MATHEMATICS ANALYSIS FOR ECONOMICS

南开大学公共数学系列教材

经济类数学分析

（下册）

编著　张效成　张阳　徐锬

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

南开大学公共数学系列教材

经济类数学分析

（下册）

编 著 张效成 张 阳 徐 铁

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是南开大学根据新世纪教学改革成果而编写的系列教材之一.全书分上、下两册,本书为下册.内容包括:空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分及级数.

与经济类传统的高等数学教材相比,本书加强了基础理论的阐述,大致相当于理科数学分析的深度.在内容上注重对学生抽象思维和逻辑上严谨论证的训练,同时也兼顾对学生数学运算能力以及运用能力的培养.

本书可作为对数学有较高要求的经济管理类专业本科生的教材,也可作为理科数学的参考教材.

图书在版编目(CIP)数据

经济类数学分析.下册/张效成,张阳,徐锬编著.
—天津:天津大学出版社,2006.1
ISBN 7-5618-2252-9

Ⅰ.经... Ⅱ.①张...②张...③徐... Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 001661 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
短信网址 发送“天大”至 916088
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 12.5
字　　数 274 千
版　　次 2006 年 1 月第 1 版
印　　次 2006 年 1 月第 1 次
印　　数 1-4 000
定　　价 18.00 元

前　言

多年来，高等数学一直是南开大学非数学类专业本科生必修的校级公共基础课.由于各个学科门类的情况差异较大，该课程又形成了包含多个层次、多个类别的体系结构.层次不同，类别不同，教学目标和教学要求有所不同，课程内容的深度与宽度也有所不同，自然所使用的教材也应有所不同.

教材建设是课程建设的一个重要方面，属于基础性建设.时代在前进，教材也应适时更新而不能一劳永逸.因此，教材建设是一项持续的不可能有“句号”的工作.20 世纪 80 年代以来，南开大学的老师们就陆续编写出版了面向物理类、经济管理类和人文类等多种高等数学教材.这些教材为当时的数学教学做出了重要贡献，也为公共数学教材建设奠定了基础，积累了经验.

21 世纪是一个崭新的世纪.随着新世纪的到来，人们似乎对数学也有了一个崭新的认识：数学不仅是工具，更是一种素养，一种能力，一种文化.已故数学大师陈省身先生在其晚年为将中国建设成为数学大国乃至最终成为数学强国而殚精竭虑.他尤其对大学生们寄予厚望.他不仅关心着数学专业的学生，也以他那博大胸怀关心着非数学专业的莘莘学子.2004 年他挥毫为天津市大学生数学竞赛题词，并与获奖学生合影留念.这也是老一辈数学家对我们的激励与鞭策.另一方面，近年来一大批与数学交叉的新兴学科如金融数学、生物数学等不断涌现.这也对我们的数学教育和数学教学提出了许多新要求.而作为课程基础建设的教材建设自当及时跟进.现在呈现在读者面前的便是新世纪南开大学公共数学系列教材之一——经济类数学分析(下册).

本书主要内容是空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分与级数.和以往的经济类高等数学教材相比，其突出特点是从理科数学分析的高度，对基本理论做了较为严谨的阐述，以期为学生打下比较坚实的数学理论基础，正因为此，本书被赋予了《经济类数学分析》的名称.

我们之所以要加大经济类本科生基础数学的深度主要是基于以下的考虑.众所周知，在经济学中引入数学方法已有 200 多年的历史.经济学各个学科领域的发展历史一次又一次地证明，数学方法是经济学中最重要的方法之一，是经济学理论取得突破性发展的重要工具.

例如对经济学影响最大的瓦尔拉斯(L. Warlas，1834—1910)的一般均衡理论，从数学角度看始终缺乏坚实的基础.这个问题经过数学家和经济学家们 80 年的努力才得以解决.其中包括大数学家诺伊曼(J. von Neumann，1903—1957)在 20 世纪 30 年代的研究(他提出了著名的经济增长模型)，列昂惕夫(W. Leontiev，1906—1999)的研究(他因其投入产出分析获 1973 年诺贝尔经济学奖)，还包括萨缪尔森(P. Samuelson，1915—)

和希克斯(J. R. Hicks, 1904—1989)的研究(他们分获 1970 年和 1972 年诺贝尔经济学奖). 而最终在 1954 年给出一般经济均衡存在性严格证明的是阿罗(K. J. Arrow, 1921—)和德布鲁(G. Debreu, 1921—). 他们两人也因此先后获 1972 年和 1983 年诺贝尔经济学奖. 阿罗和德布鲁都以学习数学开始他们的学术生涯. 阿罗获有数学的学士和硕士学位, 德布鲁则是由法国布尔巴基学派培养出来的数学家.

再来看现代金融理论的发展过程. 第二次世界大战以前, 金融学是经济学的一个分支. 金融学研究的方法是以定性思维推理和语言描述为主. 20 世纪 50 年代初马柯维茨(H. M. Markowitz, 1927—)最先把数理工具引入金融研究, 提出了投资组合理论, 因此被看作是现代金融学理论——分析金融学的发端. 后人把马柯维茨的工作和 20 世纪 70 年代布莱克(F. Black, 1938—1995)和舒尔斯(M. S. Scholes, 1941—)提出的期权定价公式称为"华尔街的两次数学革命". 他们也都以其具有划时代意义的工作而获得诺贝尔经济学奖.

此外, 一个非常明显的事实是, 诺贝尔经济学奖得主大多都具有良好的数理基础, 有的原本就是杰出的数学家.

毋庸多叙, 仅仅以上这些事实就告诉我们, 对于经济类专业的本科生来说, 良好的数学基础及其修养是多么的重要. 正是基于这样一种认识, 我们修订了经济类专业公共数学课程的教学大纲, 并编写了这本教材. 而且, 为了保证学生得到一定的训练, 每周除 4 课时讲授外, 还分小班开设了习题课.

本书也可作为管理类专业本科生教材, 还可作为相关教师的参考书.

本书的编写得到了南开大学"新世纪教学改革"项目"公共数学课程建设改革与实践"的资助, 得到了南开大学教务处、南开大学经济学院和南开大学数学学院的大力支持和帮助. 在教材编写、录入和试用过程中, 南开大学数学学院薛锋老师周密细致的组织协调工作为我们提供了有力的保障. 韩志欣和单国根等同学牺牲了假期录入书稿. 对来自方方面面的关心、支持和帮助, 我们在这里一并表示衷心感谢.

由于我们的水平有限, 缺点和不足在所难免, 诚望读者批评指正.

编者

2005 年 10 月于南开园

目　录

第 7 章　空间解析几何与向量代数

本章将简要介绍空间解析几何的有关知识，以此作为研究多元函数微积分的必要准备．我们将利用向量代数这一工具来研究三维空间中的点、线、面以及其他空间图形的数学形式与相互关系．

7.1　空间直角坐标系

7.1.1　空间直角坐标系

在空间中任取一点 O 作为原点，过 O 点引三条互相垂直的空间直线 Ox，Oy 和 Oz 作为数轴，即构成空间直角坐标系，记为 $O-xyz$，如图 7.1 所示．

数轴 Ox，Oy，Oz 分别称为 x，y，z 轴，统称**坐标轴**．空间直角坐标系三个坐标轴依不同的指向可分为右手系和左手系．若右手拇指指向 z 轴正向，其他四指握拳方向由 x 轴正向转到 y 轴正向，则为**右手系**．类似地，用左手握拳可得到左手系．图 7.1 的坐标系为右手系，今后如无特别说明，均采用右手系．

由坐标轴所决定的互相垂直的三个平面统称**坐标面**，如由 x 轴和 y 轴决定的平面称为 xOy 坐标面．类似地，其他两个平面分别称为 yOz 坐标面和 xOz 坐标面．

三个坐标面把空间分为八部分，每一部分称为一个**卦限**，如图 7.2 所示依次为第 1 至第 8 卦限（坐标面是卦限的界面，不算在卦限之内）．各卦限的规定见表 7.1．

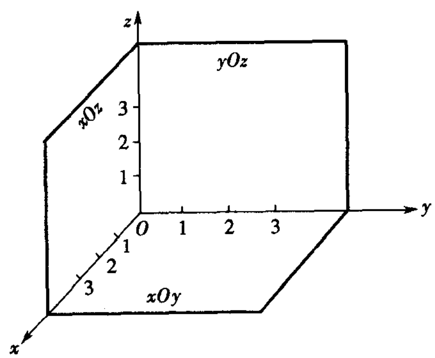

图 7.1　空间直角坐标系

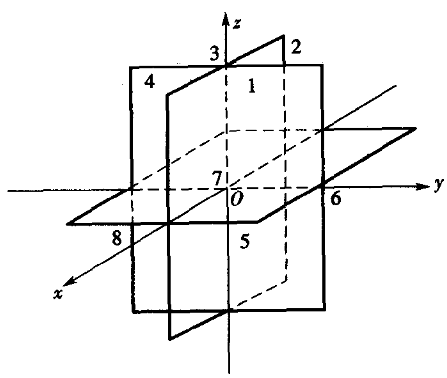

图 7.2　空间直角坐标系的 8 个卦限

表 7.1 八个卦限的规定

坐标 \ 符号 \ 卦限	1	2	3	4	5	6	7	8
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

在空间直角坐标系中,空间中任一点 M 的位置可由它关于坐标轴的相对位置唯一确定.方法是:过点 M 分别作与三个坐标轴垂直的平面,它们与三个坐标轴的交点分别为 P、Q、R.设 $OP=x$,$OQ=y$,$OR=z$,则称有序数组(x,y,z)为点 M 的**直角坐标**,记为 $M(x,y,z)$(见图 7.3).x,y,z 称为点M 的三个**坐标分量**.这样,点 M 就与一个有序数组对应起来.反之,任给一个有序数组(x,y,z),我们便可以分别在三个坐标轴上得到点 P、Q、R,过此三点分别作垂直于 x、y、z 轴的平面,三个互相垂直的平面交于一点 M,点 M 就是有序数组(x,y,z)所唯一确定的点.这样,在空间直角坐标系下,空间中的点就与三个数组成的有序数组一一对应了.

显然,原点 O 的坐标为$(0,0,0)$,各坐标轴上点的坐标分量至少有两个分量为 0,如 x 轴上点的坐标是$(x,0,0)$,各坐标面上点的坐标至少有一个分量是 0,如 xOy 平面上点的坐标是$(x,y,0)$.

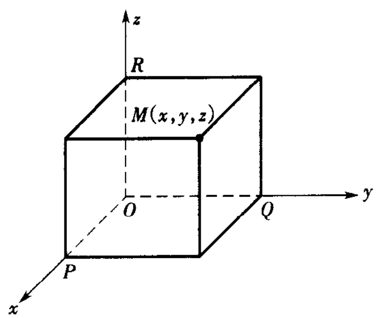

图 7.3 点 M 的坐标

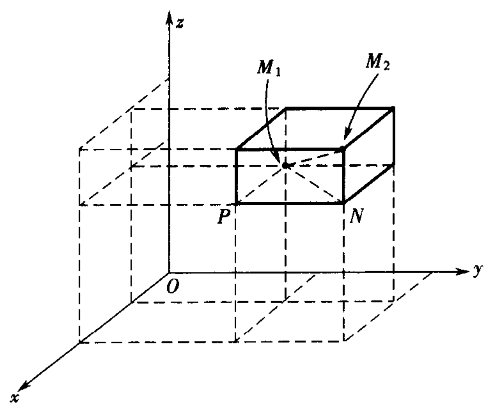

图 7.4 两点间的距离

7.1.2 两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点,我们可用两点的坐标来表示它们之间的距离 d,如图 7.4 所示.过点 M_1,M_2分别作垂直于坐标轴的六个平面,这些平面构成以 M_1,M_2为对角线的长方体.由立体几何知识,我们知道

$$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

所以

$$|M_1M_2|^2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

7.2　向量代数

向量是一种重要的数学工具,在科学和工程中试图运用数学方法之际,有许多量需借助它来刻画.在多元函数的讨论中,由于采用向量而可使许多概念的表述更为简单明晰.

7.2.1　向量的概念

在实际问题中,有些量只有大小,没有方向,例如时间、长度、质量、面积等.它们在取定一个单位后,可以用一个数来表示.这种量称为**数量**(或**标量**).还有一些量既有大小,又有方向,例如力、速度、加速度等.这种既有大小又有方向的量称为向量(或矢量).

定义 7.2.1　既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).

向量可以用有向线段表示.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.如以 M_1 为始点,M_2 为终点的向量,记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$(图 7.5).有时也用一个黑体字母来表示向量,例如 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$.

在许多涉及向量的实际问题中,可以不考虑向量的起点位置,只考虑其大小和方向,称这样的向量为**自由向量**.下面讨论的向量,一般都指自由向量.若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**,记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$;若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等且方向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.也就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.例如图 7.6,$ABCD$ 为一平行四边形,我们认为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

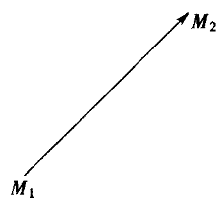

图 7.5　用有向线段表示向量

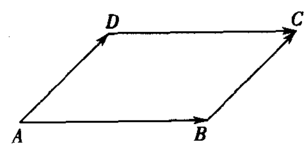

图 7.6　向量的相等

因此,一个向量在保持大小、方向都不变的条件下可以自由地平移.以后,为了方便,我们常把向量平移到同一起点来考虑.

向量的大小或长度称为向量的**模**,向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\boldsymbol{a}$ 的模依次记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$.模等于 1 的向量称为**单位向量**.模等于零的向量称为**零向量**,记作 $\boldsymbol{0}$.零向量没有确定的方向,规定零向量的方向是任意的.在直角坐标系中,以坐标原点 O 为起点,向已知点

M 引向量$\overrightarrow{OM}$,则称此向量为点 M 对于原点 O 的**向径**(或**矢径**).常用黑体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**(或**负向量**),记作 $-\boldsymbol{a}$.

7.2.2 向量的线性运算

1.向量的加法

在力学中,求作用于同一质点的两个不同方向的力的合力时,常采用**平行四边形法则**或**三角形法则**进行.对于一般的向量,规定两向量的加法法则如下.

法则 1(平行四边形法则) 设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$,以 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}, \boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ 为边的平行四边形 $OACB$ 的对角线所对应的向量$\overrightarrow{OC}$(图 7.7),称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

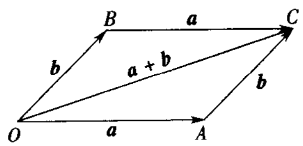

图 7.7 平行四边形法

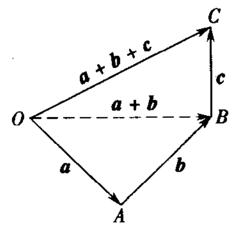

图 7.8 三个向量相加的三角形法则

从图 7.7 可得三角形法则.

法则 2(三角形法则) 以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点,则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量.

向量加法的三角形法则可以推广到任意有限个向量相加的情形.在图 7.8 中$\overrightarrow{OC}$就是三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的和向量,即$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

特别地,对任意向量 $\boldsymbol{a}$,规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

容易验证,向量的加法满足以下运算律:

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2)结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3)$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

我们看到,向量加法的运算规则与实数加法的运算规则是相同的.

2.向量的减法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的反向量之和称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**,记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(见图 7.9),即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

两向量差的作图法如图 7.10 所示.为了从一向量减去另一向量,应该把它们移到共同起点,然后从减项向量的终点向被减项向量的终点引一向量,此即所求的差.

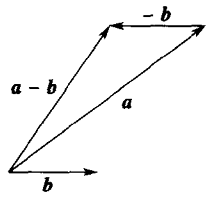

图 7.9　$a-b$

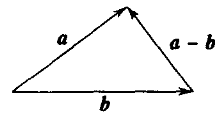

图 7.10　求两向量差的作图法

任意两个向量之间,满足**三角不等式**,即有如下定理及推论.

定理 7.2.1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意二向量,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

证　若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或它们之中至少有一个零向量时,则显然有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,则由三角形两边之和大于第三边得

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

综上所述,得三角不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

推论 1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意两向量,则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

证　$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

推论 2　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意两向量,则

$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,$$
$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|.$$

证　显然有

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|,$$
$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|,$$

移项得证.

3. 数量与向量的乘法

设 λ 是一个实数,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积(简称**数乘**),记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 规定它为一个向量,满足:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

设 λ,μ 为实数,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量,易验证向量的数乘满足以下运算律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

根据向量数乘的规定,有

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,其中 λ,μ 是常数;

(2) 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{e}_a$,则 $|\boldsymbol{e}_a|=1$,且 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 或 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

若一组向量平行于同一条直线(我们认为零向量平行于任何直线),则称它们是**共线的,这组向量也称为共线向量**.易验证向量 $\boldsymbol{a}$ 与非零向量 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在一个实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

7.2.3 向量的坐标表示

1.向量在轴上的投影

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,将它们的起点都平移到某一点 O,得到向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1$. $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1$ 所成的角(在 0 与 π 之间)称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的**夹角**,记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

向量与轴的夹角就是向量与轴正向所成的角.下面给出空间一点和一向量在轴 u 上的投影.

已知空间的点 A 和轴 u,过点 A 作轴 u 的垂面 α,平面 α 与轴 u 的交点 A' 称为点 A 在轴 u 上的**投影**(图 7.11).

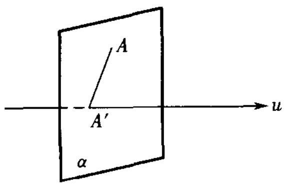

图 7.11 点在轴上的投影

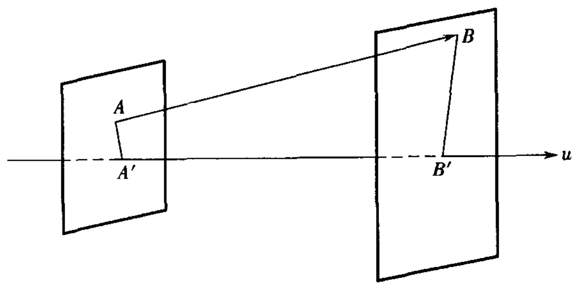

图 7.12 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点与终点在轴上的投影

已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A' 和 B'(图 7.12),设轴 u 的单位向量为 $\boldsymbol{e}$, $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\boldsymbol{e}$,则数 $\lambda\triangleq A'B'$,称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的**投影**,记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'$,轴 u 称为**投影轴**.

关于向量的投影,有下面两个定理.

定理 7.2.2 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦,即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

证 通过向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 引轴 u' 与轴 u 平行,且有相同正方向,则轴 u 和向量 $\overrightarrow{AB}$ 间的夹角 φ 等于轴 u' 和 $\overrightarrow{AB}$ 间的夹角,且有

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_{u'}\overrightarrow{AB}.$$

由图 7.13 知

$$\mathrm{Prj}_{u'}\overrightarrow{AB}=AB''=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi,$$

所以

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

当 φ 为锐角时，投影为正；当 φ 为钝角时，投影为负；当 φ 为直角时，投影为 0.

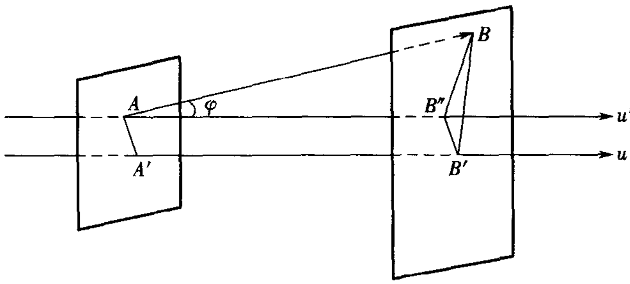

图 7.13　定理 7.2.2 图

容易得出，相等的向量在同一轴上的投影相等. 读者不难推证下面定理.

定理 7.2.3　有限个向量的和向量在轴 u 上的投影等于各向量在轴 u 上投影的和，即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

2. 向量的坐标表示

前面已经用几何的方法表示向量，并对向量进行运算. 但是更深入地研究向量以及用向量解决实际问题，还需借助代数的方法. 为此，引入向量的坐标概念，即用一个有序数组来表示向量，并用向量的坐标进行向量的运算.

在空间直角坐标系中，以原点为始点，终点为(1,0,0)，(0,1,0)，(0,0,1)的三个单位向量称为**基本单位向量**或**坐标向量**，分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 为空间任一向量. 将它平移，使其起点在坐标原点 O，终点在点 $M(a_x,a_y,a_z)$，即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，如图 7.14 所示. 点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 $A(a_x,0,0)$，$B(0,a_y,0)$，$C(0,0,a_z)$，根据向量的加法，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

由向量的数乘运算可知

$$\overrightarrow{OA}=a_x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OB}=a_y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OC}=a_z\boldsymbol{k}.$$

于是

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

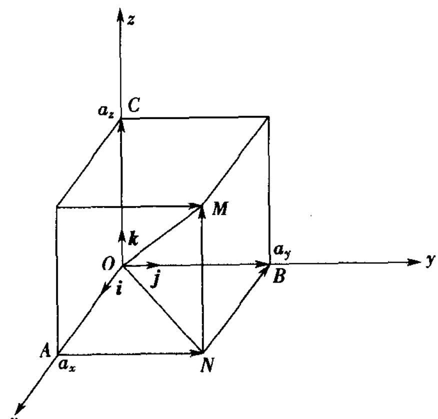

图 7.14　点 M 在坐标轴上的投影

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式，其中 a_x,a_y,a_z 是向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.

定义 7.2.2　设向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别为 a_x,a_y,a_z，称表达式

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的**分解式**，称 a_x, a_y, a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**，并称表达式

$$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表达式**.

显然，$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ 是表示向量的两种等价的形式.

3. 用向量的坐标进行向量的线性运算

设有二向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\{a_x, a_y, a_z\}\pm\{b_x, b_y, b_z\}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\},$$

$$\lambda\{a_x, a_y, a_z\}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\},$$

其中 λ 为常数.

以上就是利用坐标进行向量线性运算的公式. 它们说明：向量的加、减运算及数乘运算可以化为它们相应坐标的运算.

例 7.2.1　设有两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标.

解　做向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}&=\{x_2, y_2, z_2\}-\{x_1, y_1, z_1\}\\&=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\},\end{aligned}$$

即起点不在原点的向量的坐标等于终点坐标减去起点坐标(图 7.15).

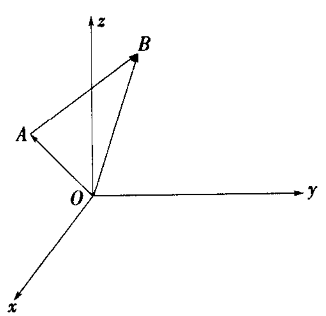

图 7.15　例 7.2.1 图

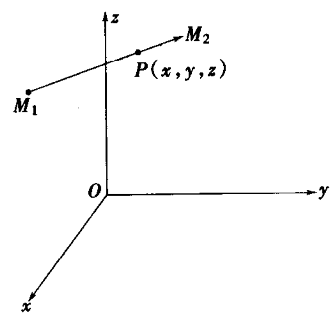

图 7.16　例 7.2.2 图

例 7.2.2　设有两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$，点 P 分线段 M_1M_2 成定比 λ，求证分点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

证　由图 7.16 知 $\overrightarrow{M_1P}=\lambda\overrightarrow{PM_2}$，即

$$\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}=\lambda\{x_2-x, y_2-y, z_2-z\},$$

从而

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),$$
$$y-y_1=\lambda(y_2-y),$$
$$z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

从中解出 x,y,z 即可.

前面 7.2.2 中给出的向量 $\boldsymbol{a}$ 与非零向量 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，也可用坐标形式表示. 设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}\neq\{0,0,0\}$，则 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即

$$\{a_x,a_y,a_z\}=\lambda\{b_x,b_y,b_z\}=\{\lambda b_x,\lambda b_y,\lambda b_z\},$$

从而

$$a_x=\lambda b_x,a_y=\lambda b_y,a_z=\lambda b_z,$$

或写成

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}(=\lambda),$$

即两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}(\neq\boldsymbol{0})$ 共线的充要条件是它们的对应坐标成比例.

应当指出，上式中若某一分母为 0，则应认为相应分子也是 0. 但由于 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，因此 b_x,b_y,b_z 不会同时为 0.

4. 向量的模与方向余弦的坐标表示

确定一个向量，需要知道它的大小(即模)和方向，怎样用坐标来表示这两个要素呢?

定理 7.2.4　设有向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，则它的模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

证　把 $\boldsymbol{a}$ 的起点平移到坐标原点，设它的终点为 A(如图 7.17)，则由两点间距离公式知

$$|\boldsymbol{a}|=|OA|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

为了确定向量的方向，我们先给出以下定义.

定义 7.2.3　非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标轴正向 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

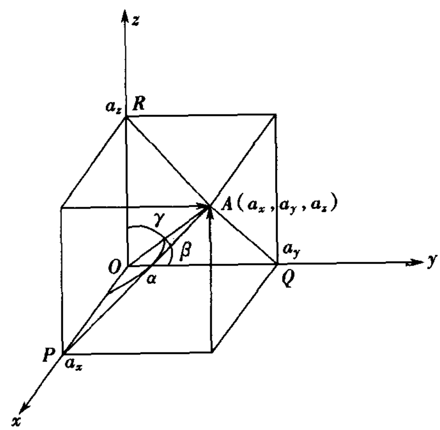

图 7.17　向量的模与方向余弦

方向角 α,β,γ 确定后，向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向就确定了. 但用坐标来表示方向角却比较麻烦. 考虑到方向余弦可唯一确定方向角，并且用坐标来表示方向余弦比较方便，因此我们用方向余弦来确定向量的方向.

由图 7.17，因为△OPA，△OQA，△ORA 都是直角三角形，所以

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \end{cases}$$

此即向量方向余弦的坐标表达式.由此易得出方向余弦所满足的关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 7.2.3 已知点 $A(1,2,3)$,$B(2,1,-1)$,求向量$\overrightarrow{AB}$的模及方向余弦.

解 $\overrightarrow{AB}=\{2-1,1-2,-1-3\}=\{1,-1,-4\}$,

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-4)^2}=3\sqrt{2},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{6},\cos\gamma=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

与某向量的方向余弦成比例的一组实数 l,m,n,即

$$\frac{l}{\cos\alpha}=\frac{m}{\cos\beta}=\frac{n}{\cos\gamma}$$

叫做该向量的**方向数**.

若已知某向量的一组方向数 l,m,n,则可求出该向量的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

注意上面三式应同时取正号或同时取负号.请读者自己证明.

7.2.4 两向量的数量积

由物理学可知,一个物体在恒力 $\boldsymbol{F}$(大小和方向均不变)的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2,若以 $\boldsymbol{S}$ 表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$,则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\langle\boldsymbol{F},\hat{}\,\boldsymbol{S}\rangle=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta,$$

其中 θ 为向量$\boldsymbol{F}$ 与$\boldsymbol{S}$ 的夹角.

以此为实际背景,我们引进两个向量的数量积.

定义 7.2.4 向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的模及它们的夹角的余弦的乘积称为向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的**数量积**,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}).$$

数量积的记号中用一点"·"表示乘积，因此向量间的数量积也叫做向量间的**点积**或**内积**.

前面讲的功 W 就是 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{S}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}.$$

对任意向量 $\boldsymbol{a}$，由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，因此通常记 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$.

由数量积的定义可得

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

向量的数量积满足以下运算律：

(1)交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2)分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3)与数乘的结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 为常数）.

由投影的表达式 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$，

故　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，

或　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，

即两向量的点积等于一向量的模乘以另一向量在这向量(设它是非零向量)上的投影.

规定零向量与任何向量垂直.不难求出：两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

下面给出数量积的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则由数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,\end{aligned}$$

即两个向量的数量积等于它们对应坐标乘积之和.

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量时，可得两向量夹角的余弦的坐标表示式

$$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

由此，两向量相互垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

例 7.2.4　已知三点 $A(1,1,1),B(2,2,1),C(2,1,2)$，求 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角 θ.

解　从已知得，$\overrightarrow{AB}=\{1,1,0\},\overrightarrow{AC}=\{1,0,1\}$，

于是　$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2},$$

从而 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.