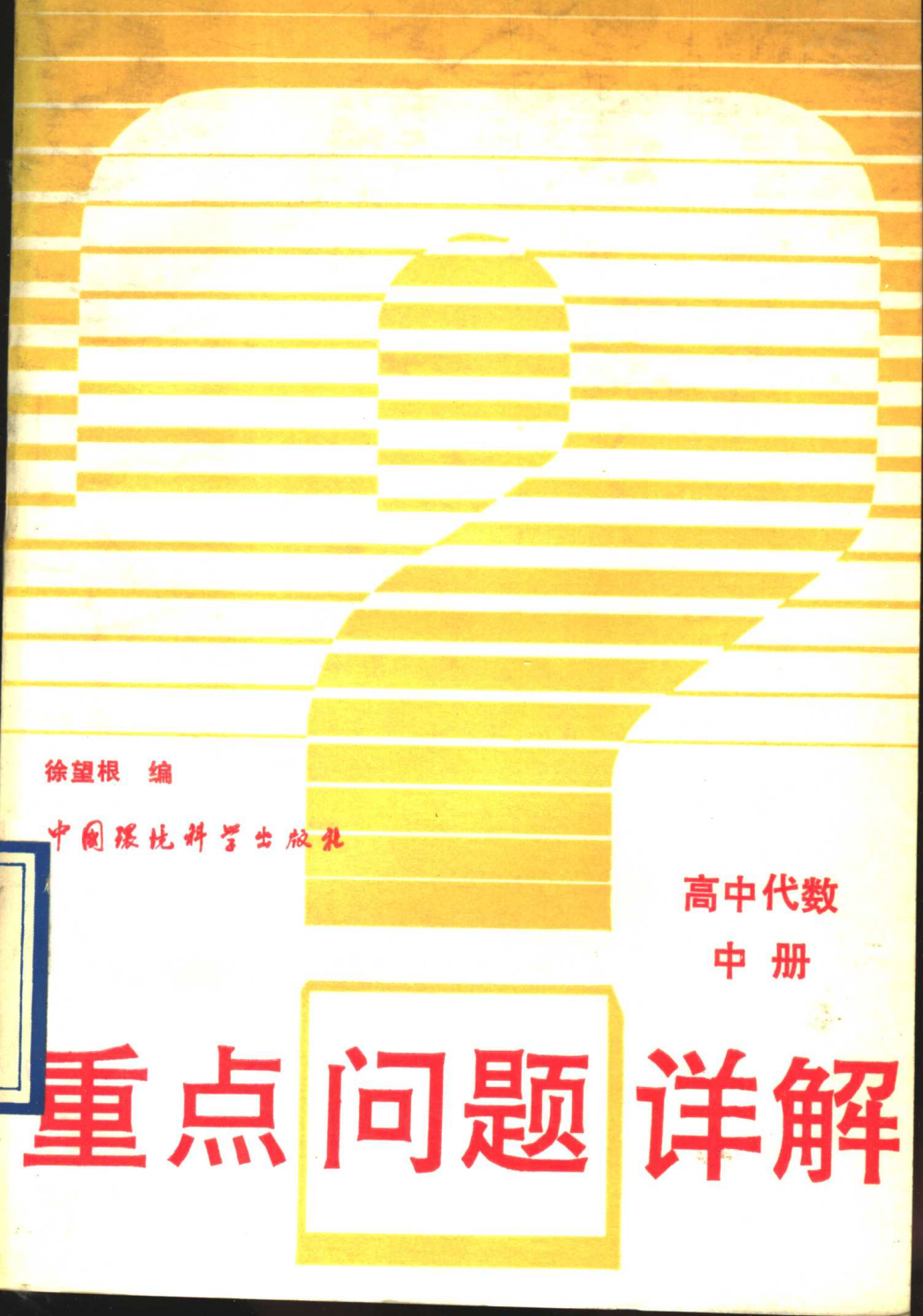




徐望根 编

中国环境科学出版社

高中代数
中 册

重点问题详解

重点问题详解

高中代数 中册

徐望根 编

中国环境科学出版社

1993

(京)新登字 089 号

内 容 简 介

本书包括高二代数全部知识内容，对其中应知应会的知识点和重难点，或易混易错不好掌握的疑点，以及可能遇到的各种问题，逐一提出问题，并做了详尽的回答，有些问题还配有必要的小型练习，以求弄清知识、巩固概念、提高能力。

本书条目按课文顺序编排，易于查找。适合高中学生及自学青年阅读参考，也可供教师备课参考。

重点问题详解

高中代数 中册

徐望根 编

*

中国环境科学出版社出版

北京崇文区北岗子街8号

三河县宏达印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售

*

1993年3月第 一 版 开本 787×1092 1/32

1993年3月第一次印刷 印张 7

印数 1—5,000 字数 163千字

ISBN 7-80093-304-0/G · 336

定价：4.00元

前 言

“学则须疑”，有疑有解则能提高和进步。

学习是一个特殊的认识过程，是在教师帮助下加速对所学知识的认识过程。课堂学习时间是有限的，重要的是培养自学能力，以提高学习效果。自学时有了疑问和疑难怎么办！要靠无声的老师做辅导，这就是有益的——书。

为此，向大家奉献一套中小学课本中《重点问题详解》，一书在手，似教师陪坐身旁。

该书是以问题的形式出现的。因为一切科学都是从为什么开始的，且问题是启动思维的动力。所以，以问题的形式，贯穿全书是最有益的，它把学习中的重点、难点、疑点设计成问题，使读者一目了然，便于阅读和使用。

遇有疑难，请先思考，然后翻阅此书，认真阅读，即可生效。

本书的特点是：

一、源于课本，重点突出，解答详尽。

该丛书，随着课本进度，将所学内容的重难点和疑惑不解的问题，提出来做详尽的解答，并有例题，以帮助读者深刻理解，提高学习实效。

二、提出问题，文字精辟，促进思考。

该丛书，对所有重点问题，均以问题形式出现的。问题是思维的动力。你有问题可到该书中去找解；丛书中提出的问题，促你思考，然后阅读解答，使你从中得到提高。

三、应用知识，总结方法，提高能力。

提高能力，是学习的重要目的。该丛书根据课程的要求，及时总结学习方法和掌握应用知识的方法，以取得举一反三之效，促进读者学习能力的提高。

四、辞书性，题解性，兼而有之。

该丛书，具有辞书性和题解性。为了说明课本中的重点知识，在解答之中，则要博引例证，以丰富内容，可取辞书之效。遇有典型问题，解之详尽，故有题解功能。

编写这套丛书是一个大胆的尝试，虽然我们依据设想做了很多努力，但是不妥之处也还难免。欢迎广大读者批评指正。

目 录

反正弦函数是怎样建立的	(1)
为什么要这样选取主值区间	(3)
反三角函数有哪些基本性质	(4)
求定义域有哪些常见错误	(6)
求值域有哪些常见错误	(7)
如何辨认反三角函数式有无意义	(9)
证明反三角恒等式为什么要考虑两点	(10)
如果原式两边不宜取同名三角函数怎么办	(13)
问 $\arcsin(\sin x)$ 等于什么	(15)
问 $\arccos(\cos x)$ 等于什么	(16)
问 $\arctg(\operatorname{tg} x)$ 等于什么	(18)
问 $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ 等于什么	(19)
几组反三角函数公式的特点是什么(一)	(20)
几组反三角函数公式的特点是什么(二)	(22)
几组反三角函数公式的特点是什么(三)	(24)
如何验证解集相等	(27)
三角方程的求解过程是什么	(29)
三角方程解法: 什么是有理置换法	(30)
三角方程解法: 什么是因式分解法	(32)
三角方程解法: 什么是辅助角法	(34)
三角方程有哪些特殊解法	(36)
如何解含有参变量的三角方程	(38)
面目全非的两个解集为什么能转化	(40)

产生增根、失根的原因是什么(一)	(43)
产生增根、失根的原因是什么(二)	(44)
用自身替换变形解方程为什么不可取	(47)
数列问答(一)	(49)
数列问答(二)	(51)
数列问答(三)	(53)
数列问答(四)	(55)
等差、等比数列的通项公式为什么结构相同	(57)
等差、等比数列常见有哪些对应性质	(59)
等差、等比数列的判定和性质中有哪些有用的 充要条件	(61)
数列求和有哪些常见方法(一)	(62)
数列求和有哪些常见方法(二)	(65)
如何构造递推关系,使便于求其通项	(67)
如何使用和记号、积记号	(69)
如何思考编题者求通项的递推关系题	(71)
如何求递推式 $a_{n+1} = pa_n + q$ 的通项	(73)
如何求递推式 $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ 的通项	(75)
如何求递推式 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ 的通项	(77)
什么叫斐波那契数列	(78)
用裂项法求和常见有哪些裂项形式	(80)
如何用一般的求和恒等式编造一些特殊的求和 恒等式	(83)
什么叫做 k 阶等差数列,什么叫做高阶等差数列	(84)
什么叫做 k 阶等比数列,什么叫做高阶等比数列	(86)
自然数前 n 项平方和常见有哪些求法	(88)
自然数前 n 项立方和常见有哪些求法	(91)
如何用叠加法求自然数的幂次和	(93)

数学归纳法问答(一)·····	(95)
数学归纳法问答(二)·····	(97)
这样证明命题对吗·····	(99)
数学归纳法有哪些变化形式·····	(100)
与自然数有关的数学命题是否一定要用数学归纳法来证·····	(102)
数学归纳法两个步骤的理论依据是什么·····	(104)
不等式有哪些基本性质·····	(105)
常见的有哪些基本不等式·····	(107)
常见不等式有哪些证法·····	(109)
什么是求差比较法·····	(110)
什么是求商比较法·····	(112)
什么是证明不等式中的综合法·····	(114)
什么是证明不等式中的分析法·····	(116)
什么是反证法·····	(118)
如何用数学归纳法证明平均值不等式·····	(120)
什么是证明不等式中的判别式法·····	(122)
什么是证明不等式中的换元法·····	(123)
什么是放缩法·····	(125)
在不等式求解(证)中, 有哪些常见错误(一)·····	(127)
在不等式求解(证)中, 有哪些常见错误(二)·····	(130)
如果 n 个正数的积为1, 那么这 n 个正数的和是什么·····	(132)
算术平均值、几何平均值、调和平均值这三者有什么关系·····	(134)
如何证明柯西-布尼亚可夫斯基不等式·····	(136)
解不等式有哪些基本概念和同解原理·····	(138)
如何解一元 n 次不等式·····	(141)
如何解分式、无理不等式·····	(143)

如何解指数、对数不等式	(146)
如何解绝对值不等式	(148)
如何用二次函数的性质证明不等式	(150)
从一例看不等式是如何深化的	(152)
这样设新元行吗	(154)
为什么不能简单地套用解法, 怎么办	(156)
怎样分情况讨论有关的不等式题	(158)
证法的本源是什么	(160)
这个题解用的是什么方法, 体现了什么思想	(161)
如何用增量替换证明不等式	(163)
从一例看如何用模式解题	(164)
如何用距离模式编造不等式证明题	(166)
行列式问答	(168)
n 阶行列式有哪些基本性质	(169)
运用行列式性质简化计算的步骤是什么	(171)
什么是范德蒙行列式	(173)
三阶范德蒙行列式有哪些简单应用	(175)
线性方程组问答	(177)
什么是克莱姆法则	(178)
如何活用克莱姆法则	(180)
常用有哪些行列式表示数式及关系	(182)
二元线性方程组的解有哪几种情况	(185)
如何用行列式和线性方程组研究两条直线的位 置关系	(186)
三元线性方程组的解有哪几种情况	(188)
复数问答(一)	(189)
复数问答(二)	(191)
处理复系数一元二次方程的根要注意什么	(193)

复数与解析几何有哪些联系	(195)
$\sqrt{z^2} = z $ 吗	(197)
i 有哪些运算技巧	(199)
三次原根 ω 有哪些特性	(200)
ω 有哪些应用	(202)
共轭复数和复数模有哪些性质	(204)
$\bar{z} = z \iff z \in R$ 常见有哪些应用	(206)
如何活用棣莫佛定理	(208)
如何用复数表示三角式	(210)
如何用反三角函数表示复数的辐角主值	(212)

反正弦函数是怎样建立的

建立依据：如果确定函数 $y = f(x)$ 的映射是一一映射，那么这个映射有逆映射，由逆映射所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 就是函数 $y = f(x)$ 的反函数。函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域分别是反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的值域、定义域。习惯上，把反函数 $x = f^{-1}(y)$ 改写成 $y = f^{-1}(x)$ ，则函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域分别是反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域、定义域。如：

	函数 $y = f(x)$	反函数 $x = f^{-1}(y)$	反函数 $y = f^{-1}(x)$ (习惯表示)
举 例	$y = e^x$	$x = \ln y$	$y = \ln x$
定义域	R	R^+	R^+
值 域	R^+	R	R

建立过程：1. 确定正弦函数 $y = \sin x$ 的映射不是定义域 $(-\infty, +\infty)$ 到值域 $[-1, 1]$ 上的一一映射，不存在逆映射，没有反函数。

2. 确定正弦函数 $y = \sin x$ 在每一个单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 及 $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ ($k \in Z$) 上的映射是一一映射，存在逆映射，有反函数。

3. 取最合适的区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。确定正弦函数在单调增区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的映射是定义域 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 到值

域 $(-1, 1)$ 上的一一映射。

$$f(x): x \rightarrow y = \sin x.$$

4. 对于一一映射 $f(x): x \rightarrow y = \sin x$ 的逆映射:

$$f^{-1}(y): y \rightarrow x = \arcsin y$$

所确定的函数 $x = \arcsin y (y \in [-1, 1])$ (或改写成习惯表示 $y = \arcsin x (x \in [-1, 1])$) 是函数 $y = \sin x (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ 的反函数。

5. 定义: 正弦函数 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数叫做反正弦函数, 记作 $y = \arcsin x$, 它的定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。

用类似的方法可建立反余弦函数、反正切函数, 反余切函数。定义如下:

余弦函数 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的反函数叫做反余弦函数, 记作 $y = \arccos x$, 它的定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $[0, \pi]$ 。

正切函数 $y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内的反函数叫做反正切函数, 记作 $y = \arctan x$, 它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。

余切函数 $y = \cot x$ 在 $(0, \pi)$ 内的反函数叫做反余切函数, 记作 $y = \operatorname{arccot} x$, 它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。

为什么要这样选取主值区间

反三角函数的值域区间也叫主值区间。反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数的 主值区间 分别是 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 、 $[0, \pi]$ 、 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 、 $(0, \pi)$ 。为什么要这样选取主值区间呢？

我们知道，三角函数在其定义域与值域之间是多对一的对应，是映射，但不是一一映射，故无逆映射。但在定义域的每一个单调区间上，可以构成三角函数的对应关系是从该单调区间到值域的一一映射，也就有逆映射和相应的反函数。而三角函数在其定义域上的单调区间有无穷多个，选谁合适呢？选取的原则要考虑到：

(1) 函数连续。

(2) 一一映射：即在该单调区间上，对于 x 的不同的值， y 有不同的值和 x 对应；对于 y 的每一个值，都有 x 的值和它对应。

(3) 在该单调区间上，能取得原三角函数的所有值。

(4) 包括所有正锐角。

这样，对正弦函数 $y = \sin x$ 来说，选取单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 最合适；对余弦函数 $y = \cos x$ 来说，选取单调区间 $[0, \pi]$ 最合适；对正切函数 $y = \operatorname{tg} x$ 来说，选取单调区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 最合适；对余切函数 $y = \operatorname{ctg} x$ 来说，选取单调区间 $(0, \pi)$ 最合适。换句话说，它们分别作为相应的反三角函数的 主值区间 最合适。其优点是：

(1) 反三角函数的有关主值区间中, 包括锐角、直角、钝角的弧度数, 这样平面几何、立体几何、解析几何中的各种角都可以用反三角函数作简单表示。

(2) 反三角函数具有良好的宏观性质(诸如定义域、值域、单调性、奇偶性等)。

(3) 三角运算与反三角运算便于转化和互通。

反三角函数有哪些基本性质

反三角函数的基本性质用下表列举之。

名称 性质	反正弦函数 $y = \arcsin x$	反余弦函数 $y = \arccos x$	反正切函数 $y = \arctg x$	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, \pi)$
单调性	增函数	减函数	增函数	减函数
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数	奇函数	非奇非偶函数
有界性	有界函数	有界函数	有界函数	有界函数
最值	当 $x = -1$ 时, $y_{\min} = -\frac{\pi}{2}$; 当 $x = 1$ 时, $y_{\max} = \frac{\pi}{2}$	当 $x = 1$ 时, $y_{\min} = 0$; 当 $x = -1$ 时, $y_{\max} = \pi$	无最值	无最值

几点说明:

(1) 有界性定义如下:

存在常数 $M > 0$, 对定义域中任意一个值 x , 有 $|f(x)| < M$, 则称 $y = f(x)$ 为有界函数;

任给常数 $M > 0$, 在定义域中总存在一个值 x , 使 $|f(x)| > M$, 则称 $y = f(x)$ 为无界函数.

显然, 值域为 $[a, +\infty)$ 、 $(-\infty, a]$ 、 $(-\infty, +\infty)$ 等的函数都是无界函数.

(2) 反三角函数奇偶性用公式表示是:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x.$$

(3) 反三角函数都不是周期函数.

例1 求函数 $y = \arcsin \frac{1}{x}$ 的定义域和值域.

$$\text{解: } \left| \frac{1}{x} \right| \leq 1 \iff |x| \geq 1 \iff x \geq 1, \text{ 或 } x \leq -1$$

$$\therefore \text{定义域是 } (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

$$\because \frac{1}{x} \text{ 的取值范围是 } [-1, 0) \cup (0, 1],$$

$$\therefore \text{值域是 } \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

例2 下列函数中, 奇函数是().

$$(A) f(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x;$$

$$(B) f(x) = \frac{\pi}{2} + \arccos x;$$

$$(C) f(x) = -\frac{\pi}{2} + \arccos x;$$

$$(D) f(x) = -\frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

解: 选(C). 理由如下:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -\frac{\pi}{2} + \arccos(-x) \\ &= -\frac{\pi}{2} + (\pi - \arccos x) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arccos x = -f(x). \end{aligned}$$

例3 求函数 $y = \arctg \frac{1}{x^2+1}$ 的最值.

解: $\because \frac{1}{x^2+1} \leq 1$, 且 $\frac{1}{x^2+1} = 1 \iff x = 0$,

又 $y = \arctg x$ 是增函数

$$\therefore y = \arctg \frac{1}{x^2+1} \text{ 的最大值是 } y_{\max} = \frac{\pi}{4}.$$

(当 $x = 0$ 时取得)

求定义域有哪些常见错误

我们采用正误对照和辨析, 来揭示和纠正错误, 以加深对反三角函数定义域的理解.

例1 求函数 $y = \arccos mx$ 的定义域 ($m \in R$).

误解: 所求定义域是 $[-1, 1]$.

正解: 当 $m = 0$ 时, 定义域是 R ;

当 $m > 0$ 时, 定义域是 $\left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]$;

当 $m < 0$ 时, 定义域是 $\left[\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}\right]$.

辨析: 不能形式上套用反余弦函数的定义域. 求形如 $y = \arcsin f(x)$ 、 $y = \arccos f(x)$ 的定义域, 先从整体上写出

不等式 $|f(x)| \leq 1$, 再求其解集, 并注意是否要分情况讨论.

例2 求函数 $y = \arcsin \sqrt{x-1}$ 的定义域.

误解: 所求定义域是 $0 \leq x \leq 2$.

正解: 所求定义域是 $[1, 2]$.

辨析: 定义域应从 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{x-1} \leq 1 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 0 \leq x-1 \leq 1 \end{cases}$

中解出. 误解中, 错在没有考虑到被开方数应是非负数, 另外, 在写法上应写成集合或区间的形式.

例3 求函数 $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$ 的定义域.

误解一: 所求定义域是 $[-1, 1]$.

误解二: 所求定义域是 $\left\{ x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$.

正解: 从 $-1 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$ 解出 $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

故所求定义域是 $\left\{ x \mid -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z \right\}$.

例4 求函数 $y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)$ 的定义域.

误解: 所求定义域是 R .

正解: 由于反余切函数的定义域是 R , 因此只要考虑余切函数 $\operatorname{ctg} x$ 的定义域. 所求定义域是 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$.

辨析: 误解中错在与反余切函数的定义域相混. 注意: 函数 $\operatorname{arctg} f(x)$ 、 $\operatorname{arcc} \operatorname{tg} f(x)$ 的定义域与 $f(x)$ 的定义域相同.

求值域有哪些常见错误

求值域要与定义域一起考虑, 要注意不要把不是值域中的值混到值域中来.