徐望根 编

中国环境科学出版社

高中代数

中册

重点问题详解

重点问题详解

高中代数 中册

徐 望 根 编

中国环境[redacted]版社

1 9 9 3

（京）新登字089号

内容简介

本书包括高二代数全部知识内容，对其中应知应会的知识点和重难点，或易混易错不好掌握的疑点，以及可能遇到的各种问题，逐一提出问题，并做了详尽的回答，有些问题还配有必要的小型练习，以求弄清知识、巩固概念、提高能力。

本书条目按课文顺序编排，易于查找。适合高中学生及自学青年阅读参考，也可供教师备课参考。

重点问题详解

高中代数　中册

徐望根　编

*

中国环境科学出版社出版

北京崇文区北岗子街8号

三河县宏达印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行　　各地新华书店经售

*

1993年3月第一版　　开本　787×1092　1/32

1993年3月第一次印刷　　印张　7

印数　1—5,000　　字数　163千字

ISBN 7-80093-304-0/G・336

定价：4.00元

前　言

“学则须疑”，有疑有解则能提高和进步。

学习是一个特殊的认识过程，是在教师帮助下加速对所学知识的认识过程。课堂学习时间是有限的，重要的是培养自学能力，以提高学习效果。自学时有了疑问和疑难怎么办！要靠无声的老师做辅导，这就是有益的——书。

为此，向大家奉献一套中小学课本中《重点问题详解》，一书在手，似教师陪坐身旁。

该书是以问题的形式出现的。因为一切科学都是从为什么开始的，且问题是启动思维的动力。所以，以问题的形式，贯穿全书是最有益的，它把学习中的重点、难点、疑点设计成问题，使读者一目了然，便于阅读和使用。

遇有疑难，请先思考，然后翻阅此书，认真阅读，即可生效。

本书的特点是：

一、源于课本，重点突出，解答详尽。

该从书，随着课本进度，将所学内容的重难点和疑惑不解的问题，提出来做详尽的解答，并有例题，以帮助读者深刻理解，提高学习实效。

二、提出问题，文字精辟，促进思考。

该从书，对所有重点问题，均以问题形式出现的。问题是思维的动力。你有问题可到该书中去找解；从书中提出的问题，促你思考，然后阅读解答，使你从中得到提高。

三、应用知识，总结方法，提高能力。

提高能力，是学习的重要目的。该丛书根据课程的要求，及时总结学习方法和掌握应用知识的方法，以取得举一反三之效，促进读者学习能力的提高。

四、辞书性，题解性，兼而有之。

该丛书，具有辞书性和题解性。为了说明课本中的重点知识，在解答之中，则要博引例证，以丰富内容，可取辞书之效。遇有典型问题，解之详尽，故有题解功能。

编写这套丛书是一个大胆的尝试，虽然我们依据设想做了很多努力，但是不妥之处也还难免。欢迎广大读者批评指正。

目　录

反正弦函数是怎样建立的

建立依据：如果确定函数$y=f(x)$的映射是一一映射，那么这个映射有逆映射，由逆映射所确定的函数$x=f^{-1}(y)$就是函数$y=f(x)$的反函数。函数$y=f(x)$的定义域、值域分别是反函数$x=f^{-1}(y)$的值域、定义域。习惯上，把反函数$x=f^{-1}(y)$改写成$y=f^{-1}(x)$，则函数$y=f(x)$的定义域、值域分别是反函数$y=f^{-1}(x)$的值域、定义域。如：

	函数$y=f(x)$	反函数 $x=f^{-1}(y)$	反函数 $y=f^{-1}(x)$（习惯表示）
举　例	$y=e^x$	$x=\ln y$	$y=\ln x$
定义域	R	R^+	R^+
值　域	R^+	R	R

建立过程：1．确定正弦函数 $y=\sin x$的映射不是定义域$(-\infty, +\infty)$到值域$[-1, 1]$上的一一映射，不存在逆映射，没有反函数。

2．确定正弦函数$y=\sin x$在每一个单调区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$及$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in Z)$上的映射是一一映射，存在逆映射，有反函数。

3．取最合适的区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$。确定正弦函数在单调增区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上的映射是定义域$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$到值

域〔-1，1〕上的一一映射。

$$f(x):\ x\to y=\sin x.$$

4．对于一一映射$f(x)$：$x\to y=\sin x$的逆映射：

$$f^{-1}(y):\ y\to x=\arcsin y$$

所确定的函数$x=\arcsin y(y\in[-1,\ 1])$（或改写成习惯表示$y=\arcsin x(x\in[-1,\ 1])$）是函数$y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$的反函数。

5．定义：正弦函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的反函数叫做反正弦函数，记作$y=\arcsin x$，它的定义域是〔$-1$，1〕，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$。

用类似的方法可建立反余弦函数、反正切函数，反余切函数。定义如下：

余弦函数$y=\cos x$在〔0，π〕上的反函数叫做反余弦函数，记作$y=\arccos x$，它的定义域是〔-1，1〕，值域是〔0，π〕。

正切函数$y=\mathrm{tg}x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内的反函数叫做反正切函数，记作$y=\mathrm{arctg}x$，它的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$。

余切函数$y=\mathrm{ctg}x$在$(0,\ \pi)$内的反函数叫做反余切函数，记作$y=\mathrm{arcctg}x$，它的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$。

为什么要这样选取主值区间

反三角函数的值域区间也叫主值区间。反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数的主值区间分别是 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$、$[0, \pi]$、$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$、$(0, \pi)$。为什么要这样选取主值区间呢？

我们知道，三角函数在其定义域与值域之间是多对一的对应，是映射，但不是一一映射，故无逆映射。但在定义域的每一个单调区间上，可以构成三角函数的对应关系是从该单调区间到值域的一一映射，也就有逆映射和相应的反函数。而三角函数在其定义域上的单调区间有无穷多个，选谁合适呢？选取的原则要考虑到：

（1）函数连续。

（2）一一映射：即在该单调区间上，对于x的不同的值，y有不同的值和x对应；对于y的每一个值，都有x的值和它对应。

（3）在该单调区间上，能取得原三角函数的所有值。

（4）包括所有正锐角。

这样，对正弦函数$y=\sin x$来说，选取单调区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$最合适；对余弦函数$y=\cos x$来说，选取单调区间$[0, \pi]$最合适；对正切函数$y=\operatorname{tg}x$来说，选取单调区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$最合适；对余切函数$y=\operatorname{ctg}x$来说，选取单调区间$(0, \pi)$最合适。换句话说，它们分别作为相应的反三角函数的主值区间最合适。其优点是：

（1）反三角函数的有关主值区间中，包括锐角、直角、钝角的弧度数，这样平面几何、立体几何、解析几何中的各种角都可以用反三角函数作简单表示。

（2）反三角函数具有良好的宏观性质（诸如定义域、值域、单调性、奇偶性等）。

（3）三角运算与反三角运算便于转化和互通。

反三角函数有哪些基本性质

反三角函数的基本性质用下表列举之。

名称 / 性质	反正弦函数 $y=\arcsin x$	反余弦函数 $y=\arccos x$	反正切函数 $y=\mathrm{arctg}\,x$	反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}\,x$
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值　域	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, \pi)$
单调性	增函数	减函数	增函数	减函数
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数	奇函数	非奇非偶函数
有界性	有界函数	有界函数	有界函数	有界函数
最　值	当$x=-1$时，$y_{min}=-\frac{\pi}{2}$；当$x=1$时，$y_{max}=\frac{\pi}{2}$	当$x=1$时，$y_{min}=0$；当$x=-1$时，$y_{max}=\pi$	无最值	无最值

几点说明：

（1）有界性定义如下：

存在常数$M>0$，对定义域中任意一个值x，有$|f(x)|<M$，则称$y=f(x)$为有界函数；

任给常数$M>0$，在定义域中总存在一个值x，使$|f(x)|>M$，则称$y=f(x)$为无界函数。

显然，值域为$[a, +\infty)$、$(-\infty, a]$、$(-\infty, +\infty)$等的函数都是无界函数。

（2）反三角函数奇偶性用公式表示是：

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x;$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x;$$

$$\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}x;$$

$$\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}x.$$

（3）反三角函数都不是周期函数。

例1　求函数$y=\arcsin\dfrac{1}{x}$的定义域和值域。

解：$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1 \Longleftrightarrow |x|\geqslant 1 \Longleftrightarrow x\geqslant 1$，或$x\leqslant -1$

∴　定义域是$(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$。

∵　$\dfrac{1}{x}$的取值范围是$[-1, 0)\cup(0, 1]$，

∴　值域是$\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。

例2　下列函数中，奇函数是（　　）。

(A) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$；

(B) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}+\arccos x$；

(C) $f(x)=-\dfrac{\pi}{2}+\arccos x$；

(D) $f(x)=-\frac{\pi}{2}-\arccos x$。

解：选(C)。理由如下：

$$f(-x)=-\frac{\pi}{2}+\arccos(-x)$$

$$=-\frac{\pi}{2}+(\pi-\arccos x)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arccos x=-f(x)。$$

例3　求函数$y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+1}$的最值。

解：∵　$\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1$，　且$\frac{1}{x^2+1}=1\Longleftrightarrow x=0$，

又$y=\operatorname{arctg}x$是增函数

∴　$y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+1}$的最大值是$y_{max}=\frac{\pi}{4}$。

(当$x=0$时取得)

求定义域有哪些常见错误

我们采用正误对照和辨析，来揭示和纠正错误，以加深对反三角函数定义域的理解。

例1　求函数$y=\arccos mx$的定义域($m\in R$)。

误解：所求定义域是$[-1, 1]$。

正解：当$m=0$时，定义域是R；

当$m>0$时，定义域是$\left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]$；

当$m<0$时，定义域是$\left[\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}\right]$。

辨析：不能形式上套用反余弦函数的定义域。求形如$y=\arcsin f(x)$、$y=\arccos f(x)$的定义域，先从整体上写出

不等式$|f(x)|\leqslant 1$，再求其解集，并注意是否要分情况讨论。

例2　求函数$y=\arcsin\sqrt{x-1}$的定义域。

误解：所求定义域是$0\leqslant x\leqslant 2$。

正解：所求定义域是$[1, 2]$。

辨析：定义域应从$\begin{cases} x-1\geqslant 0 \\ -1\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 1 \end{cases}$即$\begin{cases} x-1\geqslant 0 \\ 0\leqslant x-1\leqslant 1 \end{cases}$中解出。误解中，错在没有考虑到被开方数应是非负数，另外，在写法上应写成集合或区间的形式。

例3　求函数$y=\arcsin(\mathrm{tg}x)$的定义域。

误解一：所求定义域是$[-1, 1]$。

误解二：所求定义域是$\left\{x \middle| x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\right\}$。

正解：从$-1\leqslant \mathrm{tg}x\leqslant 1$　解出$-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi$。故所求定义域是$\left\{x \middle| -\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z\right\}$。

例4　求函数$y=\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x)$的定义域。

误解：所求定义域是R。

正解：由于反余切函数的定义域是R，因此只要考虑余切函数$\mathrm{ctg}x$的定义域。所求定义域是$\{x|x\neq k\pi, k\in Z\}$。

辨析：误解中错在与反余切函数的定义域相混。注意：函数$\mathrm{arctg}f(x)$、$\mathrm{arcctg}f(x)$的定义域与$f(x)$的定义域相同。

求值域有哪些常见错误

求值域要与定义域一起考虑，要注意不要把不是值域中的值混到值域中来。