

概率统计预报方法

矢野 言川 王廷 高井 义

黑龙江省气象局

一九七三年十二月

第一章 线性代数基本知识和

§ 1 行列式

§ 2 矩阵的基本性质和运算

§ 3 向量空间、线性方程组

§ 4 实对称矩阵 特征值和特征向量

§ 5 线性代数方程组求解法

第二章 概率统计基本知识

§ 1 基本概念和基本定理

§ 2 随机变量的分布函数

§ 3 数字特征 方差 协方差

§ 4 条件分布、条件期望及其计算

§ 5 统计假设检验

第三章 多元线性回归预测

§ 1 相关关系及回归方程的基本概念

§ 2 多元线性回归模型

§ 3 回归系数的最小二乘估计

§ 4 回归问题的方差分析与统计检验

§ 5 逐步回归的基本思想

§ 6 双因子实验的逐步回归

第四章 判别分析

- - - - 127

§ 1 问题的提出

§ 2 二极分辨的基本原理

§ 3 应 用

第五章 马尔可夫链及其应用

- - - - 159

§ 1 马尔可夫链的定义与组成

§ 2 马尔可夫链的应用

第六章 平稳时间序列预报

- - - - 169

§ 1 平稳时间序列预报的产生

§ 2 平稳时间序列预报方法的使用条件

§ 3 平稳时间序列预报方法——自回归预报方法

§ 4 自回归预报的步骤

§ 5 一次回归预报的例子

§ 6 讨 论

第七章 预报集成问题

- - - - 176

— / —

4

3

- 1

1

1

1

1

13

1

1

1

1

1

1

1

1

称为 S 行 n 列矩阵，记成 SA_n ；数 a_{ij} 叫做矩阵 SA_n 的元素。若行数和列数未知数个数相等， $S = n$ ，则 nA_n 称为 n 阶方阵，也叫做 n 行 n 列矩阵。从左上角到右下角的对角线上元素 a_{11} 、 a_{22} 、…… a_{nn} 常称为主对角线元素。若主对角线上元素不为零，而矩阵中其它元素均为零，这样的矩阵称为对角矩阵，记为：

$$nD_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

特别地，当 $d_{11} = d_{22} = \cdots = d_{nn} = 1$ ，这样的矩阵称为单位矩阵，记为：

$$nI_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

2. 矩阵（加、乘）运算规则和性质

如果两个矩阵 SA_n 和 SB_n 的对应位置上的元素相等 $a_{ij} = b_{ij}$

则称 $SA_n = SB_n$ ，矩阵 SA_n 与 SB_n 的和（差）也是 SC_n 矩阵，

$$SC_n = SA_n \pm SB_n = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} \pm b_{s1} & a_{s2} \pm b_{s2} & \cdots & a_{sn} \pm b_{sn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

亦即矩阵 SC_n 的元素 $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ ，特别地当 $SA_n = SB_n$ ，则有零矩阵（元素均为 0）：

$$SC_n = SA_n - SB_n = SO_n$$

矩阵 SA_n 与常数 k 相乘，所得矩阵是 SA_n 的元素均乘以 k 即：

$$sA_{ij} = \begin{pmatrix} sA_{11} & sA_{12} & \cdots & sA_{1n} \\ sA_{21} & sA_{22} & \cdots & sA_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sA_{s1} & sA_{s2} & \cdots & sA_{sn} \end{pmatrix} \quad (6)$$

矩阵 sA_n 乘 nB_m 所得矩阵为 sC_m 矩阵，简记成：

$$sC_m = sA_n B_m = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sm} \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中元素

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \\ (i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, m)$$

例如

$${}_2A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ 与 } {}_4B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

相乘所得矩阵为：

$$\begin{aligned} {}_2C_2 = {}_2A_4 B_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由乘法定义和经过实际计算，推出矩阵乘法有下列性质：

- 1) $sA_n(nB_mC_k) = (sA_nB_m)mC_k$;
- 2) $d(sA_nB_m) = (dsA_n)nB_m$;
- 3) $(sA_n + sB_n)nC_m = sA_nC_m + sB_nC_m$;
- 4) $mC_s(sA_n + sB_n) = mC_sA_n + mC_sB_n$;
- 5) $sA_nB_s \neq nB_sA_n$.

在矩阵乘法运算，必须注意左乘矩阵 sA_n 的列数 (n) 必须等于右乘矩阵 nB_m 的行数 (n)，否则不能进行乘法运算。

矩阵 nA_n 的 P 次方定义为：

$$\underbrace{nA_n nA_n \cdots nA_n}_{P \text{ 次}} = nA_n^P \quad (\text{令 } nA_n^0 = nI_n)$$

而且有性质

$$1) \quad nA_n^P nA_n^Q = nA_n^{P+Q}$$

$$2) \quad (nA_n^P)^Q = nA_n^{PQ}$$

例如：

$$2A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A_2^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 转置矩阵 将矩阵的行列交换，所得矩阵称为 nA_n 的转置矩阵，记成为：

$$nA_n' = nA_n^s = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

特殊情况，1 行 n 列矩阵的转置矩阵为：

$$1A_n' = (a_{11} a_{12} \cdots a_{1n})' = nA_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \quad (9)$$

按定义讨论，可得下列性质：

$$1) \quad sA_n'' - (sA_n')' = sA_n;$$

$$2) \quad (sA_n + sB_n)' = sA_n' + sB_n' = nAs + nBs;$$

$$3) \quad (sA_n B_n)' = nB_n' sA_n' = sB_n A_n s.$$

如果矩阵 $sA_n' = sA_n$, 则称 sA_n 为对称矩阵。由此, 推知对称矩阵必是方阵 ($s=n$), 而且它的元素关于主对角线是相等的, 即:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

乘积, $sC_s = sA_n (sA_n')$ 也是对称矩阵。因为

$$sC_s' = (sA_n sA_n')' = (sA_n')' sA_n' = sA_n (sA_n') = sC_s$$

比如矩阵

$$2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

有

$$\begin{aligned} 2A_3 (2A_3)' &= 2A_3 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1^2+2^2+3^2 & 1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6 \\ 4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 3 & 4^2+5^2+6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4 逆矩阵 正交矩阵 如果方阵 nA_n 成立等式

$$nA_n nA_n^{-1} = nA_n^{-1} nA_n = nI_n \quad (10)$$

则称 nA_n^{-1} 为方阵 nA_n 的逆矩阵。方阵称为非异的, 是指它的行列式不等于零。所谓方阵

$$nA_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的行列式是一个数, 不是有顺序的数母列表。这个数常表示为 $\det nA_n$ 或 Δ 。

$$\det nA_n = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{N(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{N(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \quad (11)$$

其中 $N(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 表示 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 即 $1, 2, \dots, n$ 的一种排列之逆序数。比如下列的二、三阶矩阵 (方阵) 的行列式 (数) 按初等代数的对角线计算

$$\det 2A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2 \neq 0$$

$$\det 3A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = -11 \neq 0$$

因此, 方阵 $2A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $3A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

都是非异矩阵, 可以证明非异矩阵存在逆矩阵, 否则不存在, 证明过程也给出 nA_n^{-1} 的表达式。为了证明, 先选一个 nA_n 的关联矩阵

$$\tilde{nA}_n = \begin{pmatrix} A_{11} A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (12)$$

其中元素 A_{ij} 是 nA_n 的代数余子式, 它是去掉第 i 行 j 列的全部元素前上符号 $(-1)^{i+j}$ 的行列式

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (13)$$

($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) 用 Δ 除 nA_n 的每个元素, 得矩阵

$$nA_n^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{12}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{1n}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{2n}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{n1}}{\Delta} & \frac{A_{n2}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (14)$$

就是要求的逆矩阵. 经过左乘矩阵乘法运算, 可以得出:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} &= \delta_{ij} \Delta \\ \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} &= \delta_{ij} \Delta \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

利用这个性质, 可证乘积

$$\begin{aligned} nA_n A_n^* &= \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{2n}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{n1}}{\Delta} & \frac{A_{n2}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = nI_n \quad (16) \end{aligned}$$

由定义即知 $nA_n^{-1} = nA_n^*$, 若 $\Delta = 0$, 则不存在 nA_n^{-1} .

例如矩阵

$$3A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

的行列式为

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

而 $3A_3$ 的关联矩阵为

$$\tilde{3A_3} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由此得出它的逆矩阵为

$$3A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

逆矩阵具有下列性质

$$1) (3A_3 B_3)^{-1} = B_3^{-1} 3A_3^{-1}$$

$$2) (3A_3^{-1})' = (3A_3')^{-1} \quad 3) nA_n^{-P} = (nA_n^{-1})^P$$

而且对于非异矩阵 nA_n 及满秩阵 nB_m 与 mC_n ，又 $(nA_n + nB_m C_n)$ 与 $(mIm + mC_n A_n^{-1} B_m)$ 都是非异矩阵，则成立逆矩阵等式

$$(nA_n + nB_m C_n)^{-1} = nA_n^{-1} - nA_n^{-1} B_m (mIm + mC_n A_n^{-1} B_m)^{-1} mC_n A_n^{-1} \quad (7)$$

这个等式证明如下：令 $nD_n = nA_n + nB_m C_n$ ，由满秩条件 nD_n 是非异的，存在 nD_n^{-1} ，以之乘 nD_n 得出

$$nI_n = nD_n^{-1} A_n + nD_n^{-1} B_m C_n$$

用 nA_n^{-1} 乘这一表达式，得

$$nA_n^{-1} = nD_n^{-1} + nD_n^{-1} B_m C_n A_n^{-1}$$

或者

$$nD_n^{-1} B_m C_n A_n^{-1} = nA_n^{-1} - nD_n^{-1}$$

用 nB_m 右乘上式两边，得

$$\begin{aligned} nA_n^{-1} B_m &= nD_n^{-1} B_m + nD_n^{-1} B_m C_n A_n^{-1} B_m \\ &= nD_n^{-1} B_m (mIm + mC_n A_n^{-1} B_m) \end{aligned}$$

故有

$$nD_n^{-1} B_m = nA_n^{-1} B_m (mIm + mC_n A_n^{-1} B_m)^{-1}$$

用 $mCnA_n^{-1}$ 右乘上式，结果为

$$\begin{aligned} nD_n^{-1}BmCnA_n^{-1} &= nA_n^{-1} - nD_n^{-1} \\ &= nA_n^{-1}Bm(mIm + mCnA_nBm)^{-1}mCnA_n^{-1} \end{aligned}$$

代入 $nD_n = nA_n + nBmCn$ ，即可得出要证明的等式 (17) 式

对给定的实矩阵 nA_n ，若其转置矩阵 nA_n' 等于它的逆矩阵 nA_n^{-1} ，即 $nA_n' = nA_n^{-1}$ 或 $nA_n' A_n = nI_n$ ，则称 nA_n 为正交矩阵，它具有下述性质：

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

§ 3. 向量运算、垂线问题

1. 向量、向量运算 某些物理量，比如位移、速度、质量等无方向性的量叫做标量；但有方向的量，比如梯度力、空气质点的移动速度、加速度等是有方向性的，叫做向量。表示有向量，需要同时用数量（大小）和方向来表示。比如风，需要用风速和风向来表示。

由解析几何知识，对给定的两个数 (x, y) ，在平面坐标系（二维空间）中可以确定一点，与原点点的连线可以定义一个向量。一般地，对于给定 n 个数

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

在 n 维空间中定义一个 n 维向量

$$X_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中 $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ 可以看成 n 维坐标系中的坐标分量。向量 X_1 也可以看成 n 行 1 列矩阵 $n \times 1$ 。线性代数方程组的解也可以看成 n 维向量。 $n \times n$ 矩阵的每行可以看成 n 维向量，每列可以看成 n 维向量。分量为零的向量称为零向量。

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \quad (3)$$

两个向量 $X_1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})$ 和 $X_2 = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2})$ 若对应分量相等， $x_{i1} = x_{i2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，则称它们相等的向量： $X_1 = X_2$

两个向量的和定义为：

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= (x_{11} + x_{12}, x_{21} + x_{22}, \dots, x_{n1} + x_{n2}) \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} \\ x_{21} + x_{22} \\ \vdots \\ x_{n1} + x_{n2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

用数去乘分量 X_1 定义为

$$kX_1 = (kx_{11}, kx_{21}, \dots, kx_{n1}) = \begin{pmatrix} kx_{11} \\ kx_{21} \\ \vdots \\ kx_{n1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

全部 n 维向量组成的集合（集合），可以进行加法及数乘的运算，而且经过运算所得的向量仍然属于这 n 维向量的成员。这样的集合称为线性向量空间（ E_n ）

2. 向量模长与内积 向量 X_1 在向量 X_2 方向上的投影表示为向量 X_1 的模长乘以此二向量夹角 θ 的余弦。

$$\text{投影}_{X_2} X_1 = |X_1| \cos \theta$$

其中长度 $|X_1|$ 为 X_1 的 n 维空间坐标分量平方和之平方根，比如三维向量 $X_1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31})$ 的长度为 $|X_1| = \sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2}$ 两个向量的数量积（内积）是一个数，表示

为:

$$\begin{aligned}(X_1, X_2) &= |X_1| |X_2| \cos \theta \\ &= |X_1| |\text{投影 } X_1 X_2| = |X_2| |\text{投影 } X_2 X_1| \quad (6)\end{aligned}$$

而且可用分量表示内积:

$$(X_1, X_2) = X_{11}X_{21} + X_{21}X_{22} + X_{31}X_{32} \quad (7)$$

由此, 一般定义两个 n 维实数坐标向量的内积为

$$(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} \quad (8)$$

且有列性质

- 1) $(X_1, X_1) \geq 0$, 仅当 X_1 为零向量时, 等于 0;
- 2) $(X_1, X_2) = (X_2, X_1)$;
- 3) $k(X_1, X_2) = (kX_1, X_2) = (X_1, kX_2)$ k 为实数;
- 4) $(X_1 + X_2, X_3) = (X_1, X_3) + (X_2, X_3)$.

若 n 维向量空间中 n 个中的两个向量 X_1 和 X_2 的数量积等于零, $(X_1, X_2) = 0$ (9)

则称 X_1 与 X_2 是正交的。对于非零向量, 正交性意味着两向量之间的夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 就是互相垂直的意思。

向量组 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 之中任何两个向量彼此正交

$$(X_i, X_j) = 0 \quad \text{当 } i \neq j \quad (10)$$

则称为正交向量组。若向量 X_1 正交于 $X_2, \dots, X_n$, 则正交于后者的线性组合

$$X = C_2 X_2 + C_3 X_3 + \dots + C_n X_n$$

$C_i (i=2, \dots, n)$ 为常数, 也就是说 X_1 正交于由 $X_2, \dots, X_n$ 张成的空间 (至 n 维空间), 实际上, 若 $(X, X_k) = 0$ ($k=2, 3, \dots, n$), 则

$$\begin{aligned}
 (X_1, X) &= (X_1, C_2 X_2 + \dots + C_m X_m) \\
 &= \sum_{k=2}^m C_k (X_1, X_k) = 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

3 线性相关、正交基底 空间 E_n 中的向量 $X_1, X_2, \dots, X_m$ ，若存在不全为零的常数 $C_1, C_2, \dots, C_m$ ，使得

$$C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_m X_m = 0 \quad (\text{零向量}) \quad (12)$$

则称向量 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 线性相关，比如 $C_m \neq 0$ ，由上式得到

$$X_m = -\frac{C_1}{C_m} X_1 - \frac{C_2}{C_m} X_2 - \dots - \frac{C_{m-1}}{C_m} X_{m-1}$$

式中
$$Y_i = -\frac{C_i}{C_m} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

因此，对于给定的向量组是线性相关的，当且仅当其中一个是其余的线性组合。

若仅当 $C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0$ 时，组合式 (12) 才能成立，则称向量组 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 线性无关。

对给定的一组向量

$$X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

要检查是否线性相关，则由定义得出下列确定常数 $C_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 之方程组

$$\begin{cases} C_1 x_{11} + C_2 x_{12} + \dots + C_m x_{1m} = 0 \\ C_1 x_{21} + C_2 x_{22} + \dots + C_m x_{2m} = 0 \\ \vdots \\ C_1 x_{n1} + C_2 x_{n2} + \dots + C_m x_{nm} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

若这组方程有非零解 C_k ，则向量组 X_j 是线性相关的，反之，向量组 X_j 是线性无关的。用坐标列矩阵写出

子空间的基底。儿维空间中任一向量均可用基底的线性组合形式唯一地表示。即若 X 属于 E_n 而 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 为基底，

$$X = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n$$

是唯一的。

空间 E_n 中的基底 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 若是相互正交的，则称为正交基底。显然， n 维单位向量 (15) 是正交向量组。若基底向量 e_k ($k=1, 2, \dots, n$) 满足

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{当 } i=k \\ 0 & \text{当 } i \neq k \end{cases}$$

则称为正交正规化基底。任何正交基底乘以各自的长度

$$\tilde{e}_i = \frac{e_i}{\sqrt{(e_i, e_i)}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

所得的基底 $\tilde{e}_i$ 是正交正规化的。

4. 垂线问题 在 E_n 中，取一子空间 E'_k 与向量 f ，要求作出分解式

$$f = g + h$$

其中 g 属于子空间 E'_k ，向量 h 与子空间 E'_k 中的任何向量正交。 g 称为向量 f 在 E'_k 上的投影，向量 h 称为向量 f 的终点

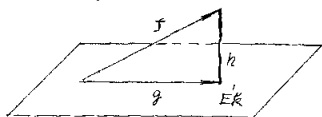


图 1. 3. 1

投影到 E'_k 的垂直向量 (图 1. 3. 1)。

为建立分解式，在 E'_k 中选取正交正规化基底 $e_1, e_2, \dots, e_k$ 并将 g 表示为

$$g = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k \quad (18)$$