

高等学校教材

数学物理方法

Methods of Mathematical Physics (第二版)

刘连寿 王正清 编著



高等教育出版社

高等学校教材

数学物理方法

刘连寿 王正清 编著

第二版

高等教育出版社

内 容 提 要

本书第一版出版已经有 10 多年,在 10 多年的教学实践中,本书的材料选取、内容安排和文字叙述得到了充分的检验,广受欢迎。第二版是在吸取最新的教学经验并结合新时期教学要求的基础上对第一版进行修订的结果。在改正第一版中存在的一些错误的同时,该书保留了原书的一些特点:着重通过和实变量函数性质的对比讲述复变解析函数的性质,按解方程的方法系统讲述数学物理方程。同时,第二版加强了关于鞍点和特殊函数的渐近表达式以及一些特殊函数性质的讨论,补充了双曲贝塞尔函数、爱里方程、复平面上的拉普拉斯变换等在物理上有重要应用的内容。

本书可作为高等院校物理类专业数学物理方法课程教材,也可供其它专业参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/刘连寿,王正清编著.—2 版.—北京:高等教育出版社,2004.7

ISBN 7-04-013984-7

I.数... II.①刘...②王... III.数学物理方法—高等学校—教材 IV.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 001632 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所	版 次	1990 年 9 月第 1 版
印 刷	北京星月印刷厂		2004 年 7 月第 2 版
开 本	787×960 1/16	印 次	2004 年 7 月第 1 次印刷
印 张	21.5	定 价	24.80 元
字 数	400 000		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第一版前言

数学物理方法是应用数学基础知识解决实际问题的方法.它所研究的内容除了与电动力学、量子力学等物理理论有紧密联系之外,还与弹性力学、流体力学、电气工程等问题有关。它是高等学校物理、力学、无线电、天文、气象等系及工程技术等专业学生的必修课程。它既讲数学基础,又讲物理方法,内容十分丰富。为了便于学习,本书在讲授复变函数论的基础上,着重讲授各种求解数学物理方程的方法。复变函数部分以解析函数的性质和留数定理的应用为重点;数理方程部分以分离变量法、积分变换法和格林函数法为重点。由于不同层次的学校要求不同,或受学时的限制,在使用本书时,可删去第十二章和第十三章,即使在前面各章节中,有些定理的证明及某些扩充性的知识,如模数原理、 δ 函数的某些性质等内容,也可酌情删减。这样处理不会影响本课程的教学。

本书在正式出版前曾于1982年由华中师大教材科铅印,有不少师范院校及专科学校多次使用,后又重印两次。在此期间不少教师和同学给本书提过宝贵意见,对于这次出版很有帮助。出版前经南开大学潘忠诚教授审阅并提出宝贵意见。谨在此致谢。

由于作者水平有限,错误和不妥之处在所难免,恳切希望读者批评指正。

编者

1989年9月

第二版前言

本书第一版问世十多年以来,得到许多老师和同学的支持与帮助。他们的教学经验表明,本书在材料的选取、内容的安排和叙述的生动性方面有其特色,适合于教学。由于第一版的印数不多,不易购到,以致有些学校采用内部胶印的方式提供教学使用。因而我们感到有修订再版的必要。

这次再版,除了订正一些印刷错误以外,没有作很大的改动。特别是,保留了原书的特点:着重通过和实变量函数性质的对比讲述复变解析函数的性质,按解方程的方法系统讲述数学物理方程。在内容上加强了关于鞍点和特殊函数的渐近表达式以及 Γ 函数的性质的讨论;补充了双曲贝塞尔函数、爱里方程、复平面上的拉普拉斯变换等在物理上有重要应用的内容。

20世纪数学物理发展迅速,形成了许多新的分支。但是,复变函数和数学物理方程仍然是数学物理的重要基础,是物理专业及其它有关专业本科大学生必须具备的知识。因此,我们基本上保持了本书作为“数学物理方法”基础课教材的特点。数学物理的新发展也许可以留到一些选修课中解决。例如,有些学校开设“现代数学物理方法”选修课,已经积累了很好的经验。

我们愿借此再版的机会,对高等教育出版社和给本书提过宝贵意见的教师和同学表示衷心的感谢。书中的不当之处,恳切期望读者给予批评指正。

编者
2003年6月

目 录

第一章 复变函数论基础	1
§ 1-1 复数	1
§ 1-2 复变函数	9
§ 1-3 复变函数的导数与解析性 保角映射	19
§ 1-4 复变函数的积分 柯西定理	29
§ 1-5 柯西公式	36
第二章 复变函数的级数	43
§ 2-1 级数的基本性质	43
§ 2-2 复变函数的泰勒展开 鞍点	50
§ 2-3 罗朗级数	55
第三章 解析延拓与孤立奇点	62
§ 3-1 单值函数的孤立奇点	62
§ 3-2 解析延拓	67
§ 3-3 Γ 函数	71
§ 3-4 多值函数	73
第四章 留数定理及其应用	86
§ 4-1 留数定理	86
§ 4-2 利用留数定理计算积分	92
第五章 数学物理方程的导出和定解问题	107
§ 5-1 波动问题	107
§ 5-2 热传导问题和扩散问题	112
§ 5-3 稳定场问题	117
§ 5-4 定解问题小结	119

第六章 分离变量法	122
§ 6-1 一维波动方程与分离变量法	122
§ 6-2 矩形域内二维热传导方程的分离变量	127
§ 6-3 圆域外二维拉普拉斯方程的分离变量	131
§ 6-4 非齐次方程与非齐次边界条件	135
§ 6-5 分离变量法小结	139
第七章 二阶线性常微分方程	141
§ 7-1 拉普拉斯方程在球坐标和柱坐标中的分离变量	141
§ 7-2 常微分方程的幂级数解法	145
§ 7-3 常微分方程的本征值问题	153
第八章 球函数	161
§ 8-1 勒让德多项式	161
§ 8-2 缔合勒让德函数	171
§ 8-3 球函数	174
第九章 柱函数	181
§ 9-1 贝塞尔方程的解	181
§ 9-2 含贝塞尔方程的本征值问题	186
§ 9-3 球贝塞尔函数	193
§ 9-4 双曲贝塞尔函数	197
第十章 积分变换法	199
§ 10-1 傅里叶积分变换	199
§ 10-2 拉普拉斯变换	209
第十一章 格林函数法	225
§ 11-1 δ 函数	225
§ 11-2 稳定场方程的格林函数	240
§ 11-3 热传导方程的格林函数	251
§ 11-4 波动方程的基本解 推迟势与超前势	257
§ 11-5 弦振动方程的格林函数 冲量法	262
第十二章 几种特殊方法	265
§ 12-1 行波法	265

§ 12-2 延拓法	274
§ 12-3 保角变换法	276
§ 12-4 非线性方程的单孤子解	283
第十三章 变分法	291
§ 13-1 泛函和泛函的极值	291
§ 13-2 变分法在本征值问题中的应用	296
附录 I 函数的渐近表示 最陡下降法	303
附录 II 二阶线性常微分方程的一般讨论	309
习题答案	318

第一章

复变函数论基础

§ 1-1 复数

复变函数就是自变量取复数值的函数. 在研究复变函数之前, 我们先在这一节里复习一下复数的定义和运算, 并讨论与复数的几何表示有关的一些问题.

(一) 复数的定义和运算

在实数范围内, 一些简单的代数方程也可能没有根. 例如方程

$$x^2 + 1 = 0$$

就没有实根, 因为任何实数的平方都不等于 -1 . 因此, 有必要将“数”的概念加以扩大. 引进虚数单位 i , 按定义

$$i^2 = -1. \quad (1-1-1)$$

用 x 和 y 表示两个任意的实数, 则具有形式

$$z = x + iy \quad (1-1-2)$$

的 z 称为复数.

在式(1-1-2)中, 实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部, 记为 $\operatorname{Re} z$ 和 $\operatorname{Im} z$.

实部为零的复数 $0 + iy = iy$ 称为纯虚数, 简称为虚数; 虚部为零的复数 $x + i0 = x$ 就是实数. 实部和虚部都为零的复数称为复数 0 : $0 + i0 = 0$.

两复数相等的充分必要条件是它们的实部和虚部分别相等. 就是说, 如果

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2,$$

则必须且只须

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

因此, 一个复数等式等效于两个实数等式.

复数的加减法和乘法是利用定义(1-1-1)按通常的代数运算法则进行运

算.除法 $(x_1 + iy_1)/(x_2 + iy_2)$ 是将分母“实数化”,其办法是分子分母同乘以 $(x_2 - iy_2)$,即

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (x_2^2 + y_2^2 \neq 0), \quad (1-1-3)$$

$(x_2 - iy_2)$ 是由 $(x_2 + iy_2)$ 改变虚部符号得来的.我们定义:将复数 $z = x + iy$ 的虚部改号所得到的复数 $x - iy$ 称为 z 的共轭复数,用符号 z^* 表示,即 $z^* = x - iy$.显然, z 也是 z^* 的共轭复数.因此也可以说 z 和 z^* 两复数相互共轭.

两个相互共轭的复数之积与和是实数,而两者之差是虚数:

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2, \quad (1-1-4)$$

$$z + z^* = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re} z, \quad (1-1-5)$$

$$z - z^* = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\operatorname{Im} z. \quad (1-1-6)$$

在(1-1-3)中计算两复数相除时,正是利用了性质(1-1-4),在分子分母中同乘以分母的共轭复数 z_2^* ,从而使分母实数化.

(二) 复平面

在平面上建立一个直角坐标系,将任意复数 z 的实部 $\operatorname{Re} z$ 标在它的横轴上,而将 z 的虚部 $\operatorname{Im} z$ 标在纵轴上,如图 1-1-1,就建立起了平面上全部点和全体复数之间的一一对应关系.这样的平面称为复平面,而上述直角坐标系的横轴和纵轴分别称为实轴和虚轴.平面上的点可以用从原点 O 引向这一点的矢量表示,所以复数 z 也可以用从原点出发终点在 z 的矢量来表示.用矢量表示一个复数 z 时,矢量的起点不一定在原点 O ,终点也不一定在 z 点,只要矢量在实轴和虚轴方向上的投影分别等于 z 的实部和虚部即可.如图 1-1-2 中的矢量 \overrightarrow{OA} 与 $\overrightarrow{O'A'}$ 都代表同一复数 z .

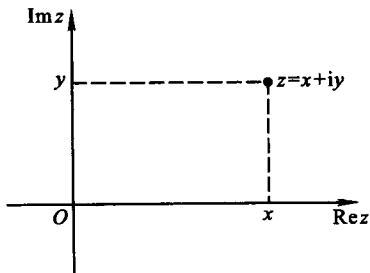


图 1-1-1

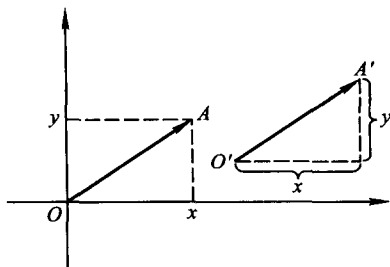


图 1-1-2

不难看出,复数的加法对应于复平面上矢量求和的平行四边形法则,如图 1-1-3 所示.

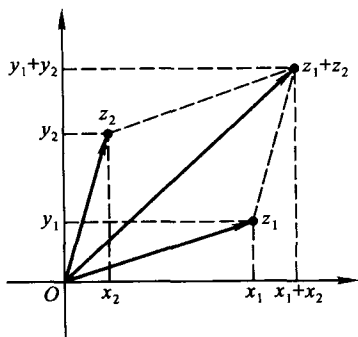


图 1-1-3

利用 $z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1)$, 只要按照平行四边形法则使矢量 z_2 与 $-z_1$ 相加, 就可以得到表示 $z_2 - z_1$ 的矢量, 如图 1-1-4 所示. 从图上还可看出, $z_2 - z_1$ 就是由 z_1 引向 z_2 的矢量.

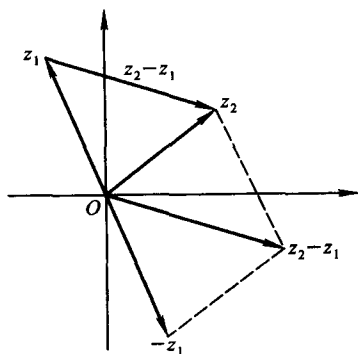


图 1-1-4

(三) 模与幅角

复平面上的点还可以用极坐标 (ρ, θ) 表示,如图 1-1-5. 因而复数 z 也可以用 (ρ, θ) 表示:

$$z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1-1-7)$$

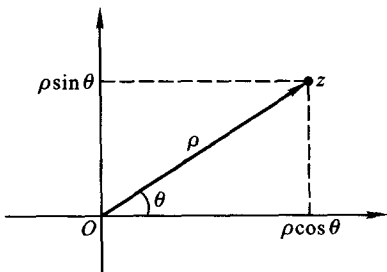


图 1-1-5

ρ 称为复数 z 的模,用符号 $|z|$ 表示; θ 称为 z 的幅角,用符号 $\text{Arg} z$ 表示,它们和 z 的实部 x 与虚部 y 之间有如下关系^①:

$$\rho \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1-1-8)$$

$$\theta \equiv \text{Arg} z = \text{Arctan} \frac{y}{x}. \quad (1-1-9)$$

注意,复数的模等于表示这一复数的矢量的长度,它永远取正值(或零):

$$\rho \equiv |z| \geq 0.$$

对于一个复数 z ,它的幅角 θ 可以取无穷多个值,彼此相差 2π 的整数倍.为了使幅角成为单值的,可以将它限制在宽为 2π 的区间内,例如要求它满足条件

$$0 < \arg z \leq 2\pi \quad \text{或} \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

这里我们用符号 $\arg z$ 表示具有单值性的幅角.这样一来,同一复数 z 的各幅角之间有下列关系:

$$\text{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-1-10)$$

注意,复数没有大小的概念.我们不能比较两个复数 z_1 和 z_2 的大小,而只能比较它们的模 $|z_1|$ 和 $|z_2|$ 的大小.如果 $|z_1| < |z_2|$,就表示 z_1 离原点 O 的距离比 z_2 离原点 O 的距离近,如图 1-1-6.

利用复数加减法的几何作图(图 1-1-3 和图 1-1-4),根据“三角形两边长之和不小于第三边”和“三角形两边长之差的绝对值不大于第三边”,容易得到下列重要不等式:

^① 符号 Arctan 表示反正切的一切可能值.

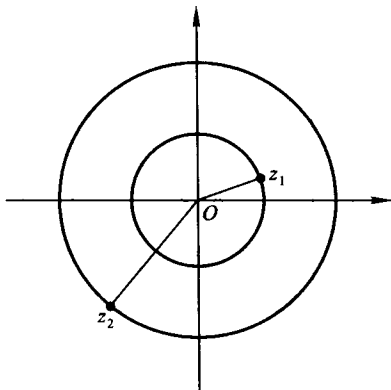


图 1-1-6

$$\left. \begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|, \\ |z_1 - z_2| &\geq ||z_1| - |z_2||. \end{aligned} \right\} \quad (1-1-11)$$

(四) 复数的指数表示式

复数 z 除了有代数式(1-1-2)和三角式(1-1-7)之外,还有另一种形式——指数形式.为了得到复数的指数形式,我们首先定义纯虚数的指数函数为

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (1-1-12)$$

这称为欧拉公式.利用它,可以将(1-1-7)改写为

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad (1-1-13)$$

称为复数的指数式.由欧拉公式容易证明,虚指数的指数函数和实指数的指数函数有相同的运算规则:

$$\left. \begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \\ \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} &= e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \frac{1}{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (1-1-14)$$

利用它们可以使复数的乘除法大为简化.此时

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (1-1-15)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad \rho_2 \neq 0. \quad (1-1-16)$$

特别是,当 $z_2 = e^{i\theta}$ 时,我们得到

$$z_1 e^{i\theta} = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta} = \rho_1 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta)}.$$

这表明,用 $e^{i\theta}$ 乘一个复数,不改变这一复数的模,只是将它转过 θ 角,如图

1-1-7. 因而 $e^{i\theta}$ 称为转 $\dot{\theta}$ 角因子.

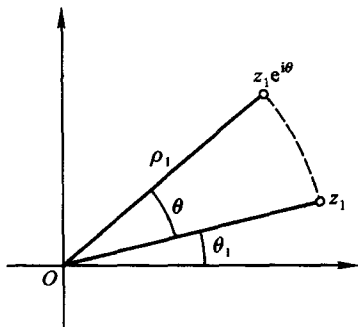


图 1-1-7

例 1 由复数 $z = \sqrt{3} - i$ 的代数式求它的三角式和指数式.

解 利用式(1-1-8)和(1-1-9)求它的模和辐角:

$$\rho = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\theta = \operatorname{Arctan} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

由此知 θ 在第IV或第II象限. 为了完全确定 θ , 根据 $\cos \theta > 0, \sin \theta < 0$ 判断 θ 在第IV象限, 故上式中的 n 只能取 $0, \pm 2, \pm 4, \dots$. 取 $n = 0$, 得到

$$z = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

(五) 复数的乘幂和开方

将(1-1-15)用到复数的自乘上, 可以得到

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (1-1-17)$$

令 $\rho = 1$ 得到棣摩弗公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (1-1-18)$$

将左边乘开, 分出实部和虚部, 可以得到 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 用 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 表示的公式.

现在来看复数的开方. 设 $z = \rho e^{i\theta}$, 我们要求 $\sqrt[n]{z}$. 令

$$\sqrt[n]{z} = w = r e^{i\varphi},$$

两边乘 n 次方, 则得

$$z = \rho e^{i\theta} = r^n e^{in\varphi}.$$

令模和辐角分别相等, 可以得到两个方程, 但必须注意辐角的多值性(1-1-10):

$$r^n = \rho, \quad r = \sqrt[n]{\rho}$$

$$n\varphi = \theta_0 + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (0 < \theta_0 \leq 2\pi).$$

值得注意的是,对于 $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, 所得到的 n 个 φ 值不等效, 因为它们之间并不是相差 2π 的整数倍. 只是在 $k=n, n+1, \dots$ 时才分别和 $k=0, 1, \dots$ 等效. 因此 $\sqrt[n]{z}$ 共有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\varphi} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (1-1-19)$$

这 n 个值均匀分布在半径为 $\sqrt[n]{\rho}$ 的圆上, 图 1-1-8 上举了一个 $n=5$ 的例子.

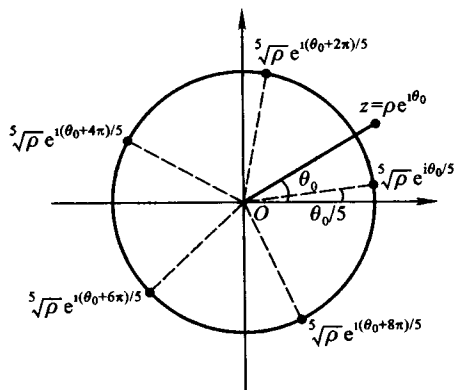


图 1-1-8

(六) 共轭复数

在本节的开始, 已经定义了共轭复数. 现在利用复数的几何表示进一步讨论一下共轭复数的一些性质.

按定义, 相互共轭的复数只是虚部相差符号. 因此, 在复平面上, 两个相互共轭的复数所对应的点, 对称地分布在实轴的上下两边, 如图 1-1-9.

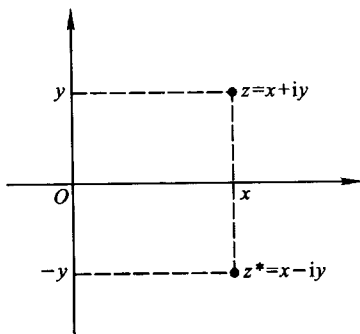


图 1-1-9

由此还可以看出,相互共轭的复数,模相等而辐角相差一符号:

$$\begin{aligned} z &= \rho e^{i\theta}, \\ z^* &= \rho e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (1-1-20)$$

在式(1-1-4)中已指出,相互共轭的复数的乘积为实数.这个实数就是它们的模的平方:

$$zz^* = |z|^2, \quad |z| = \sqrt{zz^*}. \quad (1-1-21)$$

(七) 复数球面 无限远点

复数不仅可以用平面上的点表示,而且也可以用球面上的点表示.如图 1-1-10,过复平面上的坐标原点 O 作一个球和复平面相切;过原点 O 作复平面的垂线 Oz 和上述球面交于 N ;过 N 点作射线,和球面交于 z' ,和复平面交于 z .这样就在球面上的点 z' 和复平面上的点 z 之间建立了一一对应的关系.这个球面称为复数球面.由图 1-1-10 可见,复平面上以原点为中心的圆 C ,在复数球面上对应于一个位于和 Oz 轴垂直的平面上的圆 C' (即一根“纬线”).复平面上圆 C 内部和外部分别对应于复数球面上圆 C' 的下方和上方.当圆 C 的半径 R 增大时,圆 C' 逐渐向上移.当 $R \rightarrow \infty$ 时,圆 C' 移到球顶,缩成一点 N .由此可见,复平面上的无限远处,对应于复数球面上的一点 N .正是在这个意义上,我们说复平面上无限远是一个“点”,称为无限远点.

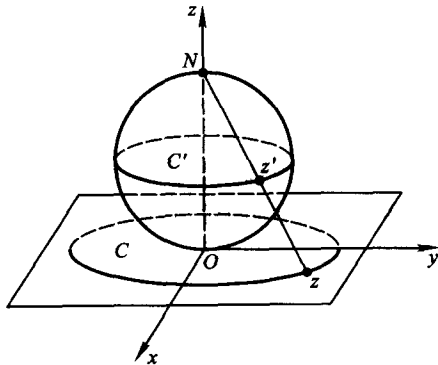


图 1-1-10

习 题

1. 写出下列复数的实部,虚部,模和辐角,并写出(1)~(5)的指数式和三角式:

- (1) $-1 - \sqrt{3}i$; (2) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$;
 (3) $2\left(\cos \frac{\pi}{3} - i\sin \frac{\pi}{3}\right)$; (4) -1 ;
 (5) $-i$; (6) $e^{iR\sin\theta}$ (R, θ 为实常数).

2. 计算下列复数:

- (1) $\frac{1+i}{1-i}$; (2) $(1+i)^3$;
 (3) \sqrt{i} ; (4) $\sqrt[4]{1+i}$;
 (5) $\sqrt{a+bi}$ (a, b 为实常数).

3. 证明下列关系式:

- (1) $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$;
 (2) $z_1 z_2^* + z_2 z_1^* = 2\operatorname{Re}(z_1 z_2^*) = 2\operatorname{Re}(z_2 z_1^*)$;
 (3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$;
 (4) $\operatorname{Re} z \leq |z|$.

4. 利用棣摩弗公式将 $\cos 4\theta$ 和 $\sin 4\theta$ 展开成 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 的多项式.

5. 求证:

$$\begin{aligned} & \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots + \cos n\varphi \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi - \sin \frac{\varphi}{2}}{2\sin \frac{\varphi}{2}}; \\ & \sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \cdots + \sin n\varphi \\ &= \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

6. 用欧拉公式证明(1-1-14).

§ 1-2 复变函数

(一) 复平面上的区域

如果复变数 z 在复平面上某个范围内取值时, 复变数 w 也随之取值, 则 w 称为 z 的复变函数, 记作

$$w = f(z), \quad (1-2-1)$$

这里 z 和 w 都取复数值:

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy \\ w &= u + iv \end{aligned} \right\} \quad (1-2-2)$$