解题与证题指导

中学数学教学文摘

浙江人民出版社

中学数学教学文摘

解题与证题指导

浙 江 师 范 学 院 数 学 系

《中学数学教学文摘》编辑组

浙 江 人 民 出 版 社

内 容 提 要

本书为《中学数学教学文摘》的第三册。主要介绍如何探索解（证）题的思路，常用的解（证）题方法与技巧，以及在解（证）题过程中综合应用各科知识等内容，并对学生解（证）题时易犯的一些错误做了分析。篇后还附有若干小资料，为读者提供一些数学小知识。本书主要供中学教师教学参考，也可供师范院校学生及高中学生学习。

中学数学教学文摘

解题与证题指导

*

浙江人民出版社出版

（杭州武林路196号）

浙江新华印刷厂印刷

（杭州环城北路天水桥堍）

浙江省新华书店发行

开本787×1092 1/32 印张10 字数227,000

1982年5月第一版

1982年5月第一次印刷

印数：1－28,000

统一书号：7103·1207

定 价：0.86元

前　　言

“他山之石，可以攻玉。”努力参加社会实践，取得直接经验，固然重要，虚心学习他人经验也同样不可忽视。编辑《中学数学教学文摘》，目的也是想为中学数学教师博采广纳提供一点有益的资料。

建国以来，教育事业在发展的道路上遭受过种种挫折，尤其是十年内乱，更横遭摧残。可是无数忠诚党的教育事业的教师，仍然孜孜不倦地刻苦钻研业务，披沙拣金，写下了无数理论联系实际、见地深刻的好文章。它们散见在各种报刊杂志上，至今还很少有人去注意搜集整理，使它为当前的教育服务。现今教师队伍中年轻教师和新教师大量增加，他们热情好学，进取心强，可常常苦于资料匮乏，时间不足，对于大量过去和现在发表的好文章，难以一一遍读。经过搜集、整理、浓缩以后再奉献给他们，无疑可以为他们节约很多时间和省却寻求资料的麻烦。如今经过努力，终于编成了《教师的基本功》、《复习指导》、《解题与证题指导》等三册，随后还将编辑代数、三角、几何等分科教学的经验。这些都是数学教学中经常要遇到的问题，解决得好，对提高教学质量将会有所帮助。

丛书在编辑方法上，强调精选精编的原则，一般不收录全文，采取节选、摘编或综合改写等方式，选取其精华部分，按专

题分类编辑，力求中心突出，言简意赅，尽量以有限的篇幅包含较丰富的内容。当然，限于水平，难免挂一漏万。

探索教育规律，提高教学质量，这是大家共同关心的问题。假如我们今天所做的工作能对它起到一点点促进的作用，那是我们莫大的快慰。

参加本书编选的有王岳庭、吴茹玉、商永建、刘焕岩等同志，并经朱玉同志审定。编选过程中得到本院图书馆和数学系资料室的大力支持和协助，谨在此表示衷心的感谢。

编　者

目　录

小资料

思路的探索

什么是数学问题

一、什么是数学问题

恩格斯在《反杜林论》中说："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系．"明确地指出数学要研究的是形与数的关系，详细地说，其中有数与数的关系，形与形的关系，还有数与形的关系，这就概括了两个世纪以来数学这门科学里逐渐形成的三个分支——代数、几何、分析．应当注意的是，人们虽然把数学分为这三个分支，可是它们之间还是互相渗透、互相促进的．所以，又不应该把它们绝对割裂开来，以致削弱了它们互相印证、互相启发的作用．数学上有见于此，便时常设置一些综合性的问题，要它们能照顾到两三个方面．

可能有人会认为，数学问题无非是计算性的和论证性的两种类型，的确，中学数学中所遇到的数学问题，大致都可以这样分类．然而解数学问题，主要的还是逻辑推理，加、减、乘、除是计算，可是加减乘除的方法与关系，也是推理论证得来的，只不过人们用得熟了，也就不再去追溯它的理论根据了．这里，还得再一次提醒大家，数学是研究形与数的关系的，要注意这里的"关系"两字．举例来说，$a:b=c:d$ 和 $ad=bc$ 都是数与数之间的关系，而这两个关系之间又有关系

$$a:b=c:d \Longleftrightarrow ad=bc;$$

a^2+b^2 和 $2ab$ 都是数与数之间的关系，而这两者之间又有关系

$$a^2+b^2\geqslant 2ab;$$

两三角形相似与它们的对应角相等都是形与形之间的关系，而这两者之间又有因果关系

两三角形相似⇒它们的对应角相等；

两直线平行是形与形之间的关系，斜率相等是数与数之间的关系，这两个关系之间又有关系

两直线平行⟺它们的斜率相等.

以上所举的，都是形与数之间的关系，从一个关系到另一个关系，都是根据逻辑推理论述的. 数学的内容就是由一个关系到另一个关系的推演交织而成的，所以说数学问题应该以推理为主，也就是说，解决数学问题时，主要是推理论证.

二、数学问题的结构

数学问题有两种形式. 一种是说明情况，让我们去找出某个结果（数或形），这种问题往往只给出了所求目标的大概范围，而没有明细的结果，平常所谓计算题都属于这一类. 另一种是告诉我们若干情况及在这些情况之下将要发生的结果，让我们说明结果的必然性，平常所谓证明题都属于这一类. 两种情形虽然不同，但都必须给出产生结果的原因，这就是所谓"假设条件"或"已知条件"，或"充分条件". 由假设条件到终极目标都要用逻辑推理，就是说两种问题还是有较多的共同之处，它们的区别仅仅在于目标或结论，有的结论半明半暗，有的明白肯定. 总的来看，可以说数学问题是由"原因（假设）"和"结论"组成的，原因又简称"条件".

问题中的假设条件最为重要. 要想产生所期待的结果，给出的假设条件不许多也不许少. 少了不能达到目的；多了则是浪费，更坏一点也许会发生矛盾，这都是提出数学问题时所不

允许的．解数学问题时，必须时刻注意假设条件，必须先想到每个条件可能产生什么结果，把它的效能都记得清清楚楚，等待使用．还得注意个个条件都应当用得上，如果未将条件用完，就把问题解决了，那末若不是题目出得不恰当，就一定是解答有错误．一个条件也未必仅用一次，所以在问题没有解完以前，一刻也不能放松对它们的注意．

大家知道，问题有难有易．难易之分，还在于问题的结构．所谓难题，通常有三种情形：第一是假设条件不明显；第二是假设条件与结论相距很远；第三是已知条件太多．几何题之所以难解，多数是因为题里都包含有这三种情形的原故．

三、学会解数学问题

解数学问题，就是通过逻辑推理，把问题的假设与结论沟通起来．仅有已知条件，一般不能立即得到结论，还要借助于庞大的数学知识．假设条件专对本题起作用，数学知识则可供一切问题采用，它是解一切数学问题的基础．所以在一定的意义上说，解题能力是数学知识的表现，解题能力的大小，主要取决于你所拥有的数学知识的厚薄（这里所谓“厚”包括熟练，不仅是“多”）．要想解出较难的数学题，必须精通许多数学理论．所谓“巧”往往不是大道，只是捷径，捷径不会处处有，解题技巧又是各有千秋，说也说不完的．其实，只要把基本的数学理论学通了，在平时注意磨练提高推理能力，积累解题方法，不因问题细微就轻视它，不因问题繁难就厌恶它，扎扎实实练好基本功，解题的捷径也就不难找到了．

（节选自《谈谈解答数学问题》，作者：赵慈庚）

解（证）数学题的步骤

第一步：要理解题意

所谓理解题意，就是要求能够搞清以下几点：

（1）题中什么是未知的？什么是已知的？

（2）题设条件是什么？结论（或所求）是什么？

（3）要求出未知量（或得出结论），这些条件是否够用？还是多余？或是矛盾？

（4）作出图来，采用比较方便的表示法.

（5）把题设的条件分成几个部分.

第二步：要找出已知和未知间的联系

如果不能直接找到它们之间的联系，就应该去探求辅助因素. 最后，应拟出解题计划.

拟定解题计划的思考过程应是这样的：

（1）以前是否遇到过这样的题？即使是以别的形式出现的.

（2）是否知道某一个和它密切相关的题？是否知道可能用到的一些定理？

（3）研究一下未知量（或结论），尽力回忆具有同一未知量（结论）或同类未知量（结论）的题.

（4）这个题如果和已解过的一个题类似，则能否利用它来解这个题？能否利用它的结果？能否利用解它的方法？利用这种方法可以不引入辅助元素吗？

（5）这个题可以换一种说法吗？再换一种呢？使它归结到定义上去！

（6）如果这个题解不出来，需要首先试解一个类似的题．则能否想出一个更容易些的类似的题？或更特殊的题？只保留一部分条件，而抛弃其余条件，这时足以求出一个未知量吗？可以怎样利用这个未知量？能否从所给条件推出某种有用的东西？能否找出可以确定一个未知量的其它已知条件？能否利用某个未知量或某个已知量，使新的未知量与新的已知量间的距离缩短？

（7）所有已知量都用到了吗？题的全部条件都利用了吗？题中的所有重要概念都考虑到了吗？

第三步：实现解题计划

实现计划时，应该检查每个步骤．考虑是否明确这一步是正确的？自己能否证明它是正确的？

第四步：讨论所得的解答

（1）自己能否验算结果或验证结论？

（2）可否用别的方法得出这个结果？

（3）能否把结果或方法用到其它的题上？

以上即是把解答数学题的一般过程分成四个主要的步骤：理解题意、拟定解题计划、实现解题计划和讨论所得解答．这种程序，可以防止学生产生带有普遍性的错误，可以防止学生急于计算结果，忽视研究题的细节，而不认真分析问题的条件和拟定解题计划．另外，这种程序把最后一步，即全面地、有分析地领会所得解法，作为解题工作的必要环节而确定了下来．

（节选自《数学通报》1962年第3期；原作者：Ю·М盖杜克，张立志译）

怎样探索解（证）题思路

一

Ⅰ．解题的几种思考方法

数学题的形式千变万化，若能对一般的思考途径和方法加以指导，当能减少解题的困难．下面谈谈几种常用的思考方法．

一、从一般到特殊的方法

这种方法就是把一般原理（公式、法则、定理）用到具体问题上去，进行分析、综合．运用这种方法解题的思考过程又常有三种情况：一种是从已知条件往下推演，逐步导向结果，即所谓“由因导果”；第二种是从所要求的结果逐步导向与已知条件相符合，即所谓“执果索因”；第三种是同时从两方面下手，寻找沟通它们的途径，不妨把它叫做“从两头往中间挤”．

例1 $\triangle ABC$中，$\angle A<90°$，以BC为直径画圆，并自A作圆的切线AD，在AB上取$AE=AD$，再过E作AB的垂线交AC的延长线于F（图1）．求证：$\triangle AEF$与$\triangle ABC$等积．

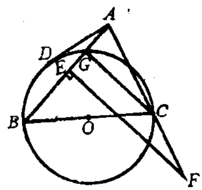

图1

证 先从已知条件出发：$\angle A<90°$，以BC为直径画圆，顶点A必在圆外．设圆和线段AB相交于G，题中给有切线AD，根据“圆幂定理”有$AD^2=AB\cdot AG$，又已知$AE=AD$，所以$AE^2=AB\cdot AG$．

再从要求的结果来想：要证$\triangle AEF$与$\triangle ABC$等积，如

果连结 CG，注意到半圆张直角，只要证明 $AE\cdot EF=AB\cdot CG$ 就行了. 这式子可以改写成比例 $\frac{EF}{CG}=\frac{AB}{AE}$，又 $CG\parallel EF$，$\frac{EF}{CG}=\frac{AE}{AG}$，因此，只要证明 $\frac{AE}{AG}=\frac{AB}{AE}$ 或 $AE^2=AB\cdot AG$ 就行，而这和前边从已知条件出发所导出的关系符合，证明的途径也就找到了.

从一般到特殊的思考方法除了上述常见的情况之外，还有一种把特殊问题一般化的处理方法，我们举一个简单的例子来说明.

例 2 计算 $\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots+\frac{99}{100!}$ 的近似值，精确到 $\frac{1}{10}$.

解 这个问题如果直接计算显然十分冗长，我们先来研究一般项 $\frac{n-1}{n!}$ $(n=3,4,\cdots,100)$，由于

$$\frac{n-1}{n!}=\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!},$$

所以，所求的和变成

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots\\&+\left(\frac{1}{99!}-\frac{1}{100!}\right)\\&=\frac{1}{2!}-\frac{1}{100!}\approx 0.5\ \left(\text{精确到}\frac{1}{10}\right).\end{aligned}$$

很明显，在解答这个问题时，我们转到了更一般的问题，即求和 $\sum\limits_{k=r}^{s}\frac{k-1}{k!}$（其中，$s>r>2$ 为自然数），并且得到了这个

一般问题的解答：

$$\sum_{k=r}^{s}\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{(r-1)!}-\frac{1}{s!}\quad(s>r>2).$$

二、从特殊到一般的方法

这种方法在探索一些新问题或较复杂问题的解答时，常常是不可缺少的，在辑逻上称它为归纳法．下面我们举例说明怎样运用归纳的思维．

例 3 设 k 是给定的正整数，问不等式

$$|x|+|y|<k$$

有多少组整数解？

解 考虑时，我们依次给 x 以整数值 0，±1，±2，…，$\pm(k-1)$，看对应地 y 可以有哪些值，列表如下：

$x=0$ 时，$y=0$，±1，…，$\pm(k-1)$，有 $2k-1$ 组；

$x=\pm1$ 时，$y=0$，±1，…，$\pm(k-2)$，有 $2(2k-3)$ 组；

$x=\pm2$ 时，$y=0$，±1，…，$\pm(k-3)$，有 $2(2k-5)$ 组；

…………………………

$x=\pm(k-1)$ 时，$y=0$，有 2×1 组．

因此，所求的整数解的组数是

$$2[1+3+\cdots+(2k-1)]-(2k-1)=2k^2-2k+1.$$

例 4 设有一凸 n 边形，在它的内部没有任何三条对角线交于一点，求它的所有对角线在它内部的交点的总数．

解 我们从特殊情况着手，依次考虑 n 为 4，5，6，7，8 的情形，画出图，使其满足在凸多边形内部没有任何三条对角线交于一点的条件，并数出它们的所有对角线在形内交点的总数，将得到下面的结果：

边　数	$n=4$	5	6	7	8
交点数	$x=1$	5	15	35	70

由此可以发现，交点数 x 可以写成一定的组合数，依次是 C_4^4，C_5^1（即 C_5^4），C_6^2（即 C_6^4），C_7^3（即 C_7^4），C_8^4，于是我们推想一般地应为 C_n^4. 其实这是对的，因为任何凸四边形对角线在形内有且只有一个交点，凸 n 边形以其 n 个顶点每次取 4 个能构成 C_n^4 个凸四边形，因而（在没有任何三条对角线在形内交于一点的假设下）就应该有 C_n^4 个交点.

这个例子告诉我们，对一般问题先考虑其特殊情况而后寻求一般的规律这种思维方法，具有十分重要的意义.

三、从反面着手的思考方法

在数学上，不仅从反面考虑的证明方法（即反证法）有极广泛的应用，而且从反面考虑的分析方法在解某些计算题时也颇为有用.

例 5 证明：64不能是几个连续正整数的和.

证 如果64能是几个连续正整数的和，比如，设

$$64=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+m) \qquad (1)$$

其中 n 和 m 都是正整数，那末

$$64=\frac{(m+1)(2n+m)}{2},$$

即有

$$(m+1)(2n+m)=2^7. \qquad (2)$$

因为 n 和 m 是正整数，所以 $(m+1)$ 和 $(2n+m)$ 都是大于 1 的正整数，并且由式(2)，它们都是 2^7 的因数，必有 $m+1=2^k$，$2n+m=2^{7-k}$，其中 k 是整数，且 $7>k\geqslant1$.

由 $m+1=2^k$ 得 $m=2^k-1$ 是奇数，于是，$2n+m$ 应为奇数，这和 $2n+m=2^{7-k}$ $(7>k\geqslant1)$ 是一个偶数相矛盾，这就证明了式(1)不能成立，也就证明了本题的论断是正确的.

很明显，把64换成 2^p（p 为任何正整数），上述证明方法