线性代数教程

主　编　李晓培

副主编　付向红　张　健

华南理工大学出版社

前　言

线性代数是理工科院校重要的基础课，它的理论和方法已成为当今科学研究和处理工程技术领域问题的有力工具。本书在传统线性代数教材的基础上，结合编者多年的教学实践及近年来工科线性代数课程的教学改革研究成果，对传统的教学内容、教材体系作了一些改革，主要体现在：叙述简明扼要、层次清楚、重点突出、例题全面，每章均配备有较多的例题和习题，并附有较详细的习题答案。同时，按照大纲要求及教学时数的变化，对传统教材中较繁琐的理论部分作了简洁的处理，使学生易于掌握。还注意到文、理、工、管的结合与交叉，渗入了现代数学的观点。

本书第一、二章由付向红老师编写，第三、四章由李晓培副教授编写，第五、六章由张健老师编写。全书由李晓培副教授统稿，韩什元副教授审阅了全书。

借此机会衷心感谢湛江海洋大学校长助理游佩林教授及教务处、数学教研室有关教师对本书的编写给予的支持和帮助，由于水平有限，书中难免有不妥及错漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2001 年 7 月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是由解线性方程组的需要而产生和发展起来的，它是一个应用广泛的数学工具．不仅在线性代数和数学的其它分支中经常用到，而且在工程技术和管理科学中也有重要应用．本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质、计算方法及行列式在解 n 元线性方程组中的应用．

1.1　n 阶行列式的定义

在中学数学里，已经学习过二阶、三阶行列式的定义、性质和计算，现在讨论 n 阶行列式．在线性代数中，关于 n 阶行列式的定义可以有多种不同的方法，这里我们采用递归法．

先看二阶、三阶行列式的结构：

二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}a_{21}$$

若引入记号：$A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|$，$A_{12}=(-1)^{1+2}|a_{21}|$，

其中$|a_{22}|$，$|a_{21}|$是一阶行列式．我们称 A_{11}，A_{12}分别为元素 a_{11}，a_{12}对应的代数余子式，于是有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

即二阶行列式可以按第一行展开，通过一阶行列式来定义二阶行列式.

三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

引入记号：

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

把 A_{11}，A_{12}，A_{13}分别称为元素 a_{11}，a_{12}，a_{13}对应的代数余子式，从而有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

即三阶行列式可以按第一行展开，通过二阶行列式来定义三阶行列式.

由此可以看出二阶、三阶行列式虽然阶数不同，但它们的定义都遵循同一个规律，即通过低阶的行列式来定义高一阶的行列

式.

可由此给出 n 阶行列式的递归法定义.

1.1.1 n 阶行列式的定义

定义 1.1 由 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$组成的 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-1}$$

是一个数,

当 $n=1$ 时, $\boldsymbol{D}=|a_{11}|=a_{11}$

当 $n\geqslant 2$ 时, $\boldsymbol{D}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中, $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$是元素 a_{1j}对应的代数余子式, M_{1j}是元素 a_{1j}所对应的余子式, 是在 D 中把元素 a_{1j}所在的行和所在的列的元素划掉, 其余元素按原来顺序所构成的 $n-1$ 阶行列式.

行列式(1-1)中的元素 a_{ij}的脚标 i, j 分别称为行标和列标, a_{ij}说明其处于第 i 行、第 j 列的交叉点的位置.

在 $\boldsymbol{D}$ 中 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}所在的对角线称为 $\boldsymbol{D}$ 的主对角线, 相应其中 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}称为主对角元, 而另一条对角线称为 $\boldsymbol{D}$ 的次对角线.

由定义可知, 行列式是其元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$的乘积构成的和式, 称为行列式的展开式, 展开式共有 $n!$ 项, 每一

项都是取自不同的行、不同的列的元素的乘积，展开式中带正负号的项各占一半.

例 1.1 证明

$$
D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},
$$

其中主对角线以上元素全为 0，即当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，称其为下三角行列式.

证 对 n 应用数学归纳法，当 $n=2$ 时，结论显然成立. 假设结论对于 $n-1$ 也成立，则由 n 阶行列式的定义有

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

若端为 $n-1$ 阶行列式，由数学归纳法假设有 $D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例 1.2 证明

$$
D_n=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \begin{smallmatrix}\cdot\\[-2pt]\ \cdot\ \\[-2pt]\cdot\end{smallmatrix} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n
$$

其中次对角线上方、下方的元素全为 0.

证 应用行列式的定义可得:

$$\boldsymbol{D}_n=(-1)^{n+1}\lambda_1\begin{vmatrix} & & & \lambda_2 \\ & & \lambda_3 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\lambda_1\boldsymbol{D}_{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}\lambda_1\boldsymbol{D}_{n-1}$$

$$\boldsymbol{D}_{n-1}=\begin{vmatrix} & & & \lambda_2 \\ & & \lambda_3 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1+1}\lambda_2\begin{vmatrix} & & & \lambda_3 \\ & & \lambda_4 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n}\lambda_2\boldsymbol{D}_{n-2}$$

$$=(-1)^{n-2}\lambda_2\boldsymbol{D}_{n-2}$$

于是利用递推关系可得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_n&=(-1)^{n-1}\lambda_1\boldsymbol{D}_{n-1}\\&=(-1)^{n-1}\cdot\lambda_1\cdot(-1)^{n-2}\cdot\lambda_2\cdot\boldsymbol{D}_{n-2}\\&=\cdots\\&=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.\end{aligned}$$

例 1.3 利用行列式的定义计算

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&0\\0&1&0&1\\1&0&1&1\end{vmatrix}$$

解: $$D=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}$$

$$=-1+2+1$$

$$=2$$

1.1.2 n 阶行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

$$D^T=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1.1 行列式与其转置行列式相等，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^T$.

该性质说明行列式中的行与列具有同等的地位，对于行所具有的性质，对列也成立.

性质 1.2 行列式 $\boldsymbol{D}$ 按任一行展开，其值相等，即

$$\boldsymbol{D}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 所对应的代数余子式.

以上两条性质的证明可用数学归纳法得证，这里从略.

推论 1.1 某行全为零的行列式其值为零.

性质 1.3(齐次性) 用数 k 乘行列式的某行的所有元素，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用性质 1.2，将上式的左端按第 i 行展开，立即可得等号右端的结果.

性质 1.4(可加性) 若行列式的某行的元素都是两数之和，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

利用性质 1.2 将上式的左端按第 i 行展开，即可得等号右端的结果.

性质 1.3 和性质 1.4 合起来称为行列式的线性性质.

推论 1.2 行列式某行的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

性质 1.5 互换行列式的两行，行列式变号.

证 应用数学归纳法证明，对于二阶行列式结果显然成立. 假设对 $n-1$ 阶行列式结论成立，对 n 阶行列式，按未被换行的第 k 行展开，有

$$
\boldsymbol{D} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}
$$

由于 $M_{kl}(l=1, 2, \cdots, n)$是 $n-1$ 阶行列式，且其中有两行互换，所以 $A_{kl}(l=1, 2, \cdots, n)$改变符号，故得 $\boldsymbol{D}$ 也改变符号.

推论 1.3 行列式两行对应相等，则该行列式的值为零.

推论 1.4 若行列式中两行对应元素成比例，则该行列式的值为零.

性质 1.6 把行列式的某行各元素分别乘以 k，再加到另一行的对应元素上去，行列式的值不变，即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

利用性质 1.4 和推论 1.3，可证上式成立.

性质 1.8 行列式某行的元素乘以另一行对应元素的代数余子式之和等于零，即

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0 \quad (i\neq j)$$

证 由性质 1.2，将行列式(1-1)按第 i 行展开，有

$$\boldsymbol{D}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

又将行列式(1-1)中的第 i 行元素 a_{i1}，a_{i2}，…，a_{in} 换成 a_{j1}，a_{j2}，…，a_{jn}后所得的行列式值为零(由推论 1.3 可知)，而其展开式即为 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik}=0$，故 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik}=0$. 性质 1.8 得证.

综合性质 1.2 和 1.8 得：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}\boldsymbol{D} & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{1-2}$$

以上各条性质，对列作讨论也成立.

1.2 n 阶行列式的计算

本节将通过例题来说明，利用行列式的定义和性质计算或展

开 n 阶行列式的方法．为计算方便，引入以下记号：r_i 表示第 i 行，C_i 表示第 i 列，交换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列)，记作 $r_i \leftrightarrow r_j(C_i \leftrightarrow C_j)$，第 i 行(列)乘以数 $k(k\neq 0)$ 记作 $kr_i(kC_i)$，用数 k 乘以第 i 行(列)加到第 j 行(列)记作 $kr_i + r_j(rC_i + C_j)$.

例 1.4 计算

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}5 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

解

$$\boldsymbol{D}\xlongequal{r_2+r_3+r_4+r_1}\begin{vmatrix}8 & 8 & 8 & 8\\ 1 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 5\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,\ 3,\ 4)]{-r_1+r_i}8\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=8\times 4\times 4\times 4=512$$

其中运用了$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

例 1.5 计算

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-2r_1+r_4]{r_1+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[3r_2+r_4]{r_2+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-r_3+r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

以上两例是利用行列式的定义和性质，将行列式化为三角行列式的处理方法．亦可采用降阶的方法计算行列式的值，如下例．

例 1.6 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

解 第 1 列和第 3 行均只有一个非零元素，可按第 1 列(或第 3 行)展开，依此逐级降阶.

$$D \xlongequal{\text{按} C_1 \text{展开}} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按} r_3 \text{展开}} 2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-\frac{3}{2}r_2+r_3} -2\begin{vmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ \frac{-13}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按} C_3 \text{展开}} -2\times(-2)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -\frac{13}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -4\times(-3+52) = -196.$$

例 1.7 证明：$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$

证明

$$\text{左式} = \underset{①}{\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ bz & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}} + \underset{②}{\begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}}$$

$$\xlongequal[\text{取公因数}]{①、②\text{式：} C_1 \text{分别提}} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{②式：} -aC_1+C_3]{\text{①式：} -bC_1+C_3} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{②式：} C_2 \text{ 提出 } b]{\text{①式：} C_3 \text{ 提出 } a} a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{②式：} -aC_2+C_3]{\text{①式：} -bC_3+C_2} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[C_2 \leftrightarrow C_3]{\text{②式：} C_1 \leftrightarrow C_3} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \text{右式}.$$

证毕.

例 1.8 计算

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.