中学数学论证问答

陕西人民教育出版社

范光中编

中学数学论证问答

范光中 编

陕西人民教育出版社

中学数学论证问答

范光中　编

陕西人民教育出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　汉中地区印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张7.125　字数152,000

1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷

印数1—10,500

统一书号：7387·7　定价：1.25元

前　言

中学数学教学的任务之一，就是培养学生的逻辑思维能力，其中重要的一个方面是培养、提高学生的逻辑论证能力。当前，学生的论证能力比较薄弱，主要表现在：普遍缺乏必要的逻辑论证常识，不熟悉中学数学中常用的论证方法，一题到手不会分析甚至无从下手，有了思路不能清晰而准确地进行表达，经常发生错误的论证，等等。这些在一定程度上，影响着数学教学质量的提高。

为了有效地帮助中学生提高数学论证的能力，编者在大量翻阅有关资料的基础上，结合自己长期教学实践的经验积累，写成了本书。

本书紧密联系中学数学教学的实际，从提高学生数学论证能力的基本需要出发，既注意比较系统地介绍一些必要的逻辑论证常识和常用的数学论证方法，又着重介绍一些寻求证题途径的思路。由于中学数学中形数结合的题目越来越多，学生学会一些形数结合的基本思路和方法，对提高综合地灵活地运用知识证题的能力大有好处，因此本书专列一章加以论述。这可以说是本书的一个特点。

教学实践表明：学生在证题时，最感困难的是不会把一般论证方法运用于具体题目之中，为了帮助学生解决这一困难，本书着重通过各方面的典型例题进行分析，说明如何用一般理论解决具体问题。这对帮助学生开阔思路，增长见识

也是必要的。因此，本书既可作为中学生的课外辅导读物，也可作为中学数学教学的参考资料。

数学题（特别是综合题）千变万化，不可能有一成不变的解法。本书所讲，如果对读者有所帮助，就是编者的最大欣慰。提高数学论证能力主要靠读者勤于实践，并注意积累点滴经验，及时总结心得，天长日久，功到自成。

本书初稿由陕西师范大学李元中同志进行了审阅，并提出了许多指导性意见，谨此表示衷心地感谢。

由于编者水平所限，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

一九八四年五月

目　　录

四　同一法

五　穷举归纳法

六　数学归纳法

第一章　引　　论

一　证明的意义和结构

1.中学的数学问题大量的是哪几类？本书讨论什么？

答：我们在中学里接触到的数学问题大量的是这样两类："求解"的问题和"求证"的问题。求解的问题是由已知条件去寻求合理的结论。象计算、求值、解方程、作图题等，都属于这一类。求证的问题其条件和结论都是已知的，要通过证明确定其结论是对的或是错的，即命题是真或是假。几何、代数、三角里大量的证明题，都属于这一类。本书主要讨论后一种问题的论证方法和思考方法。

2. 什么叫做证明？

答：证明就是逻辑证明。证明这一概念（术语）在中学数学中最早出现于初中平面几何，在那里描述了"定理的证明"的意义："证明一个定理，就是从定理的题设出发，根据已经讲过的定义、公理和已经证明过的定理，推导出定理的结论。"逻辑这一概念（名词）是logic的译音，它源于希腊文logos，有"思维"及"表达思考的言辞"之意．从逻辑学的意义讲：论证就是引用其它已知的正确判断，来辨明某一判断的真实性的逻辑形式。

逻辑论证是一种思维过程。它的正确与否，要看它是否与客观现实相符合。要证实一个命题的真理性，只凭经验判

断是不行的。譬如三角形的三条高吧，人们经过实验，几乎都相信它们交于一点，这是由经验归纳而得的判断（命题）；然而图形或许偶合，画线容有弯曲，因此，非进一步作理论上的论证，不足令人信服。

数学中绝大多数命题，其真实性都要求证明。在任何一门科学理论中，都不会也不容有无根据的、不能证明的判断。经过论证，如果命题是正确的，就予以肯定；如果是不正确的，就予以否定。合乎逻辑的肯定或否定，都是正确的论证。

3. 什么是逻辑学？谁是逻辑之父？

答：逻辑学是研究人类正确思维的初步规律和形式的科学。思维的初步规律就是形式逻辑，思维的主要形式是概念、判断和推理等。这就是通常所说的逻辑学的研究对象。至于高级的思维规律就是辩证逻辑。

逻辑学是一门古老的科学。在欧洲，早在公元前四世纪的时候，希腊大哲学家亚里士多德（Aristoteles，前384—前322年）就奠定了形式逻辑的基础。他的"工具论"中就提出了著名的逻辑规律（同一律、矛盾律、排中律）和三段论式（大前提、小前提、结论）。他被尊为欧洲逻辑之父。后来，到十七世纪末，德国数学家莱布尼兹（Leibniz，G.W. 1646—1716）又增加了一条充足理由律。在中国，早在先秦时，古典的普通逻辑已经有了相当的发展。墨子（墨翟，鲁国人，约前478—前392年）的《墨辩》就是这一发展的顶峰和杰出代表。墨子的辩学和亚氏的工具论都是思维的规范。墨家的名、辞、说和现代逻辑学中的概念、判断、推理，本质上是相同的。墨家的辩学三物（故、理、类），因明的三

支（宗，因、喻）和亚氏的三段论，都属于直言推论式，不过各有其民族的特点罢了。现在研究墨学的专家，已经尊称墨子为中国逻辑之父。这就有力地批驳了解放前国内外那种“东亚向无论理学（逻辑学）”的无稽之谈。

4．形式逻辑的四条思维规律的内容和意义是什么？它们之间的关系如何？

答：同一律的形式是“甲是甲”．它的基本内容是：在进行证明和推理的过程中间，每个概念都应当在同一的意义上来使用，这个规律要求我们：每个概念应当指的是同一个对象，而且在同一时间内和同一关系下，它的意义应当是确定的、同一的。同一律是任何判断的逻辑基础，遵守它，能够保证我们的思考的确定性和精确性。这个规律的重大意义，就在这里．违反同一律的逻辑错误，也叫做概念的偷换。

矛盾律的形式是“甲不是非甲”．它的基本内容是：同一对象，在同一时间内和同一关系中，不能具有两种互相矛盾的性质．这个规律要求我们：在同一时间内和同一关系中，对于同一的对象，不能容许有互相矛盾的两种判断存在。矛盾律只指出了两个互相矛盾的判断是不能相容的，但并没有说到其中哪一个是假的；也没有说到究竟只有一个是假的呢，还是两个都是假的。“甲不是非甲”是“甲是甲”的否定形式，因此，矛盾律乃是从否定方面来加强同一律的意义。它的意义仍是在于保证我们思考的确定性。假如说同一律是一切肯定判断的逻辑基础，那末矛盾律就是否定判断的逻辑基础。违反矛盾律的要求，在逻辑上叫做前言不对后语，思想的自相矛盾。

排中律的形式是"或者是甲，或者是非甲"。它的基本内容是：同一对象在同一时间内和同一关系中，或者是具有某种性质，或者是不具有某种性质，二者必居其一，不能有第三种情形。这个规律要求我们：在同一时间内和同一关系中，对于同一对象不能允许有两种互相成为对立性或对抗性的矛盾判断存在。因为甲与非甲不仅两两对峙，各不相容，而且已经把同一对象的某种属性包罗无遗了，完全杜绝了第三种判断的可能性。因此，这两个判断中，必定一真一假，不可能同假同真。排中律不仅指出其中之一必然是错误的，而且还有更积极的意义，即指出另一个必定是正确的。所以我们说，排中律还是寻求真理的有力工具。当然两个对立性的判断究竟孰真孰假，光靠排中律是不够的。只有运用其它科学知识，具体分析各个问题的具体事实，才能得出正确的回答。

充足理由律的形式是"所以有甲，是因为有乙"。它的基本内容是：特定事物之所以具有某种性质，是因为它有着现实的根据，为一定的先行于它的条件所决定。这个规律要求我们，在进行思维的时候，必须有充分的根据，即充足的理由。否则，就会产生论据不足或思想毫无根据的逻辑错误。因此我们说，充足理由律是正确判断和正确论证的逻辑基础。可以用作判断和论证根据的充足理由有三种来源：（1）是明显的事实；（2）是公理；（3）是既得的规律、原理和学说。

同一律、矛盾律、排中律和充足理由律之间有着内在的不可分割的联系，它们从不同的方面表现着同一思维过程的各个特性。同一律是从正面，即从肯定方面来巩固概念的，

它要求思维过程必须有规定性。作为它的反证的矛盾律是从反面，即从否定方面来巩固概念或判断的。它进一步要求我们在思维中不能有矛盾的思想存在。至于排中律，则是从肯定和否定两方面来巩固判断的，它更进一步要求：或肯定、或否定，非此即彼，二者必须择一，不允许有居中的判断。最后，作为终结的定论的充足理由律，就要求对这个有规定性的、没有矛盾的论断提出证明，指出它之所以正确的充足的理由。

在任何一个思维过程中，这几种特性的表现都是显而易见的。例如，“等腰三角形的两底角相等”。如果我们肯定了这一说法，即认定等腰三角形的底角必定相等（同一律）；那末在同一意义下，就不能同时又说这两个底角不相等（矛盾律）；但如我们这样的说法被怀疑，那末，或者是两底角必相等，或者是两底角不相等，必须在这两种说法中选择其一，而不能有模棱两可的或别种居间的说法（排中律）；最后，如果我们还是坚持原来的说法——等腰三角形的两底角必定相等，那末，我们就必须举出充分的理由，或引证必要的事实作根据，来证明这一判断的正确性（充足理由律）。

5．什么是三段论法？它的依据是什么？

答：三段论法就是从两个判断（其中一个一定是全称判断*）得出第三个判断的一种推理方法。例如：凡同边数的正多边形都是相似的。

这两个正多边形的边数是相同的。

所以这两个正多边形也是相似的。

这里包含着三个判断，第一个判断提供了一般的原理原则，叫做三段论式的大前提；第二个判断指出了一个特殊场合的

情况，叫做小前提；联合这两个判断，说明一般原则和特殊情况间的联系，因而作出来的第三个判断，叫做结论。不过，在日常生活中我们很少使用三段论法的完整形式，而往往使用它的省略形式，即省去了它的某一部分（通常是省去大前提，但也有省去小前提，甚至省去结论的）。在数学中，为了叙述简便，也常常采用省略式。我们应该学会完全式和省略式的互化，这也是一个重要的逻辑技能。

三段论法是我们习惯的、自然的一种思维形式，因为它是事物的通常关系的反映。它是以下述公理为基础的：

（1）全体概括个体，即凡肯定（或否定）了某一类对象的全部，也就肯定（或否定）了这一类对象的各部分或个体。例如：如果所有平行四边形的对角线互相平分（肯定的是平行四边形的全部）是正确的，那末矩形的对角线互相平分（肯定的是平行四形边的一部分）也是正确的。

（2）属性包括属性，即事物的属性的属性，也是这事物本身的属性。仍用上例：因为对角线互相平分是平行四边形的属性，而平行四边形又是矩形的属性，所以对角线互相平分也是矩形的属性。

* 判断中的主词（主语）用S记，判断中的宾词（述语）用P记，P指S的外延，叫做判断的分量.按分量划分，判断可分为全称判断和特称判断两类。全称判断其宾词所指的为主词外延的全部，其公式为“所有S都是(或不是)P”·特称判断其宾词所指的为主词外延的一部分，其公式为“有些S是（或不是）P”。还有一种叫单称判断其主词为特定对象的单独个体，实质上属于全称判断一类的。例如：“所有的直角都是相等的”就是全称判断；“有些三角形是等腰的”就是特称判断；“祖冲之是我国古代杰出的数学家”就是单称判断。