

参加“中国光学学会”成立大会  
文论文, 1979.12.9-17, 北京

# 观测的辐射率到等离子体 发射的径向分佈的变换— Abel 变换的一种解法

丁培柱 潘守甫

(吉林大学, 原子与分子物理研究所)

吉林大学原子与分子物理研究所

1979.12.5.

# 观测的辐射率到等离子体发射的径向分佈的变换

## — Abel 变换的一种解法

丁培柱 潘守甫

(吉林大学原子与分子物理研究所)

本文描述了把观测到的等离子体发光的辐射率变换成等离子体发射的径向分佈的一种新的计算方法。该方法的特点是把 Abel 变换的广义积分变化成通常的积分, 这样就能够使用惯常的各种近似积分公式, 很方便地可以直接从实验数据计算到所要求的数据精度。可以把这种方法应用到在等离子体物理和天体物理中经常遇到的柱对称或球对称的光学薄的等离子体上。

### 一、引言

在实验室和天体物理中, 经常遇到一些圆柱形或球形对称性的等离子体。对这种等离子体进行光谱观测是针对着一个等离子体圆盘拍摄的。图1表明了这种拍摄的方式。这样拍摄出的谱线给予我们的信息是这个圆盘形等离子体各点辐射的一种综合性叠加效应。可是, 我们经常有兴趣的是要知道在等离子体内每一个点处的辐射性质。这就要求我们把从实验上测得的辐射率(其定义为单位时间经过垂直于 $\gamma$ 方向的单位面积, 在单位频率间隔中通过单位立体角所辐射出的能量)与分布在等离子体内每一个点处的辐射发射, 即发射系数, 联系起来。

~2~

单位时间，在单位体积里，单位频率间隔，经过单位立体角所发射出的能量）。这种把辐射率变化到空间分角形式的发射系数的变换，就被称为 Abel 变换。

Hörman<sup>[1]</sup> 和 Brinkman<sup>[2]</sup> 曾给出过这个问题的图解法。这种解法很冗长，很不准确，而且大部份是手工操作。Maecker<sup>[3]</sup> 和 Pearce<sup>[4]</sup> 提出了数值解法。Friedrich<sup>[5]</sup> 提出一种数值解法和图解法相结合的方法。这些解法的精度都不高。Bockasten<sup>[6]</sup> 发展了一种新的数值解法。他是把对于凡属于此种性质的等离子体所测得的实验辐射率曲线都用三阶多项式来逼近，从而找到空间各点的发射率，然后把它们代入到 Abel 变换中，再求出对这种逼近的变换系数，然后求出发射系数。这种方法的缺点是麻烦，精度也不够。

本文提出一种新的求解光学薄的圆柱形或球形等离子体光谱的 Abel 变换的算法。其特点是把 Abel 变换的广义积分通过作分部积分而变换成通常的积分，这样就能使用惯常的各种近似积分公式，很方便地可以直接从实验数据把发射系数计算到所要求的数据精度。

在本文的下一节中将把 Abel 变换的广义积分化简成通常的积分，并论述对这种通常积分的数值解法。在第三节中将列举出数值计算结果，并对计算收敛性作些讨论。

本文所述的计算方法已被写成 BCY 算法语言，在 709 (TQ-16) 电子计算机上使用过。

## 二. 公式推导及近似算法

图1插图了一个平行于  $x-y$  平面的等离子体圆盘， $r_0$  为拍摄时摄下的圆柱形等离子体半径，假设光子发射线相对  $x$  对该算法有兴趣者可索取源程序副本，也可来校复制计算程序。

于Z轴具有圆柱形对称性。又假设辐射是各向同性的，且在等离子体中没有吸收。 $I(x)$  表示在离开YZ平面的x距离处的Y方向上的光谱发射率。如果用 $\epsilon(r)$ 表示在离开原点为r的距离处的等离子体的发射系数，那么有Abel变换<sup>[7]</sup>

$$\epsilon(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{x_0} \frac{I'(x) dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}}, \quad (1)$$

式中 $I(x)$ 是由实验测得的值。因为(1)式显然为一广义积分，用通常的等距节点求积公式或者，

Gauss型求积公式都存在各自的缺点。我们设法消去积分(1)在Y点附近的奇异性，化成通常的积分，而后再用普通的求积公式，譬如Simpson公式即可方便地计算出所需精度的积分值。

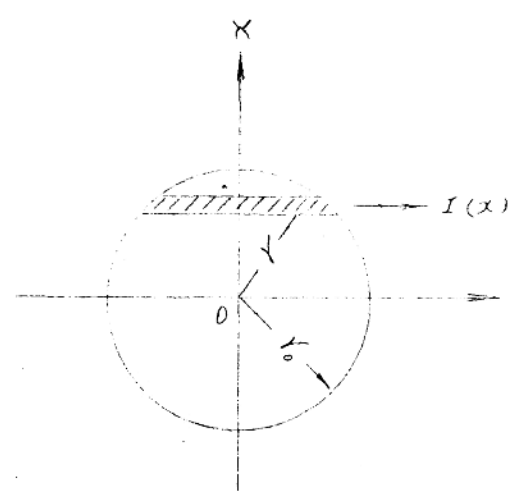


图1. 在Abel变换中使用的圆柱对称等离子体的光路图

~ 4 ~

考虑广义积分

$$\int_r^{Y_0} \frac{I'(x)}{(x^2-r^2)^{1/2}} dx, \quad (0 \leq r \leq Y_0) \quad (2)$$

的数值计称。从物理上考虑,  $I(x)$  是充分光滑的, 且关于  $x=0$  对称, 从而

$$I'(0) = 0. \quad (3)$$

于是当  $0 < r < Y_0$  时, 将(2)分部积分得

$$\begin{aligned} \int_r^{Y_0} \frac{I'(x)}{(x^2-r^2)^{1/2}} dx &= \int_r^{Y_0} \frac{x}{(x^2-r^2)^{1/2}} \cdot \frac{I'(x)}{x} dx \\ &= \frac{I'(x)}{x} \sqrt{x^2-r^2} \Big|_r^{Y_0} - \int_r^{Y_0} \left( \frac{I'(x)}{x} \right)' \sqrt{x^2-r^2} dx \\ &= \frac{I'(Y_0)}{Y_0} \sqrt{Y_0^2-r^2} + \int_r^{Y_0} \left\{ \frac{I'(x)}{x} - I''(x) \right\} \frac{\sqrt{x^2-r^2}}{x} dx. \quad (4) \end{aligned}$$

上式右端的积分是通常的积分, 可用通常的办法进行数值计称; 当  $r=0$  时, 积分(2)成为

$$\int_0^{Y_0} \frac{I'(x)}{x} dx. \quad (5)$$

由(3)

$$I'(x) = I''(0)x + \frac{1}{2!} I'''(0)x^2 + \dots,$$

从而

$$\frac{I'(x)}{x} \longrightarrow I''(0) \quad (x \rightarrow 0+),$$

可见(5)也是通常的积分, 也可用通常的办法作数值计称。

采用 Simpson 公式, 记

$$f(x; y) = \left\{ \frac{I'(x)}{x} - I''(x) \right\} \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x},$$

$$g(x) = \frac{I'(x)}{x}.$$

将  $[0, y_0]$  分成  $2N$  等分, 分点是

$$0 = y_{2N}, y_{2N-1}, y_{2N-2}, \dots, y_{2N}, y_{2N-1}, y_{2N-2}, \dots, y_2, y_1, y_0.$$

测得辐射率  $I(x)$  在这些分点上的值为

$$I(0) = I(y_{2N}), I(y_{2N-1}), I(y_{2N-2}), \dots, I(y_n), I(y_{2n-1}),$$

$$I(y_{2n-1}), \dots, I(y_2), I(y_1), I(y_0).$$

记每等分的长度

$$y_{2n-1} - y_{2n} = y_{2n-2} - y_{2n-1} = h.$$

以差商代替微商, 则对  $n=1, 2, \dots, N-1$ , 有

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int_{y_{2n}}^{y_0} f(x, y_{2n}) dx = \sum_{j=1}^N \int_{y_{2j}}^{y_{2j-1}} f(x, y_{2n}) dx \\ &= \frac{h}{3} \left\{ f(y_{2n}, y_{2n}) + f(y_0, y_{2n}) + 2 \sum_{j=n-1}^1 f(y_{2j}, y_{2n}) \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{j=n}^1 f(y_{2j-1}, y_{2n}) \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$f(y_0, y_{2n}) = \left\{ \frac{I(y_0) - I(y_1)}{y_0 h} - \frac{I(y_2) + I(y_0) - 2I(y_1)}{h^2} \right\} \frac{\sqrt{y_0^2 - y_{2n}^2}}{y_0},$$

$$f(y_{2n}, y_{2n}) = \left\{ \frac{I(y_{2n-1}) - I(y_{2n})}{y_{2n} h} - \frac{I(y_{2n-2}) + I(y_{2n}) - 2I(y_{2n-1})}{h^2} \right\}.$$

~ 6 ~

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{Y_{2N}^2 - Y_{2N}^2}}{Y_{2N}} = 0, \\ & f(Y_{2j-1}, Y_{2N}) = \left\{ \frac{I(Y_{2j-2}) - I(Y_{2j-1})}{Y_{2j-1} \cdot h} - \frac{I(Y_{2j-2}) + I(Y_{2j}) - 2I(Y_{2j-1})}{h^2} \right\} \cdot \frac{\sqrt{Y_{2j-1}^2 - Y_{2N}^2}}{Y_{2j-1}}, \\ & f(Y_{2j}, Y_{2N}) = \left\{ \frac{I(Y_{2j-1}) - I(Y_{2j})}{Y_{2j} \cdot h} - \frac{I(Y_{2j-1}) + I(Y_{2j+1}) - 2I(Y_{2j})}{h^2} \right\} \cdot \frac{\sqrt{Y_{2j}^2 - Y_{2N}^2}}{Y_{2j}}, \end{aligned} \quad (6)$$

而

$$\begin{aligned} I_{2N} &= \int_0^{Y_N} g(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{Y_{2j}}^{Y_{2j-2}} g(x) dx \\ &= \frac{h}{3} \left\{ g(0) + g(Y_N) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} g(Y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^N g(Y_{2j-1}) \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} g(0) &= I''(0) = \frac{2[I(Y_{2N-1}) - I(0)]}{h^2}, \\ g(Y_N) &= \frac{I(Y_N) - I(Y_1)}{Y_N \cdot h}, \\ g(Y_{2j}) &= \frac{I(Y_{2j-1}) - I(Y_{2j})}{Y_{2j} \cdot h}, \\ g(Y_{2j-1}) &= \frac{I(Y_{2j-2}) - I(Y_{2j-1})}{Y_{2j-1} \cdot h}. \end{aligned} \quad (7)$$

于是得

$$\varepsilon(r_{2n}) = -\frac{1}{\pi} \frac{I(r_0) - I(r_1)}{r_0 \cdot h} \sqrt{r_0^2 - r_{2n}^2} - \frac{1}{\pi} I_{2n} \pi$$

$$(n=1, 2, \dots, N-1), \quad (8)$$

$$\varepsilon(0) = -\frac{1}{\pi} I_{2N}.$$

· 如果由上述计标所求得的积分精度不够, 可对整个区间采用逐次分半的办法再将分点加倍, 仿上所述, 再按 Simpson 公式进行计标, 继续进行下去, 直至达到所需之精度要求。

### 三、数值结果及讨论

我们以两个人为的例子, 用最后的结果公式 (8) 作数值计标, 来分析讨论我们所得到的理论公式。

1. 设测得的光谱发射率  $I(x) = 1600(1-x^2)$ 。

由此式所表达的光谱发射率可以严格地计标出发射系数  $\varepsilon(r)$ , 由此, 可以与提供近似计算公式得到的数值结果作严格的比较。

近似计标公式得到的数值结果和严格积分得到的结果列在表 1 中。在表 1 中还列出了逐次近似结果与严格值比较的误差。

~ 8 ~

表 1. 发射系数  $\varepsilon(\gamma)$  的数值计算结果、严格值和误差<sup>1)</sup>

| $\gamma$ | 初始计算结果    | 区间一次分半              | 区间二次分半              | 区间三次分半               | 精确值       |
|----------|-----------|---------------------|---------------------|----------------------|-----------|
| 0        | 1131.2474 | 1086.2829<br>6.79%  | 1058.0361<br>4.016% | 1041.0925<br>2.35%   | 1017.1884 |
| 0.125    | 1032.7400 | 1022.5066<br>1.32%  | 1016.7197<br>0.74%  | 1013.6954<br>0.44%   | 1009.2098 |
| 0.250    | 988.50332 | 987.86205<br>0.30%  | 987.16247<br>0.23%  | 986.72449<br>0.186%  | 984.89267 |
| 0.375    | 935.85102 | 940.44958<br>0.266% | 942.44623<br>0.054% | 943.37466<br>0.044%  | 942.95908 |
| 0.500    | 867.59599 | 875.20352<br>0.648% | 878.74614<br>0.246% | 880.45573<br>0.0516% | 880.91058 |
| 0.625    | 777.61279 | 786.67319<br>0.928% | 790.97697<br>0.386% | 793.07472<br>0.122%  | 794.04269 |
| 0.750    | 655.97624 | 665.10439<br>1.28%  | 669.47965<br>0.632% | 671.62193<br>0.18%   | 673.73504 |
| 0.875    | 478.40819 | 485.94950<br>1.32%  | 489.58070<br>0.591% | 491.36286<br>0.22%   | 492.44379 |
| 1        | 0         | 0                   | 0                   | 0                    | 0         |

1). 表中的误差百分比係计算值与精确值之差与精确值之比。

2). 设测得的光谱发射率  $I(x) = 800(1 + \cos \pi x)$ 。

该公式不能严格的求出积分结果。我们把数值结果和相对误差列在表 2 中。

表2、发射系数 $E(r)$ 的数值计算结果和逐次近似的相对误差<sup>1)</sup>

| $r$   | 初始计算结果              | 区间一次分半              | 区间二次分半              | 区间三次分半    |
|-------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|
| 0     | 1626.7735<br>2.76%  | 1583.0425<br>1.84%  | 1554.4501<br>3.88%  | 1496.4072 |
| 0.125 | 1521.5203<br>2.74%  | 1480.9945<br>1.54%  | 1458.4984<br>0.822% | 1446.6063 |
| 0.25  | 1352.1845<br>1.84%  | 1327.7557<br>1.03%  | 1314.1989<br>0.548% | 1307.0303 |
| 0.375 | 1134.2723<br>1.73%  | 1114.9537<br>0.969% | 1104.2039<br>0.506% | 1098.7213 |
| 0.500 | 877.74361<br>2.14%  | 859.35366<br>1.10%  | 849.35639<br>0.617% | 844.14811 |
| 0.625 | 606.81610<br>3.16%  | 588.22085<br>1.64%  | 578.28235<br>0.899% | 573.12891 |
| 0.750 | 350.72438<br>5.40%  | 332.75329<br>2.94%  | 323.25657<br>1.54%  | 318.35262 |
| 0.875 | 139.48035<br>10.41% | 124.95276<br>6.53%  | 117.79825<br>3.50%  | 113.33376 |
| 1     | 0                   | 0                   | 0                   | 0         |

1) 表中的误差百分比係相邻两次计算值之差与后次计算值之比。

从上述二例可见，在逐次分半过程中，对 $r$ 来说中间部份近似程度较高；愈临近 $Y_0$ ，虽然收敛速度很快，但近似程度不

~10~

及中间部份高。(文[6]中的方法也存在这个问题)。不难想像,愈临近 $Y_0$ 愈增加分半的次数,可以改进临近 $Y_0$ 的点上的精确度。

另外,从上述二例中还可看出,增加区间分半次数可以很快地提高计称精度。事实上,要作到这一点对于近代物理实验来说是一件很容易的事。这只要把测得的辐射率作为电子计称机的输入端,直接把测得的数据曲线送入电子计称机中,就可以随意按所需要的精度逐次把区间分半,直至算得的结果达到所需的精度为止。这样作由于计称速度很快,所需的机时是很少的。

本文在计称中曾与李震雷同志进行过多次有益的讨论,作者表示诚挚的感谢。

## 参考文献

- (1) H. Hörmann, Z. Physik, 97, 539 (1935).
- (2) H. Brinkman, "Optische Studie Van de Electriscbe Lichtboog", Thesis, University of Utrecht, Utrecht, Netherlands (1937). P. 05
- (3) H. Maecker, Z. Physik, 136, 119 (1953); 139, 448 (1954).
- (4) W. J. Pearce, Conference on Extremely High Temperatures, Edited by H. Fischer and L. C. Mansur (John Wiley & Sons, Inc., N. Y., (1958)), P. 723.

~11~

{5} J. Friedrich, Ann. Physik, 3, 327 (1959).

{6} K. Bockasten, J. Opt. Soc. Am., 51, 943  
(1961).

{7} H. R. Griem, Plasma Spectroscopy, McGraw-  
-HILL Book Company, N. Y., (1964)

• {8} 李岳生, 莫友謙, 数值逼近, 人民教育出版社 (1978).