高等教育教材

经济管理数学

Jingji Guanli Shuxue Xuexi Zhidao Yu Xiti Quanjie

学习指导与习题全解

何良材 田玉芳 李 新 编著

重庆大学出版社

高等教育教材

经济管理数学
学习指导与习题全解

何良材　田玉芳　李　新　编著

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是与高等教育教材《经济管理数学》(何良材编著)配套的教学参考用书. 全书分3篇:微积分学及其应用、矩阵方法及其应用、概率统计及其应用. 每篇内容包含内容辅导与提要(含基本要求)、范例分析、习题解答、概念思考题.

本书专供高等院校经济管理类专科及高职高专相关专业使用,也可供工科少学时、文科等专业及经济与管理工作者参考选读.

图书在版编目(CIP)数据

经济管理数学学习指导与习题全解/何良材,田玉芳,李新编著. —重庆:重庆大学出版社,2006.2

ISBN 7-5624-3588-X

Ⅰ.经... Ⅱ.①何...②田...③李... Ⅲ.经济数学—高等学校—教学参考教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第003762号

高等教育教材

经 济 管 理 数 学

学习指导与习题全解

何良材 田玉芳 李 新 编著

责任编辑:曾令维 穆安民 版式设计:曾令维

责任校对:李定群 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn(市场营销部)

全国新华书店经销

重庆华林天美彩色报刊印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:21.25 字数:530千

2006年2月第1版 2006年2月第1次印刷

印数:1—3 000

ISBN 7-5624-3588-X 定价:27.50元

编者的话

本书是与高等教育教材《经济管理数学》(重庆大学出版社出版,何良材编著)配套的教学参考用书. 编写本书的目的在于:帮助读者更好地理解、掌握并深化教材的基本内容.

(1)本书的基本内容

1)内容辅导与提要——这部分对各篇内容梗概做了介绍,并指出了基本要求与重点,还向读者提出对基本内容应如何理解其要点以及注意之处,帮助读者将教材内容由“厚”变“薄”.

2)范例分析——这部分的例题不仅具有典型性、代表性,还具有知识的综合性,其深度、广度、难度高于教材内容及例题,并注意一题多解的示范. 这样做的目的在于:扩大读者的眼界,增强解题思路与能力,加深对教材内容的进一步理解,同时也想满足有志报考研究生的读者及成人自考生的需要,对范例我们没停留在“解出了事”的做法上,而把重点放在对题目应如何分析思考,又该用什么知识(数学的,经济的,物理的……)和方法去解它,欲达“授人以渔”的目的.

3)习题解答——这部分主要是便于读者,特别是不能直接参加面授的读者,如函授生、自学者……必要时参考. 这里需要告诫读者的是,千万不能在做题前就急于去看题解,更不要照抄完成作业了事. 如果读者经过再三的思考还无从下手的题目,可参看一下题解,最后还是必须独立亲手完成,这样才会有所收益.

4)概念思考题——这部分主要是编出一些有利于掌握、巩固、深化基本知识(包括概念、理论、方法)的客观题,它是对读者每章学完后的一个自我检测,要求自觉完成,看看你掌握基本内容的深浅程度,同时也可从中发现问题,采取补救措施,达到学好的目的.

(2)“四时”效应的学习方法

任何门类的学习,都必须辅之以良好的、行之有效的学习方法. 因此在学习《经济管理数学》这门课程时,如果能对它的内容和方法事先有一个概略的轮廓,明确目的要求、重点难点、学习方法,这无疑将会有助于读者找到正确的途径去步步攀登. 古人有“学而不思则罔(迷惑),思而不学则殆(危险)”,“学而时习之”,“温故而知新”这些名言,核心是三个字:学、思、习,即对知识的积累、加工、运用. 当今国外流行一种“*SQ3R*”学习方法(*Survey Question Read Recite Review*,即:浏览—提问—研读—复述—温习),也蕴含此意,可资借鉴. 真正要把知识学到手,关键是狠抓基本概念、基本理论与基本技能,另外还得讲求学习方法——苦读、深思、好问、巧记、多练. 这就要求读者对教材要苦下功夫、细读深钻,对练习要独立思考、逐一解答.

这里向读者推荐一套行之有效的所谓“四时”效应学习方法.

1)准时参加面授——教师对学生进行面授,这是目前教学中一个重要环节,一定要重视教师在授课中的口述、手记,通过耳听、眼看、脑思、手记的多感官功能的协同作战,对学科中的基本知识认真理解,重点难点仔细剖析,这将对你的学习大有裨益. 授课前按计划将内容粗略预习一遍,带着问题去课堂,往往会产生事半功倍的效果.

2)及时进行复习——艾宾浩斯的遗忘曲线告诉我们,遗忘的速度是先快后慢. 因此在听课后,一定要抓紧时间及时进行复习,细读深钻,反复思考教材内容. 俄国教育学家马甲斯基指

出："应先巩固建筑物，而不是修补已崩溃的建筑物."要把听课时一次次"断层"勾连起来，把已出现的记忆缝隙"焊平"，从而建立知识的总体骨架.

3）定时攻破难点——好的学习计划，要定时、定向、定量完成，要强迫自己在一定时间里完成既定的学习计划，对重点难点要各个击破，切忌拖延.

4）定时完成作业——在认真复习教材内容的基础上，必须按时完成作业，通过解答习题来加深对所学内容的进一步理解.解题时要独立思考、严格认真、步骤完整、计算准确，切不可草率抄袭，更不能不做作业，还要禁忌"不复习就赶作业"的恶习.如果可能把所学知识用去解决一两个你身边的实际问题，就更为喜人.

本书各篇中的内容辅导与提要、范例分析、概念思考题三部分由何良材教授编写；习题解答由田玉芳、李新老师编写.

由于作者水平有限，不妥与错误在所难免，恳请读者不吝赐教.

何良材　田玉芳　李　新

2005年10月于重庆大学

目　录

第1篇　微积分学及其应用

第1部分　内容辅导与提要

本篇的主要内容就是研究函数及其微分和积分.

函数是微积分学研究的基本对象,它是变量之间的相互关系的抽象;极限是微积分学研究问题的主要方法,它是现实世界中各种变量的"变化趋势"的概括;函数的连续则是一种特殊的极限问题,且连续函数是微积分学研究的重点对象. 微积分学研究变量时,既要了解变量彼此间的对应规律(函数关系),又要研究各变量的变化趋势(极限),还要对各变量在变化过程中某一时刻的相互动态关系(谁快谁慢等)作极其精细的分析. 导数与微分就是进行这些研究的有力工具. 定积分(从历史上看)则是为了计算平面上封闭曲线围成图形的面积而产生的,计算这类图形的面积,最终都可归结为计算具有特定结构形式的和式极限问题. 人们在实际中逐步认识到:这种特定结构形式的和式极限,不仅是计算图形面积的数学形式,而且也是计算许多其他实际问题(包括经济问题)的数学形式. 因此,无论在理论上或实际中,特定结构形式的和式极限——定积分——具有普遍意义.

1.1.1　基本要求与重点

基本要求:正确理解函数、极限与连续这三个概念及其内在联系;熟练使用数符号 $f(\quad)$;会用初等方法求一些常见的极限. 正确理解导数作为变化率的概念,微分是函数增量的线性主部的概念,以及函数局部线性化的思想;熟练掌握初等函数的求导方法(包括一元函数的二阶导数,二元函数的偏导数);能够熟练地使用罗彼达法则求未定式极限;能正确地判定并求出函数的极值(包括二元函数的极值);会利用导数解决经济领域中的最值问题;会利用导数对某些经济函数作边际分析和弹性分析;理解原函数,不定积分,定积分(含二重积分)等概念并掌握其性质;熟练掌握求不定积分的基本方法——换元积分法与分部积分法;理解积分上限函数及其求导定理;掌握定积分的计算方法,了解广义积分概念与求法;会用积分解决经济领域中某些实际问题;会解一阶可分离变量微分方程与线性微分方程.

重点:函数与极限,导数与微分,不定积分与定积分等概念;函数符号 $f(\quad)$ 的使用,初等函数的导数,不定积分的求法;罗彼达法则,极值,定积分的计算以及微积分学在经济分析中的应用(含边际分析,弹性分析和已知边际经济量求经济总量等问题).

1.1.2　基本内容

(1) 函数概念

函数定义　设在某变化过程中有两个变量 x 和 y,如果对于变量 x 的变化范围内的每一个值,变量 y 按一定的规律(对应法则)有确定的值与它对应,则称 y 是 x 的函数,一般用记号

$$y = f(x)$$

来表示；其中 x 称为自变量，y 称为因变量；自变量 x 的取值范围称为函数的定义域，因变量 y 的相应取值范围称为函数的值域.

正确理解函数定义，要明确以下几点：

1）定义域与对应规律是确定函数的两个要素，缺一不可，因此两个函数相等是指：①它们的定义域相同，②它们在定义域内每一个自变量取值相应的函数值相同.

2）函数定义中只要求 y 有确定值与 x 对应，但并不要求一个 y 取值只相应于一个 x 的值，即使是所有 x 取值只对应于一个 y 值也是允许的，因而 $y=C$（常数）也是 x 的函数.

3）表示函数的方法没有任何限制，因此，不要只认为函数就是式子，式子只是函数的一种主要表示形式，但并非唯一形式，表示函数还可以用图形、列表、语句等其他形式，而且，即使用式子表示函数，也不是非得用一个式子不可，它可以同时使用几个式子来表示一个函数，例如：

某种产品销售总收入 R 是年产量 x 的函数

$$R = R(x) = \begin{cases} 4x - \dfrac{1}{2}x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ 8, & 4 > x. \end{cases}$$

这就是用两个式子来表示的一个函数（注意：它不是两个函数）. 用“语句法”表示函数的例子，如

$$y = [x]$$

表示 y 是 x 的最大整数部分，$y=[3.5]=3$，$y=[-2.9]=-3$.

4）要细心弄清楚函数的定义域问题. 当函数用式子表示时，则一切能使这个式子有意义的 x 所取实数值的全体就是这个函数的定义域. 在确定用式子给出的初等函数的定义域时，应非常熟悉基本初等函数的定义域，并注意运用下述结论：

①偶次根式的定义域是使根号下的式子非负的那些 x 的取值.

②分式的定义域是使分母不为零的 x 取值的全体.

③超越函数 $\log_a u$，$\tan u$，$\cot u$，$\sec u$，$\csc u$，$\arcsin u$，$\arccos u$ 均不是处处有定义，而仅仅是使它们有意义的自变量 u 的取值.

如果上述基本形式均不出现在式子 $y=f(x)$ 中，则 y 的定义域就是整个数轴，只有那些由于实际问题的特定条件而限制定义域的情况除外，如圆的面积 $S=S(r)=\pi r^2$ 中的 r 必为正数（或非负数）.

5）要注意 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 不同，前者 $f(x)$ 是函数记号，表示对 x 施以一系列的运算而最终是变量；也可通俗地说成：**函数符号像个筐，能装的东西都可以往里面装；左边筐内装什么，右边筐内照着装**. 后者 $f(x_0)$ 是函数值记号，表示一个数.

6）一般地，函数 $y=f(x)$ 的图形是 xOy 坐标面上一条平面曲线.

（2）*初等函数*

1）最简单的几类函数：把常数函数 $y=C$、幂函数 $y=x^\alpha$（α 为常数）、指数函数 $y=a^x$（$0<a\neq1$）、对数函数 $y=\log_a x$（$0<a\neq1$）、三角函数、反三角函数这六大类最简单的函数，称为基本初等函数. 对于它们的定义域，图形及其一些函数特性要十分熟悉，因为基本初等函数是一切函数的基础.

2）反函数：在 $y=f(x)$ 中，将 y 看作自变量，x 看作 y 的函数，则由关系式 $y=f(x)$ 确定 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $f(x)$ 的反函数，习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.（注

意:$f^{-1}(x)\neq\frac{1}{f(x)}$)在同一坐标系中 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$.

$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数,特别地,$y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数.

3)复合函数:如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,同时 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,而且当 x 在某一范围内取值时,相应的值 u 可使 y 有意义,则称 y 是 x 的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 为中间变量,从结构形式上看,复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 无非就是将 $y=f(x)$ 中变量 x 扩大为 x 的函数 $\varphi(x)$ 罢了,所以又可形象地说,复合函数就是函数的函数. 但要注意,在进行函数的复合时,$\varphi(x)$ 的值不能超出 $f(u)$ 的定义域范围,如 $y=\sqrt{u}$,$u=\ln x$ 就只能考查 $x\geqslant 1$ 的那些值,否则 $y=\sqrt{\ln x}$ 就没有意义.

4)初等函数:由基本初等函数经过有限次代数运算(加、减、乘、除以及乘方、开方运算)与复合而成的,且只用一个式子表达的函数称为初等函数. 初等函数是微积分学研究的主要对象,不能用一个式子表示的函数就不是初等函数,如分段函数就不是初等函数了.

(3)函数的特性

1)有界性:对函数 $y=f(x)$,如有正数 M,使 x 取其定义域内每一值时,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $y=f(x)$ 为有界函数,否则,称 $y=f(x)$ 为无界函数.

2)奇偶性:对函数 $y=f(x)$,如有 $f(-x)=-f(x)$,则称为奇函数;如有 $f(-x)=f(x)$,则称为偶函数. 经常运用的奇、偶函数的基本性质有:

①两个奇(偶)函数的代数和仍为奇(偶)函数.

②两个奇(偶)函数之积为偶函数;奇函数与偶函数的积为奇函数.

③若 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(t)$ 均为奇函数,则复合函数 $y=f[\varphi(t)]$ 为奇函数.

④若 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(t)$ 至少有一个为偶函数,则复合函数 $y=f[\varphi(t)]$ 为偶函数.

⑤若 $y=f(x)$ 为偶函数,且 $f(x)\neq 0$,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为偶函数.

3)周期性:若 $f(x+T)=f(x)$($T>0$,且是最小者),则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

4)单调性:设 x_1,x_2 是 $y=f(x)$ 定义区间 (a,b) 内任意两点,若 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加(或单调减少).

函数的特性要结合基本初等函数来理解、领会,使其具体化,同时亦加深了对基本初等函数的印象.

(4)极限

极限是从静态认识动态、从近似认识精确、从有限认识无限的一种数学方法,它是研究整个微积分学的理论基础和基本方法,微积分学中的一些重要概念(如无穷小,连续,导数,定积分等)无非是一些特定的极限问题. 对于极限这一类关键性问题(概念,性质)必须很好地理解、掌握.

关于极限的概念,万事开头难,数列的极限是其他类型极限的开门钥匙,它的理解使得对其他类型极限的理解容易多了. 首先从直观上理解数列极限,其次,弄清数列极限抽象的严格定义(即 ε-N 定义),从而在思想上形成一个概念:极限就是研究变量的变化趋势. 具体地说,变量 y 以 A 为极限,就是变量 y 向着常量 A 变,其接近 A 的程度:①越来越近,②要好近就有好近,归结为"任意近"("无限趋近"). 也可形象地说成:**极限极限,变量对准常变量;两者相距逐渐近,任意接近是关键**. 以上理解数列根限的要点同样可用于函数极限的学习中,但要分清

函数极限的两种情况,即 $x\to\infty$ 与 $x\to x_0$.

函数极限这一概念理解了,诸如无穷小,连续等概念就极为容易了,它们无非是一种特殊的极限而已. 事实上,无穷小量就是以零为极限的变量;函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续就是 $f(x)$ 在 x_0 处的极限值恰好等于其函数值,其分别用记号表示为 $\lim f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

关于函数极限以及有关函数连续等问题,借助于图形来思考,既直观,又便于理解与解决问题.

(5)连续

函数与极限为用分析的方法研究函数奠定了基础,但是函数的种类极为复杂,那么应从研究什么类型的函数开始呢?微积分的发展史告诉我们,无论从理论上或实际问题中都应从连续函数开始,这是因为,一方面在生产实际中所遇到的函数大多数是连续函数. 例如,工农业总产值的连续上升,人民收入水平的连续增加等;另一方面,我们常常直接或间接借助于连续函数讨论一些不连续函数,于是连续函数就成为微积分学的主要研究对象. 读者对连续的定义、性质应有清晰的了解,特别是对初等函数在定义区间内都是连续函数,闭区间上连续函数的最值、介值定理,读者要能理解并能应用.

(6)导数与微分

称极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$(若此极限存在)为函数 $f(x)$ 的导函数,记为 $f'(x)$.

称极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$(若极限存在)为二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导数,记为 $f'_x(x,y)$.

称 $f'(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $y=f(x)$ 的微分,记为 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

称 $f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$ 为二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分,记为 $\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$.

对于导数与微分这两个重要概念,应理解以下各点:

1)导数是函数增量与自变量增量之比值,当自变量增量趋于零时的极限. 微分是函数导数与自变量微分之积. 容易看出,导数与微分两大概念是以极限为基础的,可以认为是一种特定的极限. 导数描述的是函数在点 x 处的变化快慢程度,讨论的是当一个函数的自变量发生变化时,引起函数自身所产生的变化率,因此,导数是研究变化率问题. 其基本思想方法是:**区间分小段,变用不变算,近似到精确,利用取极限**. 微分则是描述当自变量在某一点取得一个微小增量时,函数取得相应改变量的大小. 可以说成是:微分是函数增量的线性主部,即 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 之差为 Δx 的高阶无穷小,亦即 $\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$.

2)导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率. 其切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$;微分 $f'(x_0)\mathrm{d}x$ 的几何意义是切线上的对应于横坐标改变量 Δx 这一段的纵坐标改变量,当 Δx 充分小时,有 $\mathrm{d}y\approx\Delta y$,这叫"以直代曲"(用切线代替曲线).

3)可导一定连续,连续不一定可导. 如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续,但左导数

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to x_0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to x_0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

右导数

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

由于$f'_-(0) \neq f'_+(0)$，因此$f'(0)$不存在.

注：$f'(x_0)$存在的充要条件是：$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. 即$f(x)$在x_0处可导的充要条件是$f(x)$在x_0处左、右导数存在且相等.

4）函数$y=f(x)$在x_0处可微的充要条件是它在该点x_0处可导，且$dy = f'(x_0)dx$.

函数$y=f(x)$在x_0处可导的充要条件是它在该点x_0处可微，且

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

故导数又称微商，可简单表示为

$$\text{可导} \Longleftrightarrow \text{可微}$$

从上面可以看出，导数与微分虽然有密切而不可分割的关系，但两者又是不同的两个概念，绝不能将二者概念相混淆，两者的共同点均是研究函数在某点附近的局部性态问题.

(7) 不定积分与定积分

若对任一$x \in I$（区间），均有$F'(x) = f(x)$，则称函数$F(x)$为$f(x)$在区间I内的一个原函数.

在区间I内，$f(x)$的所有原函数称为函数$f(x)$在区间I内的不定积分，记为$\int f(x)dx$，即若在I内，$F'(x) = f(x)$，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

称乘积和式的极限$\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$为连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分. 记为$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

对于定积分概念，读者应理解以下各点：

1）积分和式的极限存在（即$\int_a^b f(x)dx$存在）要求：既与区间$[a,b]$的分法无关，又与各ξ_i的取法无关. 因此，在借助于积分和式极限计算定积分时，可以只从方便着眼来选取区间$[a,b]$的分法与各ξ_i点的位置. 例如，经常把区间$[a,b]$分成n个相等长度的子区间，取各子区间的左端点x_{i-1}（或右端点x_i）作为ξ_i来方便计算.

2）定积分$\int_a^b f(x)dx$既是一个特定形式的极限，因此它是一个数，这个数只由被积函数$f(x)$与积分区间$[a,b]$来唯一确定，而与积分变量用什么字母表示无关，即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

综合1),2),定积分具有三无关,两有关的特性.

3)保证定积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$存在的条件是$f(x)$在$[a,b]$上的连续性,连续函数的定积分一定存在,但连续条件仅仅是个充分条件,不是必要条件.一些非连续的函数,例如:在$[a,b]$上只有有限个间断点的有界函数以及单调有界函数,它们的定积分也是存在的.

4)定积分的定义是在$a<b$时给出的,当$a>b$时,规定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

即交换积分上、下限,其值仅差一个负号,特别地:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

5) $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\ (a\leqslant x\leqslant b)$是关于变量$x$的一个"新函数",习惯上称它变上限函数,即

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

而广义积分可理解为变上限(定积分)函数的一个极限过程.

6)定积分的基本思想方法可理解为:**化整为零无限分,以常代变得微分,积零为整微分和,无限积累是积分.**

1.1.3 基本方法

(1)*极限求法*

对一些简单的基本极限题,要求读者能够计算,这里限于初等求极限方法,至于较难的极限(未定式极限)题,用高等求极限方法——罗彼达法则很易解决,那将作为导数的应用在下文给出.初等求极限方法通常有以下几种:

1)利用极限定义,验证某常数为已知变量的极限,通常是直观猜出的极限值,但这要验证,否则有可能出现猜测错误.

2)利用连续概念求极限,即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

3)利用极限的四则运算求极限.

4)利用无穷小量的性质求极限(如等价无穷小替换法,无穷小分除法).

5)化为连续函数求极限.

6)利用两个重要极限求极限.

以上各法将在范例分析中加以举例说明.

(2)*求导(微)方法*

初等函数的导数求法是本篇第2章的重点内容,读者务必要掌握,除理解并记住求导的基本公式、法则外,还要适当地多练习一些题目,做到熟能生巧,解题无误.

关于初等函数的求导方法,总结如下几点:

1)定义求导法:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

是一切初等函数求导的基础,求导基本公式及法则都是由它推出的,但用于具体做题计算上则较为繁难,故不宜常用.

2)四则求导法:

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$
$$(uv)' = u'v + uv',$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$$

3)反函数求导法:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}\left(\text{即}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right)$$

4)复合函数求导法:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

5)隐函数求导法:

由方程 $F(x,y)=0$ 两边同时对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F[x,y(x)] = 0$$

再从中解出隐函数 y 的导数 $y'(x)$,即得 $f'(x)$.

6)利用对数求导法:

主要解决幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}$ 的求导问题,将幂指函数两边取自然对数,有

$$\ln y = v(x)\ln u(x)$$

再利用隐函数求导法,即可求出 y'.

7)高阶导数求法:

将 $f'(x)$ 再对 x 求导,即得 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$,再将 $f''(x)$ 对 x 求导,又得 $f(x)$ 的三阶导数 $f'''(x)$,……

8)偏导数求导法:

对二元及二元以上的函数才有求偏导数的问题,多元函数对某变量求偏导数,就是把除该变量以外的其他变量视为常数,转化为对该变量的一元函数的求导问题.

同时,对于导数与微分求法尚需理解以下四点:

1)对导数的基本公式与基本法则,首先需要理解记牢,然后要求会用.

2)复合函数求导是一个重点,也是一个难点.说它是重点,是因为客观实际中复合函数广泛存在,正确求出其导数,这本身就是一件重要的事情,另外,其他不少求导法——如隐函数求导法,取对数求导法,参数方程求导法(未讲,不要求)都可归结为复合函数求导的问题;说它是难点,这是因为初学者对复合分解理解一时不清,求导时很易掉项,克服的办法就是对复合函数的结构要搞清楚,能正确地把握复合函数分解为若干基本初等函数的形式,再一层一层地求导就不易错了.

3)微分求法,只要求出了函数的导数 $f'(x)$,再乘以 $\mathrm{d}x$ 就行了,因此求微分的问题实际上就是求导问题,而且微分的基本公式与基本法则可仿照导数的基本公式与基本法则移植过来,即有一个导数公式,就相应地有一个微分公式,如 $(\cos x)' = -\sin x$,有 $\mathrm{d}\cos x = -\sin x\mathrm{d}x$,有一

个导数法则就有相应的一个微分法则，如$(uv)'=u'v+uv'$，有$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$，可见，记上一个导数公式或法则，就能相应地记上一个微分公式或法则，不仅如此，记上一个导数公式也就相应地可记上一个积分公式，由此，导数公式及法则，读者千万要牢记.

4）初等函数求导问题是本篇第2章的中心问题. 为便于读者掌握这个中心问题，特给出以下通俗顺口溜，以示小结：

初等函数好求导，分析结构第一炮；

四则复合尽管繁，抓住运算末一道；

它是四则我四则，复合加尾记牢靠；

剥开一层又一层，终归破尽连环套.

（3）*定积分计算方法*

利用定积分定义计算定积分，由于其繁难而应用不便，通过寻求定积分与原函数之间的关系而建立的牛顿-莱布尼兹公式是积分学的基本公式，它提供了一个用原函数计算定积分的简便而统一的方法.

对于定积分的计算，读者首先要熟悉不定积分与定积分的性质，然后要牢记积分的基本公式，同时要熟练掌握不定积分的求法，对于不定积分的换元法与分部积分法，读者要亲手做相当数量的题目，来保证其熟练性与技巧性，定积分有如下计算方法：

1）用原函数计算定积分：设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ (a\leqslant x\leqslant b) \tag{a}$$

在$[a,b]$上连续，且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x) \tag{b}$$

这是一个具有巨大原则性与实用意义的结论，必须深刻理解，请注意以下几点：

①用定积分定义函数是一种新的表示函数的方法，一定要从函数定义弄清楚为什么说式(a)确定了上限x的一个函数，同时要分清楚x和t两个变量的不同作用，x在这里表示积分区间的右端点，积分变量t在$[a,x]$之间变化，如果遇到积分变量仍用x来表示的情形，即记为$\Phi(x)=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$，一定要把作为上限的这个变量$x$与积分变量的$x$区别开来，不要混淆.

②因为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)$，所以$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$是被积函数$f(x)$的一个原函数，这揭露出了定积分与原函数的本质联系，因此，如果知道$F(x)$是$f(x)$的任何一个原函数（即$F'(x)=f(x)$），则由

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)+C,\quad C=-F(a)$$

有

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)-F(a) \tag{c}$$

③对于积分下限是变量的积分，可以类似地建立上述结论，例如：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]=-f(x)$$

④著名牛顿-莱布尼兹公式由式(c)直接得出（令$x=b$）：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,注意这个公式通常只能用于被积函数 $f(x)$ 为连续的情形,对于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,但有间断点的情形要具体考虑,由于计算定积分值的原函数 $F(x)$ 可利用基本积分公式和不定积分法求出,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

选取的 $F(x)$ 也必须在积分区间 $[a,b]$ 上连续,牛顿-莱布尼兹公式把定积分的计算问题转化为求原函数问题.

2)用换元法计算定积分:换元法是求不定积分的基本方法之一,它原则上也可用于计算定积分,不同的是在不定积分换元时,求出原函数后仍要还原成原来的变量,但在定积分计算时,却可以不必这样,只要在作积分变量替换时,相应地也把积分上限、下限加以改变就行了,最后可以不必再换回原积分变量;因为定积分乃是一个数,如果变换后的定积分计算出来了,那么原来的定积分也自然地计算出来了.

一般定积分的换元法可概述如下:

求定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 时,可以选取 $x=\varphi(t)$,若当 $x=a$ 时,$t=\alpha$;当 $x=b$ 时,$t=\beta$(即 $a=\varphi(\alpha)$,$b=\varphi(\beta)$),则可将原来对 x 的定积分转化为如下对 t 的定积分:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

必须注意:选用的函数 $x=\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上应是单值、单调的且具有连续导数 $\varphi'(x)$;如果换元时用函数 $t=\psi(x)$ 来引入新变量 t,则必要求 $t=\psi(x)$ 的反函数 $x=\varphi(t)$ 满足上面所叙述的条件. 否则,就可能会造成错误.

利用定积分的换元法证得的许多公式,对于某些类型的函数的积分可以做出重大的简化,下面一些公式经常用到:

①$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$.

②若 $f(x)$ 为奇函数,则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

③若 $f(x)$ 为偶函数,则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

④若 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数,则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

⑤$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$.

⑥$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x$.

⑦$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

⑧$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x$.

⑨$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

3)用分部积分法计算定积分:应用分部积分法计算定积分的过程与不定积分一样,只是其中已积出的部分要用积分的上、下限代入,未积出的部分仍然是一个定积分,其上、下限不变,即

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

1.1.4 主要应用

(1)微分学的应用

微积分学的应用是很广泛的,这里主要要求读者能在以下方面有所作为:

1)微分中值定理

设函数 $y=f(x)$ 满足:①在闭区间 $[a,b]$ 上连续;②在开区间 (a,b) 内可导,则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a<\xi<b)$$

成立.

2)罗彼达法则

设函数 $f(x),g(x)$ 满足:

①在点 x_0 的某个邻域内(x_0 可除外)可导,且 $g'(x)\neq 0$;

②$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

③$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 存在(或为无穷大).

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\ \infty)$$

注意:①若将此法则中 x 的趋势改为 $x\to\infty$,法则仍然成立,且称这种极限式为"$\dfrac{0}{0}$"型未定式.

②当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式,仍有相应的罗彼达法则.

③不是未定式绝对不能用罗彼达法则,且该法则是分子、分母各求各的导数,而不是求整个分式的导数.

④罗彼达法则还可用来解决 $0\cdot\infty$;$\infty-\infty$;1^{∞};0^0;∞^0 等类型的未定式的极限问题,办法是通过适当的等式变形,将它化为"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型等两种基本未定式的极限.

3)函数的增减性

设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导,

若 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 单调增加;

若 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 单调减少.

4）函数的极值

极值的必要条件：若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f(x_0)$ 是极值，则 $f'(x_0)=0$.

极值的充分条件（第一判别法）：设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内可导，且 $f'(x_0)=0$（或 $f'(x_0)$ 不存在），当 x 逐渐增大并经过 x_0 时有：

①若 $f'(x)$ 由正变负，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

②若 $f'(x)$ 由负变正，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值.

③若 $f'(x)$ 不变号，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点，$f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

极值的充分条件（第二判别法）：设 $y=f(x)$ 在 x_0 处有 $f''(x)$，且 $f'(x_0)=0$，则有：

①若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

②若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值.

③若 $f''(x_0)=0$，则此法失效（即不能判别 $f(x_0)$ 是否为极值），可采用第一判别法.

关于函数极值注意以下几点：

①极值与极值点不是一回事，极值指的是函数值，而极值点指的是使 $f(x_0)$ 成为极值的 x_0 的取值，即横坐标.

②极值点必是驻点（一阶导数为 0 的点）或一阶导数不存在的点，但驻点或一阶导数不存在的点不一定是极值点.

5）函数的最值

若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最大值（或最小值）.

最值的一般求法：设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求出 (a,b) 内的一切驻点和一切不可导的点；然后比较这些点与端点的函数值的大小，谁最大即为最大值，谁最小即为最小值.

特殊情况下最值的求法：

①若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增（减），则 $f(a)$ 为最小（大）值，$f(b)$ 为最大（小）值.

②若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内只有唯一极值点 x_0，则 $f(x_0)$ 为相应的最值.

③由实际问题列出的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 或 (a,b) 内可导，又由实际情况判定函数 $f(x)$ 在该区间内部有最值，如 $f(x)$ 在这区间只有唯一一个驻点，则这驻点就是相应函数的最值点，其函数值 $f(x_0)$ 即为最值.

6）曲线的凹向性与拐点

设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数，则在该区间上，当 $f''(x)>0$ 时，则曲线弧凹向向上（凹的）；当 $f''(x)<0$ 时，则曲线弧凹向向下（凸的）.

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的二阶导数 $f''(x)$ 连续，且 $f''(x_0)=0$，$(x_0\in(a,b))$，若当 x 逐渐增加且通过 x_0 时，$f''(x)$ 变号（不变号），则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点（不为拐点）.

7）边际分析

导函数 $f'(x)$ 又称为边际函数，$f'(x_0)$ 又称边际函数值. 在讨论某个经济函数 $y=f(x)$ 时，常用 $f'(x_0)$ 去分析 y 在 x_0 处的"边际上"的变化，且将 $f'(x_0)$ 称为"边际"，经济分析中涉及"边际"的量是很多的，如边际成本（成本函数 $C(x)$ 的导数 $C'(x)$），边际收益（收益函数 $R(x)$ 的导数 $R'(x)$），边际利润（利润函数 $L(x)$ 的导数 $L'(x)$）等.

8）弹性分析

相对改变量比值的极限，即