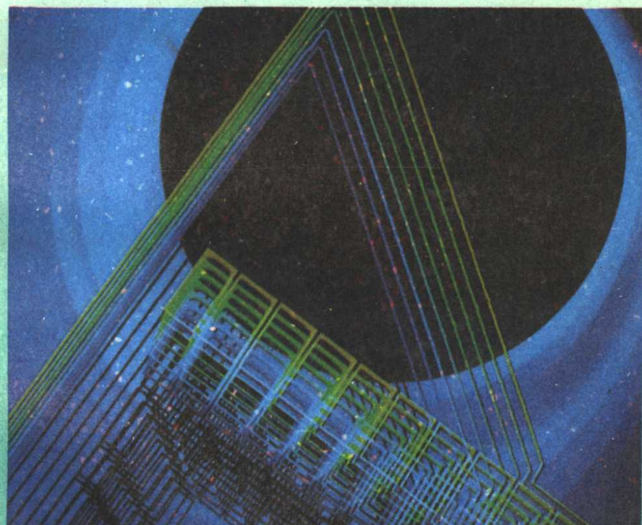
全国百所重点中学
初中数学同步辅导精编
（初二代数下册）



宁夏人民出版社

全国百所重点中学

初中数学同步辅导精编

（初二代数下册）

宁夏人民出版社

（宁）新登字 01 号

责任编辑　龚　俊
特邀编辑　陈吉平

全国百所重点中学
初中数学同步辅导精编
（初二代数下册）

出版发行：宁夏人民出版社
（银川市解放西街 105 号）
经销：新华书店北京发行所
印刷：通县觅子店印刷厂印刷
（地址：北京通县觅子店乡大柳树村北）

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 7　字数 157,000
1993 年 1 月 第 1 版　　1993 年 1 月第 1 次印刷
印数 1—10000册

ISBN 7-227-00811-8

J·181　　定价：2.60 元

全国百所重点中学

语文、数学同步辅导精编

丛书编委会

前　言

为了帮助广大初中学生学好数学，也为广大教师提供有益的参考资料，我们编写了这套丛书。

本丛书根据初中数学教学大纲，紧扣教材，按现行课本章节顺序编写而成。以配合教学进程，注重平时学习打好基础，发展智力，提高数学素质为宗旨。

本丛书在编排上进行了新的探索，结构新颖。各册均以课本自然节为编写单位，每节都精心设计了实用、齐全、合理的栏目，设“知识要点”、“准备练习”、“例题分析”、“典型题解”、“数学病院”、“习题精编”等，通过栏目进行辅导，使读者犹如面对着循循善诱的老师的指点，格外有效。

“习题精编”分成三个层次：(A)组是基本练习题，(B)组是简单综合题，(C)组是较难的思考题。

相连的若干小节构成知识单元，每单元设“单元小结”和45分钟训练的“单元测试题”两个栏目。

在每一章结束前，再设“归纳提炼”和供复习全章的120分钟训练的“综合测试题”，题型多样，有梯度，有层次。

在全书的最后给出了习题的答案与提示。

本丛书将同步辅导与习题精编融为一体，构成了它的特色。

本丛书由杨浩清老师任主编。参加编写工作的老师有王正林、程志、陆月明、郭长风、王刻铭、嵇国平、周敏泽等。本册由陆月明执笔编写。

欢迎读者对书中的不足之处提出批评、建议，以便再版时修订。

编　者

1992年9月

目　录

第十一章　一元二次方程…………………………… 1

二　一元二次方程的根与系数的关系………………… 1

11.5 一元二次方程的根与系数的关系 ………………… 1

11.6 二次三项式的因式分解 ………………………… 30

单元小结与测试……………………………………… 41

三　可化为一元二次方程的方程……………………… 44

11.7 简单的高次方程 ………………………………… 44

11.8 分式方程 ………………………………………… 53

11.9 无理方程 ………………………………………… 74

单元小结与测试……………………………………… 90

四　简单的二元二次方程组…………………………… 93

11.10 二元二次方程和二元二次方程组 ……………… 93

11.11 由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组 ………………………………………… 95

11.12 由两个二元二次方程组成的方程组 …………… 110

单元小结与测试……………………………………… 131

本章复习与测试……………………………………… 136

第十二章　指数……………………………………… 142

12.1 零指数与负整数指数 …………………………… 142

12.2 分数指数 ………………………………………… 166

本章复习与测试……………………………………… 190

习题答案与提示……………………………………… 194

第十一章　一元二次方程

二　一元二次方程的根与系数的关系

11.5　一元二次方程的根与系数的关系

【知识要点】

1. 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的两根是 x_1, x_2,那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

这就是说,一元二次方程的两根和,等于一次项系数除以二次项系数所得商的相反数;两根的积,等于它的常数项除以二次项系数所得的商。

根与系数的这种关系也叫做韦达定理。

对于简化的一元二次方程 $x^2+px+q=0$,则有

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1\cdot x_2=q.$$

2 韦达定理的逆定理。如果 x_1,x_2 满足关系 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$,那么 x_1, x_2 为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$的两个根。

或者说,以 x_1, x_2 两数为根的一元二次方程是

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

3. 应用韦达定理及其逆定理,可以不经过解方程来解答一元二次方程中有关根与系数的一些问题。

【准备练习】

1.(1) 解方程 $x^2-3x-4=0$，得 $x_1=$____，$x_2=$____；计算 $x_1+x_2=$____，$x_1\cdot x_2=$____；方程中一次项系数的相反数是____，常数项是____。

(2) 解方程 $2x^2-5x+1=0$，得 $x_1=$____，$x_2=$____；计算 $x_1+x_2=$____，$x_1\cdot x_2=$____；方程中一次项系数除以二次项系数的商的相反数 $-\dfrac{b}{a}=$____，常数项除以二次项系数的商 $\dfrac{c}{a}=$____。

2.(1) 方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $a\neq0$，$\Delta=b^2-4ac\geqslant0$ 时，它的两根 $x_{1,2}=$________，计算 $x_1+x_2=$____，$x_1\cdot x_2=$____。

(2) 方程 $x^2+px+q=0$，当 $p^2-4q\geqslant0$ 时，它的两根 $x_{1,2}=$______；计算 $x_1+x_2=$____，$x_1\cdot x_2=$____。

3.(1) 方程 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 的两根是 $x_1=$____，$x_2=$____。

(2) 方程 $x_2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$ 的两根是__________。

4.(1) 用 $a+b$ 与 ab 的代数式表示下列各式(例如 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$)。 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=$______；$a^3b+ab^3=$______；$(a-b)^2=$______。

(2) 已知 $a+b=1$，$ab=-1$，不求 a，b 的值，计算 $a^2+b^2=$______，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=$________；$a^3b+ab^3=$________，$(a-b)^2=$______。

【例题分析】

例 1　已知方程 $x^2-4x+1=0$ 的一个根是 $2+\sqrt{3}$，求它的另一个根。

解：设另一个根为 x_1，那么

$$x_1(2+\sqrt{3})=1,$$

$$\therefore\ x_1=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

说明：(1) 本题也可以用 $x_1+(2+\sqrt{3})=4$ 得 $x_1=2-\sqrt{3}$。

(2) 已知一元二次方程的一个根，求另一个根，只要把已知根代入韦达定理中两根和的关系式或两根积的关系式，就可以求得另一个根。

例 2　设 x_1，x_2 是方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两根，不解方程，求下列各式的值。

(1) $x_1^3x_2+x_1x_2^3$；　　(2) $\dfrac{x_2}{x_1+1}+\dfrac{x_1}{x_2+1}$。

解：$\because$ x_1，x_2 是方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两根，由韦达定理得

$$x_1+x_2=-\frac{3}{2},\qquad x_1x_2=-\frac{1}{2}.$$

(1) $$\begin{aligned}x_1^3x_2+x_1x_2^3&=x_1x_2(x_1^2+x_2^2)\\&=x_1x_2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]\\&=-\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\\&=-\frac{13}{8};\end{aligned}$$

(2) $\frac{x_2}{x_1+1}+\frac{x_1}{x_2+1}=\frac{x_2^2+x_2+x_1^2+x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$$=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(x_1+x_2)}{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}$$

$$=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)+1}$$

$$=-\frac{7}{4}.$$

说明：(1) 只含有两个字母 a, b 的代数式，如果交换 a 和 b,所得代数式与原代数式恒等，那么称原代数式为关于 a, b 的对称式。例如 $a+b$, ab, a^2+b^2, a^n+b^n, $(a-b)^2$, $(a-b)^{2n}$, $|a-b|$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\frac{b+1}{a}+\frac{a+1}{b}$等，都是关于字母 a, b 的对称式。

(2) 已知一元二次方程，不解这个方程，求关于它的两个根的对称式的值：先经过恒等变形，把关于 x_1, x_2 的对称式变成只含有 x_1+x_2 和 x_1x_2 的形式，再应用韦达定理，把 x_1+x_2, x_1x_2 的值代入，就可以求出结果。

例 3 设 x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的两个不相等的实数根，求证$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$。其中$\Delta=b^2-4ac$。

证明：$\because$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2,所以

$$\Delta=b^2-4ac>0.$$

根据韦达定理，得

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

$$\therefore\ (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{a^2},$$

由于 $a>0$, $\Delta=b^2-4ac>0$,

$$\therefore\ |x_1-x_2|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$

例 4 k 为何值时，方程 $x^2-(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实根：(1)互为相反数？(2)互为倒数？

解：方程 $x^2-(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实根，

$\therefore\ \Delta=[-(2k-1)]^2-4(k^2-1)=-4k+5\geqslant0$,

即 $$k\leqslant\frac{5}{4}.$$

设两实根为 x_1, x_2,

(1) 若两根互为相反数，则

$$x_1+x_2=-(2k-1)=0,$$

$\therefore$ $$k=\frac{1}{2}.$$

(2) 若两根互为倒数，则

$$x_1\cdot x_2=k^2-1=1,$$

解得 $$k=\pm\sqrt{2}.$$

其中 $k=\sqrt{2}$ 不符合方程有实根的条件，舍去，$\therefore k=-\sqrt{2}$.

答：①当 $k=\frac{1}{2}$ 时，方程的两根互为相反数；②当 $k=-\sqrt{2}$ 时，方程的两根互为倒数。

说明：方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$的两根互为相反数时，必有 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=0$，即 $b=0$；两根互为倒数时，必有 $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=1$，即 $a=c$。

目前，我们只讨论方程的实数根，所以不能忘了方程有实根的条件 $\Delta\geqslant0$。

例 5　当 m 为何值时，方程

$$2x^2+(2m-1)x+\frac{m^2}{2}-6=0$$

的两个实根的平方和等于 $6\dfrac{1}{4}$？

解：设方程的两实根为 x_1，x_2，则

$$\begin{cases}\Delta=(2m-1)^2-4\times2\times\left(\dfrac{m^2}{2}-6\right)\geqslant0, & (1)\\ x_1+x_2=-\dfrac{2m-1}{2}, & (2)\\ x_1x_2=\dfrac{m^2-12}{4}, & (3)\\ x_1^2+x_2^2=\dfrac{25}{4}. & (4)\end{cases}$$

由(1)得　　$m\leqslant\dfrac{49}{4}$。

$$\because\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1^2+x_2^2,$$

把(2)，(3)，(4)代入上式，得

$$\left(-\frac{2m-1}{2}\right)^2-2\times\frac{m^2-12}{4}=\frac{25}{4},$$

整理得　　$2m^2-4m=0$，

解得 $m=0$ 或 $m=2$ 均适合条件(1)。

答：当 $m=0$ 或 $m=2$ 时，两实根的平方和等于 $6\frac{1}{4}$。

说明：给出一元二次方程的根满足某种条件来确定方程中的字母系数：根据韦达定理，列出方程的根与系数的两个关系式，再由题中给出的两根所满足的条件，得到关于两根 x_1，x_2 和字母系数的方程组，消去 x_1, x_2，即求得字母系数的值。

例 6　求作一元二次方程，使它的两根是

(1) $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{3}$；　　　$3+\sqrt{5}$ 和 $3-\sqrt{5}$。

解：设所求的一元二次方程为

$$x^2+px+q=0,$$

则 (1) $p=-(x_1+x_2)=-\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{6}$,

$$q=x_1x_2=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}.$$

∴ 以 $-\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$ 为根的一元二次方程为

$$x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0,$$

即

$$6x^2-x-2=0.$$

(2) $p=-[(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})]=-6$,

$$q=(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=4.$$

∴ 以 $3+\sqrt{5}$，$3-\sqrt{5}$ 为根的一元二次方程是

$$x^2-6x+4=0.$$

说明：已知一个方程的两根，求作这个方程：根据韦达

定理的逆定理，把已知两根的和的相反数 $-(x_1+x_2)$ 作所求方程的一次项系数，两根积 $x_1\cdot x_2$ 作常数项，而把二次项系数作为 1，这样得出所求方程为 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$。

例 7 已知 $\alpha^2+\beta^2=3$，$\alpha+\beta=-1$，求作以 α，β 为根的一元二次方程。

解：$\because$ $\alpha^2+\beta^2=3$，$\alpha+\beta=-1$，

$$\therefore\ \alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)}{2}=\frac{(-1)^2-3}{2}=-1,$$

因此，以 α，β 为根的一元二次方程是

$$x^2+x-1=0.$$

例 8 已知两数的和等于 $\sqrt{3}$，积等于 $\frac{1}{2}$，求这两个数。

解：因为两数的和是 $\sqrt{3}$，积是 $\frac{1}{2}$，所以这两个数是方程

$$x^2-\sqrt{3}x+\frac{1}{2}=0$$

的两个根，解此方程，得

$$x=\frac{\sqrt{3}\pm1}{2},$$

因此这两数为 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$。

说明：已知两个数的和与积，求这两个数：根据韦达定理的逆定理，构造一个以这两个数为根的一元二次方程，然后解这个一元二次方程，方程的两个根就是所求的两个数。

例 9 已知方程 $2x^2+6x+3=0$，利用根与系数的关系，求作一个一元二次方程，使它的根是原方程各根的绝对值的倒数。

解：设方程 $2x^2+6x+3=0$ 的两根是 x_1，x_2，那么，所求方程的两根是 $\frac{1}{|x_1|}$，$\frac{1}{|x_2|}$。

根据韦达定理，得

$$x_1+x_2=-\frac{6}{2}=-3<0,\quad x_1x_2=\frac{3}{2}>0,$$

$\therefore$ x_1，x_2 同号且均为负数，那么

$$\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}=\frac{|x_2|+|x_1|}{|x_1|\cdot|x_2|}=\frac{-(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{-(-3)}{\frac{3}{2}}$$

$$=2,$$

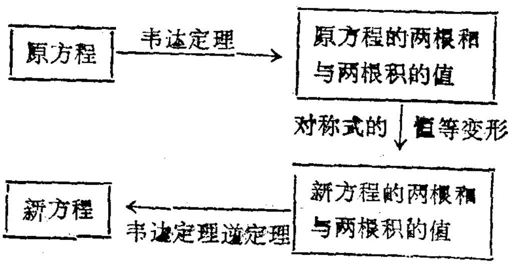
$$\frac{1}{|x_1|}\cdot\frac{1}{|x_2|}=\frac{1}{|x_1|\cdot|x_2|}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

根据韦达定理逆定理，得所求方程为

$$y^2-2y+\frac{2}{3}=0,$$

即 $3y^2-6y+2=0$。

说明：已知一个一元二次方程，不解这个方程，求作另一个一元二次方程，使它的根与原方程的根具有某种给定的关系，可参照下列步骤：



【典型题解】

题 1 已知关于 x 的方程

$$(m+1)x^2-(4m-1)x+m=0 \quad (m\neq -1)$$

的一个根是 2，求另一个根及 m 的值。

解：设另一根为 x_1，根据韦达定理，得

$$\begin{cases} x_1+2=\dfrac{4m-1}{m+1}, & (1) \\ 2x_1=\dfrac{m}{m+1}, & (2) \end{cases}$$

消去 x_1，得

$$\frac{4m-1}{m+1}-2=\frac{m}{2(m+1)},$$

解这个关于 m 的方程，得

$$m=2,$$

代入(2)，得

$$x_1=\frac{1}{3}.$$

所以，另一个根是 $\dfrac{1}{3}$，m 的值等于 2。

题 2 当 m 为何值时，方程

$$x^2+2(m-1)x+m^2-9=0$$

有：(1) 两个正根？(2) 两个负根？(3) 一个正根和一个负根，且负根的绝对值较大？

解：设方程有两个实根 x_1，x_2，那么

$$\Delta=[2(m-1)]^2-4(m^2-9)=-8m+40=-8(m-5),$$

$$x_2+x_2=-2(m-1),$$

$$x_1x_2=m^2-9.$$