中外数学竞赛集锦

—初中—

初　中
中外数学竞赛集锦

刘 鸿 坤　编著

辽 宁 教 育 出 版 社

1988 · 沈阳

初　　中

中外数学竞赛集锦

刘鸿坤　编著

辽宁教育出版社出版　　辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号)　　北镇县印刷厂印刷

字数：245,000　开本：787×1092　1/32　印张：11.125
印数：1—15,650

1 88年1月第1版　　1988年1月第1次印刷

责任编辑：黄晓梅　　责任校对：马　慧
封面设计：谭成荫

ISBN　7—5382—0187—4　　定价：1.80元

目　录

第一章　整数的性质

整数性质的论证是具体、严格、富有技巧的。它既易使学生接受，又是培养学生逻辑思维和推理能力的一种有效途径。因此，了解一些整数的性质以及与中学数学范围相接近的整除性问题的解法是很有必要的。

一、数的整除性概念及性质

定义　设a，b是整数，$b\neq0$。如果有一个整数q，使得$a=bq$，那么称a能被b整除，或称b整除a，并记作

$$b|a.$$

定理　如果a，b是两个整数，$b\neq0$，那么必有而且仅有两个整数q，r，可使

$$a=bq+r,\ 0\leqslant r<|b|.$$

关于整除的若干性质：

性质1　如果$a|b$，$b|c$，那么$a|c$。

性质2　如果$a|b$，那么对任意整数k有$a|kb$。

性质3　如果$a|b$，$a|c$，那么$a|b\pm c$。

性质4　如果$m|ab$，$(m,\ a)=1$，那么$m|b$。

性质5　如果$a|c$，$b|c$，且$(a,\ b)=1$，那么$ab|c$。

性质6　如果$a|m$，$b|m$，那么$[a,\ b]|m$。

上述$(m,\ a)$表示m，a两数的最大公约数。如果$(m,\ a)$

$=1$，那么称m，a两数互质；$[a, b]$表示a，b两数的最小公倍数。

此外，对于奇数和偶数的概念，用整除的术语来说，能被2整除的整数N称为偶数，不能被2整除的整数N'称为奇数。由整除的定义可知，偶数N都可以表示成$N=2n$；奇数N'都可以表示成$N'=2n+1$（n为整数）。

二、自然数整除性的某些判别法

在数的十进制中，数$N=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_110+a_0$，

其中a_0，a_1，a_2，…，a_{n-1}，a_n分别是0～9中的一个整数。

例如，$1987=1\cdot10^3+9\cdot10^2+8\cdot10+7$。

数N用记号表示，即$N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$。

被2整除的判别法：如果某自然数的最后一位数字是偶数或零，那么它就能被2整除。

被4整除的判别法：如果某自然数的最后两位数字或者都是零，或者组成被4整除的数，那么该数就能被4整除。

被8整除的判别法：如果某自然数的最后三位数字或者都是零，或者组成被8整除的数，那么该数就能被8整除。

被3整除和被9整除的判别法：如果某自然数的各位数字的和能被3整除，那么它就能被3整除。如果某自然数的各位数字的和能被9整除，那么它就能被9整除。

被5整除的判别法：如果某自然数的最后一位数字是零或5，那么它就能被5整除。

被25整除的判别法：如果某自然数的最后两位数字或者都是零，或者组成能被25整除的数，那么该数就能被25整除。

被11整除的判别法：如果某自然数的各偶数位上的数字的和或者等于各奇数位上的数字的和，或者相差一个能被11整除的数，那么它就能被11整除。

三、算术基本定理

1．分解质因数　把数n表示成若干个质数的积的形式称为分解质因数。

2．算术基本定理　每一个不等于1的自然数都可以分解为质因数的积，并且这种分解是唯一的。

3．数n的标准分解式　把数n的分解式中各个相同的质因数p_1，p_2，…，p_s并在一起，就得到了所谓数n的标准分解式：

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots\cdots p_s^{\alpha_s}$$

其中α_1，α_2，…，α_s均为自然数。

【例1】求数49896和26460的最小公倍数。

1）写出这两数的标准分解式：

$49896=2^3\cdot3^4\cdot7\cdot11$，$26460=2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7^2$；

2）上述标准式中至少有一个质因数：

2，3，5，7，11。

3）因数2在各标准分解式中的最高次幂是3；就写成2^3。因数3在各标准分解式中的最高次幂是4；就写成3^4。

类似地，因数5，7和11在各标准分解式中的最高次幂分别是1，2和1，分别写成$5^1=5$，7^2和$11^1=11$。

积$2^3\cdot3^4\cdot5\cdot7^2\cdot11=1746360$，是数49896和26460的最小公倍数。

【例 2 】求49896和26460的最大公约数。

1）写出这两数的标准分解式：

$49896=2^3\cdot3^4\cdot7\cdot11$和$26460=2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7^2$；

2）写出这两个标准分解式的公共的质因数；

2，3，7。

3）因数 2 在标准分解式中的最低次幂是 2，就写成2^2。因数 3 在标准分解式中的最低次幂是 3，就写成3^3。因数 7 在标准分解式中的最低次幂是 1，就写成$7^1=7$。

积$2^2\cdot3^3\cdot7=756$，是数49896和26460的最大公约数。

4．若有正整数$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，$\alpha_i>0$，$i=1$，2，…，$s$，那么$n$的正因数（约数）的个数为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)。$$

其中包括1与n本身。

5．解一些整除问题时常用的两个因式分解公式。

对于任意自然数n，有

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})。$$

对于奇数n，有

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+(-1)^{n-1}b^{n-1})。$$

四、二元一次不定方程的整数解

定理　设二元一次不定方程

$$ax+by=c \qquad *$$

（其中a，b，c都是正整数，而$(a, b)=1$）有一组整数解$x=x_0$，$y=y_0$，则（ * ）式的一切整数解可以表示成

$$\begin{cases}x=x_0-bt\\y=y_0+at\end{cases}$$

其中$t=0$，±1，±2，±3，…。

五、函数〔x〕

定义　对于任意实数x，$[x]$为不大于x的最大整数。

例如　$[2]=2$，　$[\sqrt{2}]=1$，　$[\pi]=3$，　$[\frac{1}{2}]=0$，$[-\pi]=-4$。

$[x]$的基本性质：$x-1<[x]\leqslant x$。

选　择　题

1．满足条件"它的七倍小于一百"的最大整数是

(A) 12；　(B) 13；　(C) 14；　(D) 15。

2．任何大于7的偶整数可以恰好写为两个不同质数之和，用这种方法表示偶数126，两个质数之间最大的差是

(A) 88；　(B) 92；　(C) 100；　(D) 112。

3．可除尽$3^{11}+5^{13}$的最小质数是

(A) 2；　(B) 3；　(C) 5；　(D) 不同于(A)～(C)的答案。

4．在以十进位表示的数中，找出个位数和百位数互换时，该数不变的最大的偶三位数。这个偶三位数的数字之和是

(A) 22；　(B) 23；　(C) 24；　(D) 25。

5．设N为一整数，使$1260x=N^3$的最小正整数x为

(A) 1050；　(B) 1260；　(C) 1260^2；　(D) 7350。

6．若6432与132的最大公约数减去8，则它将等于

(A) -6； (B) -2； (C) 3； (D) 4。

7．设P是任意三个相邻正奇数的乘积，则能整除所有这样的P的最大整数是

(A) 3； (B) 5； (C) 6； (D) 15。

8．设三位数$2a3$加上326得另一个三位数$5b9$，若$5b9$为9所整除，则$a+b$等于

(A) 4； (B) 6； (C) 8； (D) 9。

9．如果$p\geqslant5$是一个质数，那么24整除P^2-1

(A) 总是可能； (B) 只是有时可能；

(C) 不可能； (D) 只是当$P=5$时可能。

10．$(30)^4$的相异正整除数，除去1和$(30)^4$以外，有多少个?

(A) 30； (B) 100； (C) 123； (D) 125。

11．在前一百个正整数（即1～100）中，有多少个数可被2，3，4，5这四个数都能整除?

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3。

12．不论n的整数值如何?可整除n^3-n的最大数是

(A) 3； (B) 4； (C) 5； (D) 6。

13．六位数由三位数重复而得，如256256，或678678等等，此型的任何数恰可被何数整除?

(A) 只有11； (B) 只有13； (C) 101；

(D) 1001。

14．若n为任何整数，$n^2(n^2-1)$被x整除，则x等于

(A) 12； (B) 24； (C) 12的任何倍数； (D) $12-n$。

15．若2137^{753}展开后，个位数字为

(A) 3； (B) 5； (C) 7； (D) 9。

16. $3^{1001}\cdot7^{1002}\cdot13^{1003}$的个位数是

(*A*) 1; (*B*) 5; (*C*) 9; (*D*) 不同于 (*A*) ～ (*C*) 的答案。

17. 某两位数N，减去其数字互换位置后的数，所得结果为完全正立方数，则

(*A*) N不存在； (*B*) N恰有7个值；

(*C*) N不可以5为结尾； (*D*) 除5外，N可为任何数字来结尾。

18. 2^{1000}被13除后，所得的余数是

(*A*) 2; (*B*) 3; (*C*) 7; (*D*) 11。

19. 把1059、1417和2312每个数各除以d，若余数都是r，其中d是大于1的整数，那么$d-r$等于

(*A*) 15; (*B*) 179; (*C*) $d-1$; (*D*) $d-15$。

20. 一数被10所除，余9；被9所除，余8；被8所除，余7；等等直至，被2所除，余1，此数为

(*A*) 419; (*B*) 1259; (*C*) 2519; (*D*) 不同于 (*A*) ～ (*C*) 的答案。

21. 当P除以D时，商为Q，余数为R；当Q除以D'时，商为Q'，余数为R'，则当P除以DD'时，其余数为

(*A*) $R+R'D$; (*B*) $R'+RD$; (*C*) RR'; (*D*) R。

22. 当自然数P和P'（其中$P>P'$）被自然数D除时，余数分别是R和R'。当PP'和RR'被D除时，余数分别为r和r'，那么

(*A*) r永远大于r'; (*B*) r永远小于r';

(*C*) r恒等于r'; (*D*) r有时大于r'，r有时小于r'。

23. 当一正整数x被一正整数y除时，得商为μ，余数为ν，其中μ，ν为整数。当$x+2\mu y$被y除时，余数为

(A) 0； (B) v； (C) 2μ； (D) 3μ。

24. 小于1000而不能被5及7所除尽的正整数的个数为

(A) 630； (B) 658； (C) 684； (D) 686。

25. 某城市的人口在某时为一完全平方数，稍后增加100，人口比一完全平方数要多1. 现在，再增加100，人口再度为一完全平方数，原来人口是下列哪个数的倍数？

(A) 7； (B) 9； (C) 11； (D) 17。

26. 若一整数为两位数，等于其数字和的k倍，现互换其数字的位置，则此新数为其数字和的

(A) $(k-1)$倍； (B) $(9-k)$倍； (C) $(10-k)$倍； (D) $(11-k)$倍。

27. 已知三正整数a，b，c，它们的最大公因数是D，最小公倍数是M，下列叙述中哪两个是正确的？

（1）积MD不小于abc；

（2）积MD不大于abc；

（3）当且仅当a，b，c各为质数，MD等于abc；

（4）当且仅当a，b，c两两互质，MD等于abc。

(A) 1，2； (B) 1，3； (C) 1，4； (D) 2，4。

28. 设$D=a^2+b^2+c^2$，其中a，b是相邻的整数，且$c=ab$，则$\sqrt{D}$为

(A) 总是偶数； (B) 有时是奇数；

(C) 总是奇数； (D) 有时是有理数。

29. 若p为正整数，则$\dfrac{3p+25}{2p-5}$可能为正整数，当且仅当p为

(A) 至少3； (B) 至少3且不多于35；

(C) 不多于35； (D) 等于35。

30. 若$4x^2-6x+m$被$x-3$整除，则m值恰为

(*A*) 12的因数；(*B*) 20的因数；

(*C*) 36的因数；(*D*) 48的因数。

31. 将10元纸币兑换成一角硬币与二角五分硬币，则兑换有两种硬币的不同方法总数为

(*A*) 19；(*B*) 20；(*C*) 21；(*D*) 38.

32. 有多少对整数(x, y)满足方程$x+y=xy$？

(*A*) 1；(*B*) 2；(*C*) 3；(*D*) 大于3.

33. 一梯形田园面积为1400平方米，高为50米，若两底的米数为整数且可被8整除，求两底。此问题解的组数为

(*A*) 1；(*B*) 2；(*C*) 3；(*D*) 多于3.

34. $2x+3y=763$的正整数解共有几组？

(*A*) 127；(*B*) 128；(*C*) 254；(*D*) 255.

35. 设n是满足下列条件的最小整数：n大于1，且没有小于10的质因子，又不是质数，则

(*A*) $110<n\leqslant120$；(*B*) $120<n\leqslant130$；

(*C*) $130<n\leqslant140$；(*D*) $140<n\leqslant150$.

36. 满足联立方程

$$\begin{cases} ab+bc=44 \\ ac+bc=23 \end{cases}$$

的正整数组(a, b, c)的数组是

(*A*) 0；(*B*) 1；(*C*) 2；(*D*) 3.

37. 满足$0<x<y$及$\sqrt{1984}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$的不同整数对$(x, y)$的个数是

(*A*) 1；(*B*) 3；(*C*) 4；(*D*) 7.

38. 求使得$\dfrac{n-13}{5n+6}$是一个非零的可约分数的最小正整

数n是

(A) 68； (B) 155； (C) 226； (D) 不同于(A)～(C)的答案。

39. 小于或等于x的最大整数与大于或等于x的最小整数之和是5，x解的范围是

(A) $2\leqslant x\leqslant 3$； (B) $2<x<3$；

(C) $2\leqslant x<3$； (D) $2<x\leqslant 3$。

40. 令$x=0.123456789101112\cdots998999$，其中的数字是由依次写下整数1至999得到的，小数点右边第1987位数字是

(A) 6； (B) 7； (C) 8； (D) 9。

答　案

1. C	11. B	21. A	31. A
2. C	12. D	22. C	32. B
3. A	13. D	23. B	33. C
4. D	14. A	24. D	34. A
5. D	15. C	25. A	35. B
6. D	16. C	26. D	36. C
7. A	17. B	27. D	37. B
8. B	18. B	28. C	38. D
9. A	19. A	29. B	39. B
10. C	20. C	30. C	40. A

详　解

2. 要使两个质数之和等于126，且此两个质数之间的

差为最大，只须将其中一个质数取得尽可能小就行了。

13是使$126-p$也是质数的最小质数，且最大的差是$113-13=100$。

3．因为3^{11}和5^{13}都是奇数，它们的和必定是偶数。所以（A）正确。

5．$1260x=(2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7)x$，

仅当各相异质因数的指数为3时，上式可为一立方数。

由此　　$x=2\cdot3\cdot5^2\cdot7^2=7350$，

即可使$1260x=N^3$的最小正整数。

6．$\because$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 6\ 4\ 3\ 2 \\ \hline 4 & 8\ 0\ 4 \\ \hline 3 & 2\ 0\ 1 \\ \hline & 6\ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 1\ 3\ 2 \\ \hline 2 & 6\ 6 \\ \hline 3 & 3\ 3 \\ \hline & 1\ 1 \end{array}$$

$\therefore\quad 6432=2^5\cdot3\cdot67$；$132=2^2\cdot3\cdot11$。

因此，6432与132的最大公约数为$2^2\cdot3=12$。

$\therefore\quad 12-8=4$。

7．设所求的乘积p可以写成

$$p=(2k-1)(2k+1)(2k+3)\qquad(*)$$

式中k是任意正整数，且k具有下述三种可能性：

（1）被3整除，即$k=3m$，m是整数；

（2）被3除，余数是1，即$k=3m+1$；

（3）被3除，余数是2，即$k=3m+2$。

当$k=3m$时，（$*$）式中最后的因子被3整除；

当$k=3m+1$时，（$*$）式中第二个因子$2k+1=2(3m+1)+1=6m+3$被3整除；

当$k=3m+2$时，（$*$）式中第一个因子$2k-1=2(3m

$+2)-1=6m+3$被3整除。

综上所述，在任何的情况下，p都能被3整除。

为了证明没有较大的整数整除所有如此的p，取$p_1=1\cdot3\cdot5$，$p_2=7\cdot9\cdot11$，注意到3是p_1，p_2的最大公因数。所以(A)正确。

8．因$5b9$可被9整除，而$0\leqslant b\leqslant9$，

$$\frac{5b9}{9}=10\frac{50+b}{9}+1$$

是一整数，所以$\frac{50+b}{9}$必定是整数。所以$b=4$。

因为　$2a3=5b9-326=549-326=223$，

所以　$a=2$，$a+b=2+4=6$。

9．∵　$p^2-1=(p-1)(p+1)$是连续的偶整数，两个因式都可被2整除，且其中之一也可被4整除。

∴　p^2-1可被8整除。

∵　$(p-1)$，p和$(p+1)$是三个连续整数，所以它们中的一个（但不是质数$p\geqslant5$）可被3整除。

因此　p^2-1恒可被3和8整除，因为3与8互质，所以p^2-1被24整除。

10．∵　$(30)^4=2^4\cdot3^4\cdot5^4$。

∴　$(30)^4$的相异的除数（即约数）个数有

$$(4+1)(4+1)(4+1)=125.$$

除去1和$(30)^4$以外有123个除数。

11．【解法一】5，10，15，…，100这些数字是100以内仅仅能被5整除的正整数。其中只有20，40，60，80和100还能被4整除。在最后这一组数字中，只有60能被3整除，也能被2整除。

【解法二】　因2，3，4，5的最小公倍数是60，所以能被2，3，4，5都整除的数一定是60的倍数，因此

(*B*) 正确。

13. 设这六位数中重复的三位数为β，则六位数可表示成

$$1000\beta+\beta=\beta(1001)$$

如 $256256=1000\times256+256=256(1001)$。
由此可见，此型的任何数可被1001整除。

14. 取$n=2$时，$n^2(n^2-1)=12$。可见（B），（C），（D）均不成立，所以（A）正确。

15. 设N的个位数为$u(N)$，现考察$(2137)^n$的个位数，则

当$n=0$时，$u[(2137)^0]=1$；当$n=1$时，$u[(2137)^1]=7$；
当$n=2$时，$u[(2137)^2]=9$；当$n=3$时，$u[(2137)^3]=3$。
对于$n>3$的值，这些数字将每四个循环重复一次。

$$\therefore (2137)^{753}=(2137)^{4\times188+1}=[(2137)^4]^{188}\cdot(2137)^1$$

而 $u[(2137)^4]^{188}=1$，$u[(2137)^1]=7$。

因此 $u[(2137)^{753}]=1\times7=7$。

16. 【解法一】对于$7\times13=91$或者$3^4=81$的任何幂有一个1的个位数，于是

$$3^{1001}\cdot7^{1002}\cdot13^{1003}=3\cdot(81)^{250}\cdot7^{1002}\cdot13^{1002}\cdot13$$
$$=3\cdot13\cdot(81)^{250}\cdot91^{1002}.$$

显然，个位数是9。

【解法二】考察3^n，7^n，13^n的个位数：

当$n=1$时，$u(3)=3$，$u(7)=7$，$u(13)=3$；
当$n=2$时，$u(3^2)=9$，$u(7^2)=9$，$u(13^2)=9$；
当$n=3$时，$u(3^3)=7$，$u(7^3)=3$，$u(13^3)=7$；
当$n=4$时，$u(3^4)=1$，$u(7^4)=1$，$u(13^4)=1$。
可见，对于$n>4$的值，这些数字将每四个循环重复一次。
如果幂是4的倍数，那么个位数是1。