层论及其上同调理论

CENGLUNJIQI
SHANGTONGTIAO
LILUN

陈志华 著

同济大学出版社

层论及其上同调理论

陈志华　著

同济大学出版社

内容提要

层论是20世纪数学发展的最重大成就之一，不仅理论本身十分完美，而且对数学的很多分支——代数拓扑、代数几何、多复变函数和偏微分方程等都产生过重大的影响，并得到广泛的应用。本书是作者自1978年起对层论研究的总结，主要内容有：层与预层、层的上同调理论、Čech上同调理论、凝聚层、解析凝聚层和全纯向量丛等。

本书可作为高等院校应用数学专业的研究生教材，也可供致力于相关专业的研究人员和工程技术人员参考。

责任编辑　李炳钊
封面设计　陈益平

层论及其上同调理论
陈志华　著
同济大学出版社出版
(上海四平路1239号　邮编:200092)
新华书店　上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本:850×1168　1/32　印张:5.75 字数:160千字
1997年5月第1版　1997年5月第1次印刷
印数:1—500　　定价:12.00元
ISBN　7-5608-1782-3/O·153

前　　言

层论是由法国大数学家 Jean Leray 创立的，无疑，层论是本世纪数学发展中的最重大成就之一，这不仅在于这个理论本身完美，最主要的是它对数学的很多分支产生了重大影响并得到广泛的应用，诸如代数拓扑、代数几何、多复变函数、偏微分方程等。

作者自 1978 年起分别在中国科学院数学研究所，中国科学院研究生院、南京大学、中国科技大学、华东师范大学、中国科学院数学研究所暑期讨论班、上海交通大学、南开大学数学研究所、湖南师范大学和同济大学等地讲过有关层论的内容，深感应该有一本适合我国情况的有关层论方面的书提供给国内的学子，特别是提供给有志于自学层论的青年学者，这就是作者撰写本书的动机，如果本书能在这方面起一些作用，就不枉此书的撰写与出版。

本书的选材力求适合国内学者的情况，力求精练，不求大而全，按作者个人经验，长而全的数学书往往是较难读的。限于作者的学术水平与经验，本书的错误与失当之处恐在所难免，望读者不吝指正为盼。

十分感谢同济大学与同济大学出版社支持本书的出版，在目前能支持纯学术图书的出版都是难能可贵的。

作者　陈志华

1996 年 9 月 8 日

目　录

第一章　层与预层

1.1　预　层

定义 1.1.1　设 X 是一个拓扑空间，$\mathscr{U}_X$ 表示拓扑空间 X 的所有开集所成之族，对每个开集 $U\in\mathscr{U}_X$ 对应有一个交换群 $\mathscr{F}(U)$，且对于两个 $U,V\in\mathscr{U}_X$；如果 $U\supset V$，则有一个交换群同态 ρ_{UV}：$\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$. 若 $(\mathscr{F}(U),\rho_{U,V})_{U\in\mathscr{U}_X}$ 满足下面的三个条件：

(s_1)对任意的 $U,V,W\in\mathscr{U}_X$，且有 $U\supset V\supset W$，则有

$$\rho_{UW}=\rho_{VW}\circ\rho_{UV},\rho_{UU}=id;\tag{1.1.1}$$

(s_2)如 $U,(U_i)_{i\in I}$都是 X 的开集，而且 $U=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$，如果 $f,g\in\mathscr{F}(U)$，且对 $\forall\, i\in I$ $\rho_{UV_i}(f)=\rho_{UV_i}(g)$，则 $f=g$；

(s_3)如 $U,(U_i)_{i\in I}$都是 X 的开集，而且 $U=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$，如对每个 $i\in I$，有 $f_i\in\mathscr{F}(U_i)$且适合

$$\rho_{U_iU_i\cap U_j}(f_i)=\rho_{U_jU_i\cap U_j}(f_j);$$

对 $\forall\, i,j\in I$ 与 $U_i\cap U_j\neq\phi$。则一定存在一个 $f\in\mathscr{F}(U)$，使得 $\rho_{UU_i}(f)=f_i$；对所有的 $i\in I$.

这样的$(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$就称之为拓扑空间 X 上的一个**交换群预层**，或简称为**群预层**，乃至**预层**。

注：有的书将定义 1.1.1 中只具有性质(s_1)，而不具有(s_2)与(s_3)定义为预层，这样定义了更一般的预层，本书中只讨论定义 1.1.1中所定义的预层。

例 1　$X=\boldsymbol{R}^n$ 是 n 维实欧氏空间，$\mathscr{U}_X$ 就是通常 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集全体，对 $\boldsymbol{R}^n$ 中每一个开集 U，$\mathscr{F}(U)$是 U 上的 C^∞ 函数的全体，对

U 上的 C^∞ 函数的加法而言 $\mathscr{F}(U)$ 成为一个交换群，对 $\boldsymbol{R}^n$ 中两个开集 U, V，且有 $U \supset V$，ρ_{UV} 即为通常的限制映射，即将 U 上的 C^∞ 函数限制在 V 上所成的 V 上的 C^∞ 函数，显然 ρ_{UV} 是 $\mathscr{F}(U)$ 到 $\mathscr{F}(V)$ 上的一个群同志，而且易于验证 $(\mathscr{F}(U), \rho_{UV})_{U \in \mathscr{X}_X}$ 满足定义 1.1.1 中的 (s_1)，(s_2) 和 (s_3)，因此它是 $X = \boldsymbol{R}^n$ 上的一个群预层。

为了进一步叙述层的定义，这里有必要提一下**直接极限**的定义。

$S = \{a, b, c, \cdots\}$ 称之为是一个**有向集**，如果 S 上有一个自反、传递关系 $<$（即 $a < a$；$a < b, b < c \Rightarrow a < c$），使对 $\forall\, a, b \in S$，必 $\exists\, c \in S$，使 $c < a$ 与 $c < b$（注意在有向集的定义中并不要求任何两个元素 a, b 之间必须有 $a < b$ 或 $b < a$ 的关系）。$\{(G_a)_{a \in s}, <, \rho_{ab})$ 称之为有向集 S 上的一个**交换群系**，如果其中 G_a 都是交换群；对 $a, b \in S$，而且 $b < a$，存在群同态 $\rho_{ab}: G_a \to G_b$，而且它们满足

$$\begin{cases} \rho_{aa} = \text{恒同映射} \\ \rho_{ac} = \rho_{bc} \circ \rho_{ab} \qquad \text{当 } c < b < a. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

现在在有向集 S 上的交换群系内可引进一个等价关系；如 $x_a \in G_a, x_b \in G_b, x_a \sim x_b \Longleftrightarrow$ 存在 $c \in S$ 且 $c < b, c < a$，使得 $\rho_{bc}(x_b) = \rho_{ac}(x_a)$。现在来说明这样引进的确实是一个等价关系，首先对 $\forall\, x_a \in G_a \quad x_a \sim x_a$ 是显然的，其次如果 $x_a \in G_a, x_b \in G_b \quad x_a \sim x_b$，则显然有 $x_b \sim x_a$，因此只要说明当 $x_a \in G_a, x_b \in G_b$ 与 $x_c \in G_c$，而且 $x_a \sim x_b$ 与 $x_b \sim x_c$ 时，$x_a \sim x_c$ 亦成立，由 $x_a \sim x_b$，则存在 $d \in S$，$d < a, d < b$，使得 $\rho_{ad}(x_a) = \rho_{bd}(x_b)$，同样由 $x_b \sim x_c$，而存在 $e \in S$，$e < b, e < c$，使得 $\rho_{be}(x_b) = \rho_{ce}(x_c)$，现在对 $d, e \in S$，则由 S 是有向集的定义，存在有 $k \in S$，使得 $k < d$ 与 $k < e$，则有

$$\begin{aligned} \rho_{ak}(x_a) &= \rho_{dk} \circ \rho_{(x_a)} = \rho_{dk} \circ \rho_b(x_b) = \rho_{bk}(x_b) \\ &= \rho_{ek} \circ \rho_{be}(x_b) = \rho_{ek} \circ \rho_{ce}(x_c) = \rho_{ck}(x_c), \end{aligned}$$

因此 $x_a \sim x_c$.

引理 1.1.1 上面引进的“~”确是一个等价关系，而且等价类的集合中有一个自然的交换群结构。

证明 关于“~”确是一个等价关系，上面已加以说明现在来说明由“~”关系决定的有向集 S 上的交换群系 $\{(G_a)_{a\in S},<,\rho_{ab}\}$ 的等价类的集合上有一个自然的交换群结构。

现在用 $[x_a]$ 表示 $x_a\in G_a$ 的等价类，今对 $\forall x_a\in G_a$ 与 $x_b\in G_b$，由 S 是有向集故存在 $c\in S$，使得 $c<b$ 与 $c<a$，今定义

$$[x_a]+[x_b]:=[\rho_{ac}(x_a)+\rho_{bc}(x_b)], \qquad (1.1.3)$$

现在来证明(式 1.1.3)定义的运算的一意性，此即要证明，如果 $d<a$ 与 $d<b$，则 $[\rho_{ad}(x_a)+\rho_{bd}(x_b)]=[\rho_{ac}(x_a)+\rho_{bc}(x_b)]$，此即要证明，$\rho_{ad}(x_a)+\rho_{bd}(x_b)\sim\rho_{ac}(x_a)+\rho_{bc}(x_b)$。由 S 是有向集，则存在 $k\in s$，使得 $k<d$ 与 $k<c$，则有

$$\begin{aligned}\rho_{dk}(\rho_{ad}(x_a)+\rho_{bd}(x_b)) &= \rho_{dk}\circ\rho_{ad}(x_a)+\rho_{dk}\circ\rho_{bd}(x_b)\\ &= \rho_{ak}(x_a)+\rho_{bk}(x_b),\end{aligned}$$

同理可证明 $\rho_{ck}(\rho_{ac}(x_a)+\rho_{bc}(x_b))=\rho_{ak}(x_a)+\rho_{bk}(x_b)$，因此 $[\rho_{ac}(x_a)+\rho_{(bc)}(x_b)]=[\rho_{ad}(x_a)+\rho_{bd}(x_b)]$，因此式(1.1.3)与 $c\in S$ 的选取无关。另外还要证明与 $x_a(x_b)$ 的选取无关，因为如果 $x_a'\in G_{a'}$，$x_{a'}\in[x_a]$，则存在 $c\in S$，使得 $c<a$ 与 $c<a'$，而且 $\rho_{ac}(x_a)=\rho_{a'c}(x_{a'})$，显然对 $\forall c'<c$，总有 $\rho_{ac'}(x_a)=\rho_{a'c'}(x_{a'})$，而已证明定义(1.1.3)中 c 的选取无关，因此现在可以选取 $k'\in S$，使得 $k'<c'$ 与 $k'<b$，则有

$$\rho_{ak'}(x_a)+\rho_{bk'}(x_b)=\rho_{a'k'}(x_{a'})+\rho_{bk'}(x_b),$$

此即表示定义式(1.1.3)与 $x_a(x_b)$ 的选取无关，因此式(1.1.3)式中 $[x_a]+[x_b]$ 的定义是一意的。$[x_a]+[x_b]=[x_b]+[x_a]$ 是显然的。

由于交换群之间的群的同态，零元素的同态像必是零元素，因此对 $\forall a\in S$，G_a 的零元素 o_a 都是相互等价的，因此 $[o_a]$ 与 $\forall[x_b]$，$x_b\in G_b$，均有

$$[o_a]+[x_b]=[x_b],$$

对于$\forall [x_a], x_a \in G_a$,则有

$$[x_a]+[-x_a]=[o_a],$$

因此式(1.1.3)定义的加法确实在 S 的交换群系的等价类上定义了一个自然的交换群结构。

记号 今用 G 记这个等价类集的交换群,用

$$G=\varinjlim_{a\in S} G_a \tag{1.1.4}$$

表示之,并称 G 为$\{G_a\}_{a\in S}$的直接极限。

系 对$\forall a\in S$,映射

$$\begin{aligned}\rho_a: G_a &\to G\\ x_a &\mapsto [x_a]\end{aligned}$$

是一个交换群之间的同态。

证明 对$\forall x_a, y_a \in G_a$,则由 ρ_a 的定义与式(1.1.3),

$$\begin{aligned}\rho_a(x_a)+\rho_a(y_a)&=[x_a]+[y_a]=[\rho_{aa}(x_a)+\rho_{aa}(y_a)]\\ &=[x_a+y_a]=\rho_a(x_a+y_a),\end{aligned}$$

现设$(\mathscr{F}(U), \rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$是拓扑空间$X$上的一个预层,对于$\forall x\in X$,$\mathscr{U}_x$ 表示 x 的开邻域的全体。$\mathscr{U}_x$ 中的元素(即 x 的开邻域)对于包含关系来讲成为一个有向集,即如果$U, V\in\mathscr{U}_x$,且$V\subset U$,即认为$V<U$,则对$\forall U, V\in\mathscr{U}_x$,自然有$U\cap V\in\mathscr{U}_x$,与$U\cap V<U$,与$U\cap V<V$,因为$\rho_{UV}$满足式(1.1.1)的($s_1$),所以$\{(\mathscr{F}(U))_{U\in\mathscr{U}_x}, <, \rho_{UV}\}$是有向集 $\mathscr{U}_x$ 上的一个交换群系,因此可按上面讲的方法在$\bigcup_{U\in\mathscr{U}_x}\mathscr{F}(U)$(或$(\mathscr{F}(U))_{U\in\mathscr{U}_x}$)上引进一个等价关系,即对$\forall f\in\mathscr{F}(U)$与 $g\in\mathscr{F}(V)$,如果$\exists W\subset U\cap V$;使得

$$\rho_{UW}(f)=\rho_{VW}(g),$$

则$f\sim g$,$\bigcup_{U\in\mathscr{U}_x}\mathscr{F}(U)$按这个等价关系所得的等价类集合用 $\mathscr{F}_x$ 记之,且它具有一个自然的交换群结构:

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{U \in \mathscr{U}_x} \mathscr{F}(U) \tag{1.1.5}$$

在这里对 $\forall f \in \mathscr{F}(U), U \in \mathscr{U}_x$,用$[f]_x$ 表示f 在 $\mathscr{F}_x$ 中的等价类,则由上面引理的系知道对每个 $U \in \mathscr{U}_x$,有一个自然的群同态:

$$\rho_{U,x}: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$$
$$f \mapsto [f]_x = \rho_{U,x}(f).$$

根据等价类的定义,对于 $V \subset U, V, U \in \mathscr{U}_x$,自然有下面的等式:

$$\rho_{U,x} = \rho_{V,x} \circ \rho_{UV} \tag{1.1.6}$$

现在来考虑集合 $\bigcup_{x \in X} \mathscr{F}_x$,对应它赋以拓扑如下:对 X 的每个开集 U,对 $\forall y \in U$,则 $U \in \mathscr{U}_y$,故对每个 $f \in \mathscr{F}(U)$可对应于 $\bigcup_{x \in X} \mathscr{F}_x$ 中的一个子集$\{[f]_y \mid y \in U\}$;所有这样的集合(对 X 中所有的开集 U 与每个 $\mathscr{F}(U)$中的所有的元素对应的类似$\{[f]_y \mid y \in U\} \forall f \in \mathscr{F}(U), \forall U \in \mathscr{U}_X$ 的集合$\}$之并自然就等于 $\bigcup_{x \in X} \mathscr{F}_x$,其次设 $= \{[f]_y \mid y \in U\}, f \in \mathscr{F}(U)$与$\{[g]_y \mid y \in U\}, g \in \mathscr{F}(V)$是交为非空的两个这样的集,设$[h]_x \in \mathscr{F}_x$ 是属于它们的交,由定义 $h \in \mathscr{F}(W), W \in \mathscr{U}_x$,由$[h]_x$属于$\{[f]_y \mid y \in U\}$与$\{[g]_y \mid y \in V\}$元交,因此自然有 $U, V \in \mathscr{U}_x$,而且

$$[h]_x = [f]_x = [g]_x,$$

因而存在 $W_1, W_2 \in \mathscr{U}_x, W_1 \subset U \cap W, W_2 \subset V \cap W$,使得

$$\rho_{UW_1}(f) = \rho_{WW_1}(h),$$

与

$$\rho_{VW_2}(g) = \rho_{WW_2}(h),$$

分别对上面两式作用 $\rho_{W_1 W_1 \cap W_2}$与 $\rho_{W_2 W_1 \cap W_2}$之后就得到

$$\rho_{UW_1 \cap W_2}(f) = \rho_{WW_1 \cap W_2}(h) = \rho_{VW_1 \cap W_2}(g)$$

此即表示$\{[\rho_{WW_1 \cap W_2}(h)$确定$]_y \mid y \in W_1 \cap W_2\}$是包含于$\{[f]_y \mid y \in U\}$与$\{[g]_y \mid y \in V\}$,之交的,这就表明了所有形如$\{[f]_y \mid y \in U\} \forall U \in \mathscr{U}_X$ 与$\forall f \in \mathscr{F}(U)\}$确实满足拓扑空间开集基

的条件。可以用其作为开集基定义 $\bigcup_{x\in X}\mathscr{F}_x$ 上的拓扑，使 $\bigcup_{x\in X}\mathscr{F}_x$ 成为一个拓扑空间，记之为 $\mathscr{F}=\bigcup_{x\in X}\mathscr{F}_x$.

另外从拓扑空间 $\mathscr{F}$ 到拓扑空间 X 有一个自然的投影映射 $\pi:\mathscr{F}\to X;\pi(\mathscr{F}_x)=x$。这里对 $\forall x\in X,\pi^{-1}(x)=\mathscr{F}_x$ 是一个交换群，而且 π 是一个连续映射，因为对 $\forall U\in\mathscr{U}_X,\forall[f]_x\in\pi^{-1}(U)$，如果 $f\in\mathscr{F}(W)$，当然 $W\in\mathscr{U}_x$，则 $\{[\rho_{WW\cap U}(f)]_y\mid y\in U\cap W\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的开集，而且 $[f]_x$ 属于此开集，因此 π 是连续的。进一步对 $\mathscr{F}$ 的每个开集基的元素 $\{[g]_y\mid y\in V,g\in\mathscr{F}(V)\}$，它在 π 之下像正好就是 X 中的开集 V，因此 π 是一个开映射。

定义 1.1.2 上面所定义的 $(\mathscr{F},\pi,X)$ 称之为预层 $(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$ 所伴随的层，$\mathscr{F}_x=\pi^{-1}(x)$ 这个交换群称之为 x 点上的茎(stalk)。

定理 1.1.1 设 $(\mathscr{F},\pi,X)$ 是拓扑空间 X 上预层 $(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$ 的伴随层，则有

(1) $\pi:\mathscr{F}\to X$ 是一个局部同胚；

(2) 对 $\forall x\in X,\pi^{-1}(x)=\mathscr{F}_x$ 是一个交换群；

(3) 群运称对 $\mathscr{F}$ 的拓扑是连续的。

证明 (2)是显然的，故只要证明(1)与(3)。

证(1) 对 $\forall[f]_x\in\mathscr{F}_x\subset\mathscr{F}$，这里 $f\in\mathscr{F}(U),U\in\mathscr{U}_x$。则 $\mathscr{F}$ 的子集 $\{[f]_y\mid y\in U\}$ 是 $[f]_x$ 的开邻域，π 将它一一地映为 U，另一方面已知 $\pi:\mathscr{F}\to X$ 是开映射，因此 π 限制在 $\{[f]_y\mid y\in U\}$ 上依然是一个开映射，因此 π 将 $\{[f]_y\mid y\in U\}$ 拓扑地映为 U，这就证明了 π 是局部同胚。

证(3) 在证(3)之前先用数学语言精确地描述一下“群运算对 $\mathscr{F}$ 的拓扑是连续”的意义。$\mathscr{F}\times\mathscr{F}$ 表示 $\mathscr{F}$ 与其自身拓扑积所成的拓扑空间，今简单的以 (a,b) 表示 $\mathscr{F}\times\mathscr{F}$ 的元素，亦即 $a,b\in\mathscr{F}$，则

$$\mathscr{F}\times_\pi\mathscr{F}=\{(a,b)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}\mid\pi(a)=\pi(b)\}$$

在$\mathscr{F}\times_\pi\mathscr{F}$这个$\mathscr{F}\times\mathscr{F}$的子集上赋于诱导拓扑,使其成为$\mathscr{F}\times\mathscr{F}$的拓扑子空间,现有映射

$$m:\mathscr{F}\times_\pi\mathscr{F}\to\mathscr{F}$$

$$(a,b)\mapsto a-b,$$

是有意义的,因为实际$(a,b)\in\mathscr{F}\times_\pi\mathscr{F}$即表明 a 与 b 都在同一根茎上,亦即令属于某一交换群。(3)即是指这个映射 m 是连续的。

因为连续是一个局部概念,用此只要局部证明就可以了,现在设$\forall(a,b)\in\mathscr{F}\times_\pi\mathscr{F}$,由定义$\pi(a)=\pi(b)=x$,今$a=[f]_x$ $f\in\mathscr{F}(U)$与 $b=[g]_x$,$g\in\mathscr{F}(V)$,且 $U,V\in\mathscr{U}_x$。自然 $a-b=[f]_x-[g]_x\in\mathscr{F}_x$,今对 $a-b=[f]_x-[g]_x$ 的任一开邻域A,不失一般性可取 $A=\{[h]_y\mid y\in W, W\in\mathscr{U}_x, h\in\mathscr{F}(W)\}$,则自然有

$$[f]_x-[g]_x=[h]_x,$$

现$[f]_x-[g]_x=[\rho_{UU\cap V}(f)-\rho_{VU\cap V}(g)]_x=[h]_x$,因此存在 $W_1\in\mathscr{U}_x$ $W_1\in U\cap V\cap W$,使得

$$\rho_{UW_1}(f)-\rho_{VW_1}(g)=\rho_{WW_1}(h),$$

现在取$[f]_x$ 的开邻域 $B_1:=\{[\rho_{UW_1}(f)]_y\mid y\in W_1\}=\{[f]_y\mid y\in W_1\}$与 $B_2:=\{[\rho_{VW_1}(g)]_y\mid y\in W_1\}=\{[g]_y\mid y\in W_1\}$,这里后面两个等式成立是由式(1.1.6)。现在 $B_1\times_\pi B_2=(B_1\times B_2)\cap\mathscr{F}\times_\pi\mathscr{F}$ 故它是$([f]_x,[g]_x)$的开邻域,而 $m(B_1\times_\pi B_2)=\{[\rho_{UW_1}(f)-\rho_{VW_1}(g)]_y\mid y\in W_1\}=\{[\rho_{WW_1}(h)]_y\mid y\in W_1\}=\{[h]_y\mid y\in W_1\}\subset A$,因此 m 是连续的。

现在叙述层或交换群层的一般定义

定义1.1.3 设 X,$\mathscr{F}$都是拓扑空间,和 $\pi:\mathscr{F}\to X$ 是一个连续的满映射,如果它满足

(1)对$\forall x\in X$,$\mathscr{F}_x:=\pi^{-1}(x)$是一个交换群;

(2)π 是从$\mathscr{F}$到 X 的一个局部同胚;

(3)群的运算对$\mathscr{F}$的拓扑是连续的。

则称$(\mathscr{F},\pi,X)$是一个层,或详言之是拓扑空间 X 上的一个交换群层。

现在设 $f\in\mathscr{F}_x$ 是$\mathscr{F}$的一个任给的点,则按定义 1.1.3 的(2),有一个 f 的开邻域A,$\pi|A:A\to\pi(A)$是同胚,现在考虑

$$\begin{aligned} m:A\times_{\pi}A&\to\mathscr{F}\\ (g,g)&\mapsto g-g \end{aligned}$$

这里 g 是A的一个点,为方便起见,将 A 中在π之下的像是$y\in\pi(A)$的点就记之为$A(y)$,则$A(x)=f$,自然有$m(A(y),A(y))=A(y)-A(y)=o_y\in\mathscr{F}_y$,这里 o_y 就是 $\mathscr{F}_y$ 群的零元素,由于 $o_x\in\mathscr{F}_x\subset\mathscr{F}$,因而存在 o_x 的一个开邻域B,π在 B 上是同胚,由 m 的连续性,因此存在 $f\in\mathscr{F}_x$ 的一个开邻域A_1,无妨取 A_1 充分小,使得 $A_1\subset A$,使得 $m(A_1\times_{\pi}A_1)\subset B$,因为对于$\forall y\in A$ $m(A(y),A(y))=A(y)-A(y)=o_y\in\mathscr{F}_y$,因此集合$\{o_y|y\in\pi(A_1)\}\subset B$,由$\pi$在 B 上是同胚,因此$\{o_y|y\in\pi(A_1)\}$在π之下亦同胚于$\pi(A_1)$。这就表示对$\forall x\in X$ 均存在一个邻域$U_x\in\mathscr{U}_x$,使得集合$\{o_y|y\in U_x\}$是$\mathscr{F}$中的开集,而且 $\pi:\{o_y|y\in U_x\}\to U_x$ 是同胚,因此 $O_X:=\{o_x|x\in X\}$是$\mathscr{F}$中的开集,而且 $\pi:O_X\to X$ 是一个同胚。

定义 1.1.4 设$(\mathscr{F},\pi,X)$是一个层,$U\in\mathscr{U}_X$ 是拓扑空间X的一个开集,$\tilde{f}:U\to\mathscr{F}$是一个连续映射,如果其适合 $\pi\circ\tilde{f}=\mathrm{id}_U$,则称$\tilde{f}$是$U$上的一个截影。

所有 U 上的截影构成的集合用$\Gamma(U,\mathscr{F})$记之,对于$\forall\tilde{f},\tilde{g}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$,今可定义

$$\begin{aligned} \tilde{f}+\tilde{g}:U&\to\mathscr{F}\\ x&\mapsto\tilde{f}(x)+\tilde{g}(x)\quad\forall x\in U, \end{aligned}$$

由定义 1.1.3 之(3),群运算对$\mathscr{F}$的拓扑连续,因此$\tilde{f}+\tilde{g}:U\to\mathscr{F}$,是连续的,同时又有 $\pi\circ(\tilde{f}+\tilde{g})=id_U$,因而$\tilde{f}+\tilde{g}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$,另外$\tilde{O}_U:U\to\mathscr{F}$为零截影,即 $\tilde{O}_U(x)=o_x\quad\forall x\in U$,而且对于$\forall\tilde{f}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$,$(-\tilde{f})(x)=-\tilde{f}(x)\quad\forall x\in U$,则$-\tilde{f}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$,且有$\tilde{f}+(-\tilde{f})=\tilde{f}-\tilde{f}=\tilde{O}_U$,因此 $\Gamma(U,\mathscr{F})$就是一个交换群,对 $U,V\in$

$\mathscr{U}_X$,且 $U\supset V$,今定义群同态

$$r_{UV}:\Gamma(U,\mathscr{F})\to\Gamma(V,\mathscr{F}),\qquad(1.1.7)$$

$$\tilde{f}\mapsto\tilde{f}|V,$$

$\tilde{f}|V$ 即 $\tilde{f}$ 在 V 上的限制,易于验证 r_{UV} 确是一个交换群同态,而且易于验证

$$\begin{cases}r_{UW}=r_{VW}\circ r_{UV} & \text{当 } U\supset V\supset W,\\ r_{UU}=id_{\Gamma(U,\mathscr{F})} & \forall\, U\in\mathscr{U}_X,\end{cases}\qquad(1.1.8)$$

现在来验证 $(\Gamma(U,\mathscr{F}),r_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$ 是满足定义 1.1.1 的交换群预层,式(1.1.8)已说明条件(s_1)满足,现在来证明条件(s_2)与(s_3)亦成立。

验证(s_2),设 $U,\{U_i\}_{i\in I}$ 都 X 的开集,且 $U=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$,若 $\tilde{f},\tilde{g}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$,而且 $r_{UU_i}(\tilde{f})=r_{UU_i}(\tilde{g})$ 对 $\forall\, i\in I$ 成立。对 $\forall\,\gamma\in U$,而存在 $i\in I$,使得 $\gamma\in U_i$,由 $r_{UU_i}(\tilde{f}=r_{UU_i}(\tilde{g})$,故而 $\tilde{f}|U_i=\tilde{g}|U_i$,因而 $\tilde{g}(\gamma)=\tilde{f}(\gamma)$,因此是对 $\forall\,\gamma\in U$ 证明,因此 $\tilde{f}=\tilde{g}$

验证(s_3),现在 $U,\{U_i\}_{i\in I}$ 同前面之假设,今有 $\tilde{f}_i\in\Gamma(U_i,\mathscr{F})$ 对每个 $i\in I$,且

$$r_{U_iU_i\cap U_j}(\tilde{f}_i)=r_{U_jU_i\cap U_j}(\tilde{f}_j);\quad\forall\, i,j\in I\qquad(1.1.9)$$

此所表示 $\tilde{f}_i|U_i\cap U_j=\tilde{f}_j|U_i\cap U_j$,因而定义 $\tilde{f}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$ 如下:

$$\tilde{f}(x):=\tilde{f}_i(x),\text{当 } x\in U_i,$$

则式(1.1.9)就保证了 $\tilde{f}$ 定义的一意性,由于 $\tilde{f}_i$ 是连续的,而连续是一个局部概念,因而 $\tilde{f}$ 亦是连续的,而 $\pi\circ\tilde{f}=id_U$ 与 $r_{UU_i}(\tilde{f})=\tilde{f}_i$ 则是显然的,因而(s_3)成立。

定理 1.1.2 设$(\mathscr{F},\pi,X)$拓扑空间 X 上的层,则有

(1)映射 $\tilde{O}_X:X\to\mathscr{F}$

$$x\to O_x\in\mathscr{F}_x$$

是 X 上的一个截影,即 $\tilde{O}_X\in\Gamma(X,\mathscr{F})$;

(2)设 U 是 X 有任一开集，$\forall \tilde{f}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$之像集 $\mathrm{Im}(\tilde{f})=\{\tilde{f}(x)\mid x\in U\}$是 $\mathscr{F}$中之开集；

(3)设 U 为 X 中任一开集，对$\forall\tilde{f},\tilde{g}\in\Gamma(U,F)$，点集 $E:=\{x\in U\mid \tilde{f}(x)=\tilde{g}(x)\}$是 X 的开集。

证明 (1)在前面已有证明。

(2)设$\tilde{f}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$，对$\forall\tilde{f}(x)\in\mathrm{Im}(\tilde{f})$，则存在一个$\tilde{f}(x)$的开邻域 A，$\pi|A$ 是从 A 到 $\pi(A)$的同胚，由 $\tilde{f}$ 的连续性，故存在一个开集 $V\in\mathscr{U}_x$ 且 $V\subset U$ 使得$\tilde{f}(V)\subset A$，因为 $\pi|A$ 上是同胚，故 $\pi(\tilde{f}(V))=V$，因而$\pi|\tilde{f}(V)$上亦是同胚，因而$\tilde{f}(V)$是开集，因此 $\mathrm{Im}(\tilde{f})$是 $\mathscr{F}$中之开集。

(3)对$\forall\tilde{f},\tilde{g}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$，$\tilde{f}-\tilde{g}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$，由(2)$\mathrm{Im}(\tilde{f}-\tilde{g})$是$\mathscr{F}$中之开集，同样 $\mathrm{Im}(\tilde{O}_X)$亦是$\mathscr{F}$中之开集，由 π 是从$\mathscr{F}$到 X 的局部同胚，因此 π 是开映射，$E=\pi(\mathrm{Im}(\tilde{f}-\tilde{g})\cap\mathrm{Im}(\tilde{O}_X))$是 X 中的开集。

系 $\forall\tilde{f},\tilde{g}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$，如对对某个 $x\in U$，$\tilde{f}(x)=\tilde{g}(x)$，则$\tilde{f}$与$\tilde{g}$ 必在 x 的某个开邻域上相等。

证明 上面定义的(3)已证明 $\tilde{f},\tilde{g}$ 等值的点 E 是一个开集，今 $x\in E$，故 E 是非空开集，因此 E 必包含有 x 点的一个开邻域。

从前面的讨论中，已经显露出预层与层之间有十分密切的联系，下面我们来更精确的陈述这种联系。

定义 1.1.5 设 X 是一个拓扑空间，$\mathscr{U}_X$ 表示 X 之开集全体所成之族，设$(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$和$(\mathscr{G}(U),\rho'_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$是 X 上的两个预层，今对每个 $U\in\mathscr{U}_X$，有一个群同态 $\varphi_U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U)$，而且群同态族$\{\varphi(U)\}_{U\in\mathscr{U}_X}$对$\forall U,V\in\mathscr{U}_x$ 且 $V\subset U$ 有下面的交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathscr{F}(V)\\ {\scriptstyle\varphi_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_V}\\ \mathscr{G}(U) & \xrightarrow{\rho'_{UV}} & \mathscr{G}(V)\end{array};\quad \rho'_{UV}\circ\varphi_U=\varphi_V\circ\rho_{UV},\tag{1.1.10}$$

这样的$\{\varphi_U\}_{U\in\mathscr{U}_X}$就称之为预层$(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$到层$(\mathscr{G}(U),\rho'_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$之间的**预层同态**。

我们一般用$\{\varphi_U\}:(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})\to(\mathscr{G}(U),\rho'_{UV})$表示之。

定义 1.1.6 设$(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$与$(\mathscr{G}(U),\rho'_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$是拓扑空间$X$上的两个预层,今有预层同态

$$\{\varphi_U\}:(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})\to(\mathscr{G}(U),\rho'_{UV})$$

和预层同态

$$\{\psi_U\}:(\mathscr{G}(U),\rho'_{UV})\to(\mathscr{F}(U),\rho_{UV}),$$

而且有$\varphi_U\circ\psi_U=id$与$\psi_U\circ\varphi_U=id$,则称$\{\varphi_U\}_{U\in\mathscr{U}_X}(\{\psi_U\}_{U\in\mathscr{U}_X})$是预层$(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in U_X}$到预层$(\mathscr{G}(U),\rho'_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$(预层$(\mathscr{G}(U),\rho'_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$到预层$(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$)上的预层同构。

定义 1.1.7 设$(\mathscr{F},\pi,X)$和$(\mathscr{G},\pi',X)$分别是拓扑空间X上的两个层,$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是一个速续映射,且适合

(1)φ是保茎的,即对$\forall f\in\pi^{-1}(x)=\mathscr{F}_x$,则$\varphi(f)\in\pi'^{-1}(x)=\mathscr{G}_x$,对所有$x\in X$成立;

(2)φ限制在每个茎上都是群同态,即$\varphi|\mathscr{F}_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x,\forall x|X$都是交换群同态。

这样的φ就称之为从$(\mathscr{F},\pi,X)$到$(\mathscr{G},\pi',X)$的层同态。

定义 1.1.8 如果$(\mathscr{F},\pi,X)$和$(\mathscr{G},\pi',X)$分别拓扑空间X上的两个层,$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$与$\psi:\mathscr{G}\to\mathscr{F}$是两个层同态,且有$\psi\circ\varphi=id$与$\varphi\circ\psi=id$,则称$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}(\psi:\mathscr{G}\to\mathscr{F})$是层同构,也就是说$(\mathscr{F},\pi,X)$与$(\mathscr{G},\pi',X)$两个层同构。

定理 1.1.3 设$(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$是一个拓扑空间$X$上的预层,$(\mathscr{F},\pi,X)$是其之伴随层,而$(\Gamma(U,\mathscr{F}),r_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$是$(\mathscr{F},\pi,X)$的截影预层,则$(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$与$(\Gamma(U,\mathscr{F}),r_{UU})_{U\in\mathscr{U}_X}$是预层同构。

证明 对 $\forall U\in\mathscr{U}_X$ 与 $\forall f\in\mathscr{F}(U)$，可以对应于一个 U 上的截影 $\tilde{f}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$，其中 $\tilde{f}(x)=[f]_x$ 对 $\forall x\in U$。今作群同态

$$\varphi_U:\mathscr{F}(U)\to\Gamma(U,\mathscr{F}),$$

$$f\mapsto\tilde{f},$$

易于验证 $\{\varphi_U\}_{U\in\mathscr{U}_X}$ 是 $(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$ 到 $(\Gamma(U,\mathscr{F}),r_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$ 的预层同态。

反之，设 $\forall\tilde{f}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$ 与 $\forall U\in\mathscr{U}_X$，由定理1.1.2之(2)，$\mathrm{Im}(\tilde{f})=\{\tilde{f}(x)\mid\forall x\in U\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个开集，对 $\forall y\in U$，取 $\tilde{f}(y)$ 在 $\mathscr{F}$ 的拓扑基中的一个开邻域 $\{[f^y]_z\mid z\in U_y\}$，这里 $U_y\in\mathscr{U}_y$，而且无妨假定 $U_y\subset U$ 而 $f^y\in\mathscr{F}(U_y)$，开集 $\mathrm{Im}(\tilde{f})$ 与 $\{[f^y]_z\mid z\in U_y\}$ 之交还是一个非空开集，因为它至少包含 $\tilde{f}(y)$，这个开集正好是 $\{[f^y]_z=\tilde{f}(z)\mid z\in U_y\}$，它在 π 之下的像仍是 y 的一个开邻域，今无妨仍记之为 U_y，故现在对 $\forall y\in U$，均存在一个开邻域 $U_y\subset U$ 与一个 $f_y\in\mathscr{F}(U_y)$，使得 $[f^y]_z=\tilde{f}(z)$，$\forall z\in U_y$。

今对 $\forall x,y\in U$，而且 $U_x\cap U_y\neq\phi$，则对 $\forall z\in U_x\cap U_y$，$[f^y]_z=\tilde{f}(z)=[f^x]_z$，此即表示 $\rho_{U_xU_x\cap U_y}(f^x)$ 与 $\rho_{U_yU_x\cap Y_y}(f_y)$ 在 $\forall z\in U_x\cap U_y$ 都是等价的，则由定义 1.1.1 的 (s_2)，$\rho_{U_xU_x\cap U_y}(f^x)=\rho_{U_yU_x\cap U_y}(f^y)$，再由定义(1.1.1)之 (s_3)，故存在 $f\in\mathscr{F}(U)$，使 $\rho_{UU_y}(f)=f^y$ 对 $\forall y\in U$ 成立。且 $[f]_y=[\rho_{UU_y}(f^y)]_y=\tilde{f}(y)$，$\forall y\in U$。现在按这个方法对 $\forall\tilde{f}\in\Gamma(U,\mathscr{F})$，找到 $f\in\mathscr{F}(U)$，记这个对应为 $\psi_U:\Gamma(U,\mathscr{F})\to\mathscr{F}(U)$，同样易于验证这个 ψ_U 是 $\Gamma(U,\mathscr{F})$ 到 $\mathscr{F}(U)$ 的群同态。对前面所定义 φ_U，自然有等式 $\varphi_U\circ\psi_U=id$ 与 $\psi_U\circ\varphi_U=id$，因此定理得证。

定理 1.1.4 设 $(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$ 与 $(\mathscr{G}(U),\rho'_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$ 是拓扑空间 X 上的两个预层，$(\mathscr{F},\pi,X)$ 与 $(\mathscr{G},\pi',X)$ 分别是它们的伴随群层。如果 $(\mathscr{F}(U),\rho_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$ 与 $(\mathscr{G}(U),\rho'_{UV})_{U\in\mathscr{U}_X}$ 是预层同构的，则 $(\mathscr{F},\pi,X)$ 与 $(\mathscr{G},\pi',X)$ 是层同构的。