内，因而在这平面内就可

①本书考虑的是平面曲线.

以建立一直角坐标系．比如，我们将抛射地点取为原点O，过原点的水平线取作X轴，过原点的铅垂线取作Y轴，两轴的正方向满足右手系的规定①（图1）．设抛射体的初速度为v_0，抛射的倾角为α．抛射体P的流动坐标$(x、y)$随时间t的变化而变动，t从射出时算起．根据力学知识，P点的运动可以看成沿X轴方向和Y轴方向两个直线运动的合成．于是，点P的运动规律就是：

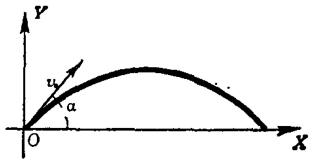

图1

$$\begin{cases} x=v_0t\cos\alpha, \\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant b) \quad (1)$$

其中b为抛射体落地时刻．从(1)式可以看到，它的右边都是t的单值函数．也就是说，在区间$[0,b]$上②，对于t的每一个值，通过(1)式，都唯一地确定了x和y的值，合起来就唯一地确定了抛射体P的一个瞬时位置，也就是确定了抛射体轨迹上的一个点．因此，表示P点运动规律的方程组(1)就是P点的轨迹方程．

一般地，一动点$P(x,y)$的运动规律可以写成

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b) \quad (2)$$

其中$\varphi(t)$，$\psi(t)$是时间t的单值函数．对于$a\leqslant t\leqslant b$中任一个时刻t_1，由(2)唯一地确定一对数$x_1=\varphi(t_1)$，$y_1=\psi(t_1)$．这

---

①把X轴按逆时针方向绕O点转90^0后与Y轴重合时，如果它们的正方向一致，这样的坐标系称为右手系．

②区间$[a,b]$表示满足$a\leqslant t\leqslant b$的t的一切值．

对数决定的点 $P_1(x_1, y_1)$，就是动点 P 在时刻 t_1 的位置. 也就是说 $P_1(x_1, y_1)$ 是质点运动轨迹上的一个点；反过来，由于运动轨迹上的任意一点 $P_0(x_0, y_0)$ 都是动点在某一时刻的位置，因此，它能由 t 的某一个值 t_0 通过 (2) 式得到，即在 $[a, b]$ 区间内能找到一个 t_0 使得

$$\begin{cases} x_0=\varphi(t_0), \\ y_0=\psi(t_0). \end{cases}$$

在上述讨论中，我们可以不考虑 (2) 式中 t 的时间意义，而抽象地把它看作是一个第三变量，其变动范围是区间 $[a, b]$. 而把质点运动的轨迹看作是一条曲线，那末曲线上点的位置坐标 (x, y) 将随着变量 t 的确定而确定. 这样，就得出曲线的参数方程的概念.

在平面内取定一个直角坐标系 XOY，假设给出一个方程组

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} \qquad (a\leqslant t\leqslant b) \quad (3)$$

（其中 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上的单值函数，且区间 $[a, b]$ 不超过 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 各自定义区间的公共部分）和一条曲线 C，如果方程组和曲线满足下列两个条件：

(1) 对于在 $[a, b]$ 内的任一个 t_1，由 (3) 所确定的点 $P_1(\varphi(t_1), \psi(t_1))$ 都在曲线 C 上；

(2) 对于曲线 C 上任意一点 $P_0(x_0, y_0)$ 都至少存在一个 $t_0(a\leqslant t_0\leqslant b)$ 有

$$\begin{cases} x_0=\varphi(t_0), \\ y_0=\psi(t_0). \end{cases}$$

那末方程组 (3) 称为曲线 C 的**参数方程**，t 称为**参数**.

上述参数方程的概念可以直观地描述为当 t 在区间 $[a, b]$ 内连续变化时，点 $P(\varphi(t), \psi(t))$ 描出曲线 C. 或者说，方程

(3) 所确定的点走遍全曲线C.

上述参数方程的概念中，还要注意一点：对于曲线上一点$P(x,y)$可能存在不止一个参数t和它对应. 即对于$t_1 \neq t_2$, $(a \leqslant t_1, t_2 \leqslant b)$可能有$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $\psi(t_1)=\psi(t_2)$.

例 以原点中心，R为半径的圆，如果看作是一个质点作等速圆周运动的轨迹，试求它的参数方程.

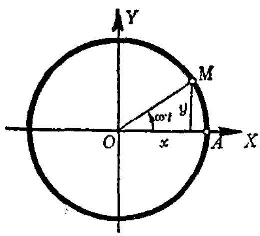

图2

解 设质点运动的角速度为ω，从圆周与OX轴的交点A的位置按逆时针方向开始运动，经过时间t后，质点在圆周上达到M的位置(图 2). 由于$\angle AOM=\omega t$①，所以点M的坐标(x,y)关于t的函数表达式是

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t, \\ y=R\sin\omega t. \end{cases}$$

这就是所要求的圆的参数方程.其中参数t表示时间，变化范围为$0 \leqslant t < +\infty$. 给定一确定的t值，方程组唯一地确定了圆周上一点$M(x,y)$的位置. 但是反过来，对于圆周上一确定的点M，却有t的许多值与它对应：t, $t+\frac{2\pi}{\omega}$, …. 如果我们限定t的变化范围$0 \leqslant t < \frac{2\pi}{\omega}$，那末圆周上的点和参数(时间)$t$的对应就是一对一的了.

若将$\angle AOM=\theta$取作参数，这时圆的参数方程就有形式

$$\begin{cases} x=R\cos\theta, \\ y=R\sin\theta. \end{cases}$$

①本书关于角的度量一般均采用弧度制，单位为弧度.

这里参数θ表示轴OX与圆上一点和原点O(圆心)的连线之间的夹角. 若

$$0\leqslant\theta<2\pi,$$

所得的点(x,y)跑遍整个圆周.

§2 曲线参数方程的建立和作图

从§1关于抛射体运动轨迹及圆的参数方程的建立，我们可以看到，通常建立曲线的参数方程的一种方法，就是根据轨迹形成的规律，适当地选取一个参数t，使得曲线上点的流动坐标x、y能用参数t的函数表达式来表示. 下面，我们根据这种方法来建立一些曲线的参数方程.

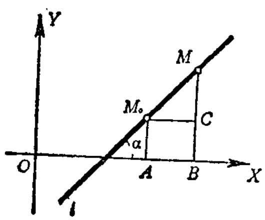

图 3

1. 直线 设直线l通过点$M_0(x_0,y_0)$，且与X轴的倾角为α(图3).我们把这直线看作是质点作等速直线运动的轨迹,并设速度为v.当时间$t=0$时，设质点在M_0的位置. 经过时间t后，设质点的位置为M，它的坐标为(x,y). 由于

$$M_0M=vt,$$

得

$$\begin{cases}x=OB=OA+M_0C=x_0+vt\cos\alpha,\\ y=BM=AM_0+CM=y_0+vt\sin\alpha.\end{cases}\qquad(1)$$

或

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt.\end{cases}\qquad(2)$$

其中常数

$$m=v\cos\alpha,\ \ n=v\sin\alpha$$

分别表示质点在X轴和Y轴方向上的分速度. 因为对于等速直线运动，时间t总是正数，即

$$0\leqslant t<+\infty,$$

所以方程 (1) 或 (2) 只表示从 M_0 出发的一条射线 (半直线). 但是如果抽掉时间 t 的具体意义, 把 t 看作是一个任意的变量, 并将它的变化范围扩大到

$$-\infty<t<+\infty,$$

(1) 或 (2) 就是直线 l 的参数方程了.

令 $$vt=\mu,$$

由 (1) 得直线 l 的另一形式的参数方程

$$\begin{cases} x=x_0+\mu\cos\alpha, \\ y=y_0+\mu\sin\alpha. \end{cases} \tag{3}$$

这里的参数 μ 表示有向线段 M_0M 的值.

2. 摆线 一圆沿定直线作无滑动的滚动时, 圆周上一定点运动的轨迹称为**摆线**, 或称**旋轮线**. 下面我们来建立它的参数方程, 并画出图形.

首先, 建立直角坐标系. 设半径为 a 的圆周在 X 轴上滚动, 开始时圆周上的定点 P 恰好在原点 O (图 4). 假设当圆滚过的角为 φ 时, 圆心移至 B 点, 圆与 X 轴的切点为 A, 圆周上定点所在的位置为 $P(x,y)$.

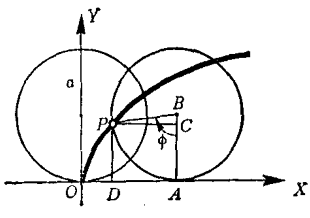

图 4

作 $$PC\perp AB,\quad PD\perp OX,$$

那末 $$\angle ABP=\varphi \text{ (单位是弧度)}.$$

我们将 φ 取作参数, 称为滚动角. 可以看出当 P 合于点 O 时,

$$\varphi=0;$$

当圆向 X 轴正向滚动时

$$\varphi>0;$$

当圆向X轴的负向滚动时

$$\varphi<0.$$

利用这个参数，就可以把动点P的坐标(x, y)用φ的函数表达出来：

$$x=OD=OA-DA=\widehat{AP}-PC\text{①}$$
$$=a\varphi-a\sin\varphi=a(\varphi-\sin\varphi),$$
$$y=DP=AB-CB=a-a\cos\varphi$$
$$=a(1-\cos\varphi).$$

因此，摆线的参数方程是

$$\begin{cases} x=a(\varphi-\sin\varphi), \\ y=a(1-\cos\varphi). \end{cases} \quad (-\infty<\varphi<+\infty) \qquad (4)$$

从上述x、y关于φ的函数表达式中可以看出，相差2π的任意两个参数值φ和$\varphi+2\pi$所决定的点的纵坐标y相等，横坐标x相差$2\pi a$. 所以把相应于$0\leqslant\varphi<2\pi$的一段曲线向右平移$2\pi a$，就得到相应于$2\pi\leqslant\varphi<4\pi$的那一段曲线，其它的按此类推可得. 因此摆线是由一系列完全相同的分支组成，每一分支称为摆线的一拱(图5). 这从摆线的最初定义也可知道，当动圆每转动一周时，点P的运动情况总是相同的.

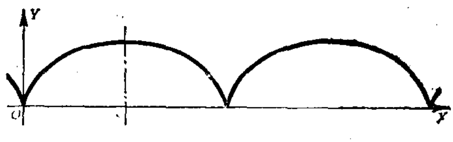

图 5

对于摆线的每一拱来说，它们是左右对称的. 例如在相应于$0\leqslant\varphi<2\pi$的这一拱上，对应于参数φ和$2\pi-\varphi$的两个点的

①在本节中曲线(或圆周)上两点A、B之间的弧长用记号$\widehat{AB}$表示.

纵坐标相等，横坐标相加等于 $2\pi a$，也就是横坐标的平均值是 πa. 所以这两点关于直线 $x=\pi a$ 是对称的，也就是说，这一拱是左右对称的，如图5.

由以上讨论可知，要画出摆线的图形，只要画出相应于 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 的一部分就行了. 参数方程的作图也是用描点法（一般在描点以前先就方程的形式对于图形的性质作一讨论，如我们上面所做的工作)，即先取参数某些适当的数值，将这些数值代入参数方程，分别求得 x 和 y 的对应值. 由同一个参数值所算出的一组 x 和 y 的值是曲线上一点的坐标. 根据坐标，将这些点在平面上的位置确定下来并描出，再将这些点用光滑曲线连接起来成一曲线，这曲线即参数方程所表示的图形.

下列表格和图 6 就是摆线中 $a=10$ 的相应于参数 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 的 x、y 值以及 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ 的一拱摆线（对于 $\pi<\varphi\leqslant2\pi$ 的半拱曲线利用对称性得到).

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
x	0	0.8	5.7	16.5	31.4
y	0	2.9	10	17.1	20

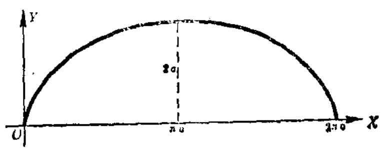

图 6

摆线有不少重要性质. 例如，质点在重力作用下沿曲线从固定点 A 滑到固定点 B，当曲线是一条翻转的摆线时所需的时间最短（图 7）①. 又如，一般单摆的摆动周期与摆动幅度是有

①这个证明需要较多的数学知识，可参考艾利斯哥尔兹著的变分法第29页，最速降线问题.

关系的．为了克服这个缺点，可以在摆动的平面内做两个摆线形状的挡板（如图 8 中的 OU 和 OV）．这样，摆的运动轨迹也

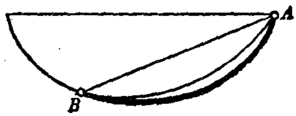

图7

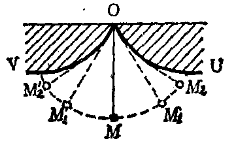

图8

将是一条摆线，而摆动周期与摆幅完全无关①．在十七世纪，摆线即以此性质出名，而得到命名的．

有兴趣的读者还可以考虑当一圆在直线上作无滑动的滚动时，圆周内一定点或圆周外一定点运动的轨迹方程，它们分别称为短幅摆线、长幅摆线．

3．圆的渐开线　把一条没有伸缩性的绳子围绕在定圆周上，拉开绳子的一端并拉直，使绳子与圆周始终相切，绳子的端点轨迹，称为**圆的渐开线**（图 9），这个定圆称为渐开线的**基圆**，和基圆相切的直线叫做圆的渐开线的**发生线**．圆的渐开线是齿轮中常用的一种齿廓曲线（图10）．

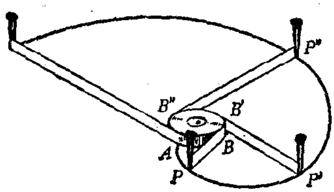

图9

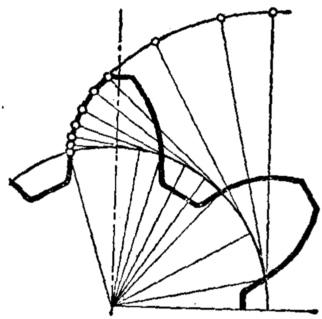

图10

①这个证明在本书第一章的最后一段给出．

下面我们来推导圆的渐开线的参数方程．设定圆的中心为O，半径为a，而A是绳子未拉开时绳子端点的位置（图11）．现取O为原点，通过O与A的直线为X轴．设$M(x,y)$是圆的渐开线上的任意一点．这时，绳子的一段为直线MT，它是圆的切线．

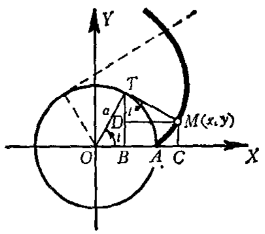

图11

令 $\angle AOT=t$

为参数，则有

$$MT=\overset{\frown}{AT}=at.$$

作MC，TB垂直X轴，MD平行于X轴．因为

$$TB\perp OC,\quad TM\perp OT,$$

所以 $\angle MTD=\angle AOT=t,$

于是有

$$\begin{aligned} x&=OC=OB+BC\\ &=OB+DM\\ &=a\cos t+a\,t\sin t,\\ y&=CM=BD=BT-DT\\ &=a\sin t-a\,t\cos t. \end{aligned}$$

所以圆的渐开线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases} \tag{5}$$

根据圆的渐开线的形成过程，发生线是由相应的圆弧展开而得，它具有性质$BP=\overset{\frown}{BA}$，$B'P'=\overset{\frown}{B'A}$，$B''P''=\overset{\frown}{B''A}$，…（图9）．利用这个性质我们给出圆的渐开线的一种作图法：

（1）先将基圆圆周作若干等分，如图12是将基圆12等分，分点分别用1、2、3、…、12表示．

（2）过各分点按同一方向作基圆的切线．

一九七九年十月十八日

⑪

(3) 在过点 12 所作的切线上，从点 12 起截取长度等于 $2\pi a$ 的线段（a 为基圆半径），得点 K_{12}．并将连结点12和点 K_{12} 的线段也给以 12 等分，设这些分点分别是 $1'$、$2'$、$3'$、…、$12'$（点 $12'$ 就是点 K_{12}）.

(4) 在过点11的切线上，从点11起截取 $\frac{11}{12}2\pi a$（即由点12到点$11'$之间的线段长度），得点 K_{11}．用类似的方法依次在过点10、9、8、…、1 的切线上截取 $\frac{10}{12}2\pi a$、$\frac{9}{12}2\pi a$、$\frac{8}{12}2\pi a$、…、$\frac{1}{12}2\pi a$，分别得 K_{10}、K_9、K_8、…、K_1 等点.

(5) 顺次光滑地连接 K_{12}、K_{11}、K_{10}、…、K_1 各点，即得基圆半径为 a 的渐开线（相应于 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 的一段）.（图12）①

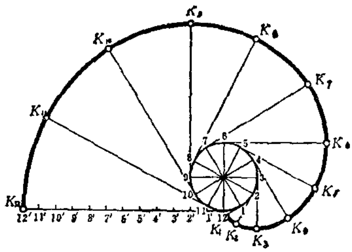

图12

4．内（外）摆线 一个动圆沿着一个定圆作无滑动的滚动，当动圆在定圆的里面（或外面）时，动圆圆周上一定点的轨迹叫做**内摆线**（或**外摆线**）.

下面我们推导内摆线的参数方程.

设定圆的半径为 R，动圆的半径为 r，取定圆的中心 O 为坐标原点，并设 X 轴过两圆的一个切点 A，当动圆滚到与定圆相切于 B 点时，动圆圆心在 C 点处（图13），OB 连线必经过 C．圆周上定点所在的位置为 $P(x, y)$．作 PF, CE 垂直于 X 轴，PD 平行于 X 轴交 CE 于 D，并令 $\angle AOB=\varphi$ 为参数.

---

①用这种方法画得的渐开线，严格说来是近似的．若基圆的圆周等分数愈多，则由此而画得的渐开线就愈精确.

由运动规律得 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{PB}$，

而 $\overset{\frown}{AB}=R\varphi$，

$\overset{\frown}{PB}=r\angle PCB$，

所以 $r\angle PCB=R\varphi$，

即 $\angle PCB=\dfrac{R}{r}\varphi$.

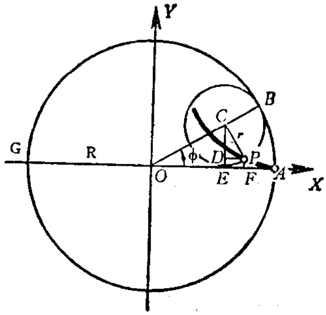

图13

但是

$$\angle DCP+\angle PCB=\varphi+\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\angle DCP=\varphi+\frac{\pi}{2}-\angle PCB$$

$$=\frac{\pi}{2}+\varphi-\frac{R}{r}\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{R-r}{r}\varphi.$$

于是有

$$x=OF=OE+DP$$
$$=OC\cos\varphi+CP\sin\angle DCP$$
$$=(R-r)\cos\varphi+r\cos\frac{R-r}{r}\varphi.$$

$$y=FP=EC-DC$$
$$=OC\sin\varphi-CP\cos\angle DCP$$
$$=(R-r)\sin\varphi-r\sin\frac{R-r}{r}\varphi.$$

因此内摆线的参数方程是

$$\begin{cases} x=(R-r)\cos\varphi+r\cos\dfrac{R-r}{r}\varphi, \\ y=(R-r)\sin\varphi-r\sin\dfrac{R-r}{r}\varphi. \end{cases} \qquad (6)$$