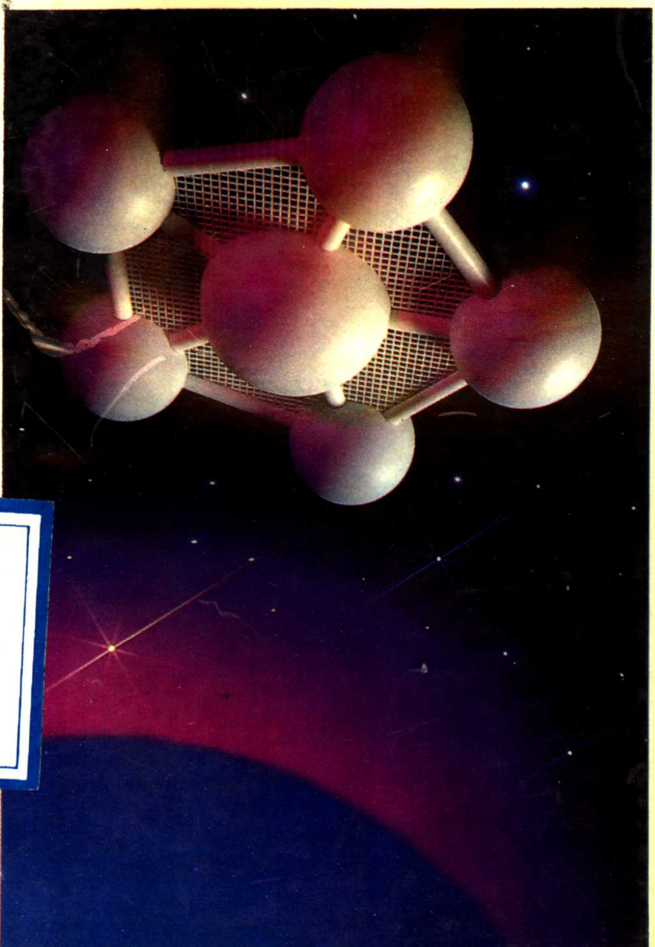
波利亚计数定理

POLYA'S ENUMERATION THEOREM

走向数学丛书

（香港）萧文强 著



走向数学丛书

波利亚计数定理

萧文强 著

湖南教育出版社

波利亚计数定理

PólyA's Enumeration Theorem

萧 文 强 著

Siu Man-Keung

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷三厂印刷

787×1092 毫米 32 开 印张：4.125 字数：90,000

1991 年 12 月第 1 版，1991 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—1000

ISBN7—5355—1380—8／G · 1375

定 价：2.35元

作者简介

萧文强，生于1944年。1966年获香港大学理学士，1967年赴美国攻读数学，1972年获美国哥伦比亚大学博士，旋任教于美国迈亚密大学。1975年回香港大学任教至今，现为香港大学数学系高级讲师。研究方向为代数、组合数学、数学发展史及数学教育，在这几方面发表了论文40余篇；普及数学方面有作品十余篇；著书有《为什么要学习数学：数学发展史给我们的启发》（1978年）、《概率万花筒》（与林建合著，1982年）、《数学证明》（1990年）、《1、2、3……以外》（1990）。培养硕士研究生六人，博士研究生一人。1981年因制作普及数学幻灯片（与丁南侨）获颁英联邦科学数学教育工作者协会奖状。

《走向数学》丛书编委会

"走向数学"丛書

陳省身題

数学天元基金

本丛书得到国家自然科学基金委员会
数学天元基金的资助

前 言

王 元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学。一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三、四年有数学课。可见数学之重要与其应用之广泛。

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏。我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的。近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握。我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质。显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到。若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解。这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面，使工程技术人员，非数学专业

的大学生，甚至具有中学数学水平的人，亦能懂得书中全部或部分含义与内容。这对提高我国人民的数学修养与水平，可能会起些作用。显然，要将一门数学深入浅出地讲出来，决非易事。首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解。从整体上说，我国的数学水平还不高，能否较好地完成这一任务还难说。但我了解很多数学家的积极性很高，他们愿意为“走向数学”撰稿。这很值得高兴与欢迎。

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持，得以出版这套“走向数学”丛书，谨致以感谢。

序　言

一本书的序言，通常是读者最先看却是作者最后写的一段！写毕全书，松一口气，我才下笔写这篇序言，所以我可以告诉读者，你将会在这本小书里碰到什么。

书的题目已经说明了书的内容，就是介绍波利亚(Pólya)计数定理和它的应用。波利亚计数定理是枚举某些有限构形个数的一件重要的基本工具，它计算了一个置换群作用在一个集合上产生的等价类的个数。由于很多计数问题都能纳入这个表述架构，波利亚计数定理的应用非常广泛。就数学内容而言，这条定理结合了群、母函数、权的概念，构思优美。本书并没有假定读者具备这三个概念的知识，第 2 章逐步引入群的概念，并通过众多例子阐述群的基本性质。第 3 章介绍群在集上的作用，也用了大量例子说明一个重要的公式，这个公式可以说是波利亚计数定理的前奏。第 4 章引入权的概念，把前一章的思想推广，本书的主角——波利亚计数定理——也就登场了。第 5 章介绍这条定理的一项重要应用，是化学上同分异构体的计数问题，在叙述过程中同时介绍了母函数的概念。最后加了一个附录，叙述群这个概念怎样从古典代数的解方程问题产生，希望通过了解前人的业绩提高读者的学习兴趣。

本书没有假定读者具备太多的专门数学知识，原则上一位高中学生按着章节读下去而且愿花一点气力弄明白其中的内容，是完全可以读懂的。关键就在“愿花一点气力”这句话上面。要弄明白一些数学，读者需要亲自动手干、动脑思考；动了手动了脑弄个明白后，那份愉悦只有自知！为了写作本书我不时获得这份愉悦，但限于个人的数学修养和表达技巧，我未必能成功地把这份愉悦直接传达给每一位读者。如果读者因为看不明白某些段落自己动手动脑弄明白后感到那份愉悦，那我也算起了一点催化剂的作用！当然，如果内容有什么错漏，欢迎读者给我指正。

最后，我得感激中国科技大学的冯克勤教授鼓励我为《走向数学》丛书写其中一本，让我有这个学习机会。我也得感激英国南安普敦大学的罗伊德（E.K.LLOYD）教授惠寄资料，讲解波利亚的理论与列尔菲尔的理论两者之间的关系和它们的应用。在此谨向他们两位致谢。

萧文强

1990年9月·香港大学

目　　录

第一章　几个问题

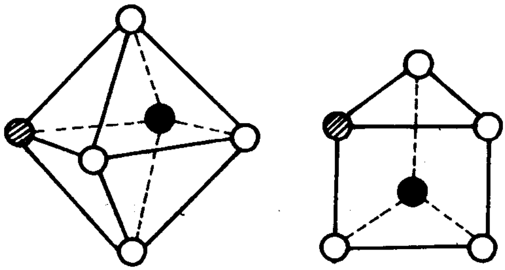
§1.1　球棒组合玩具

大家也许见过一种类似积木的玩具，元件是一些不同颜色的球和不同长短的棒，球的表面有很多洞，利用这些洞可以就着不同的角度把球和棒相接，由此砌成各种模型，如风车、房子、桥梁、桌子、椅子、动物、……，也可以砌成各式各样的美术构形。现在问：把一个黑球、一个红球、四个白球用棒连成一个正六边形，球在端点，共有多少个不同的构形呢（见图 1.1）？

图 1.1

如果那个正六边形是固定的，答案容易算出来。先放黑球，有 6 种不同的摆法；其次放红球，只有 5 种不同的摆法；余下的端点自然要放白球了，合起来共有 $6\times 5=30$ 种不同的构形。细心的读者会说："这个答案跟正六边形扯不上关系！换了是别的形状，

只要球是放在六个可区别的位置上，不管那是正六边形的六个端点，或是一字长蛇上的六个点，答案仍然是 30 种。”对的，把一个黑球、一个红球、四个白球用棒连成一个正八面体，球在端点，如果那个正八面体是固定的，答案同样是 30 种不同的构形（见图 1.2a)。又把一个黑球、一个红球、四个白球用



a　　　　b

图 1.2

棒连成一个三棱柱体，球在端点，如果那个三棱柱体是固定的，答案同样是 30 种不同的构形(见图 1.2b)。不过，只要你动手砌一砌，你便知道实际情况可不一样，因为没有规定人家不准转动或者翻转那些构形呀！容许转动或者翻转构形，便没有 30 种不同的构形了。对六边形而言，只有 3 种(见图 1.3a)；对正八面体而言，只有 2 种(见图 1.3b)；对三棱柱体而言，只有 5 种(见图 1.3c)。

为什么同样是摆放一个黑球、一个红球、四个白球，三道问题的答案却互不相同呢？一般而言，怎样计算有多少个真正不同的构形呢？

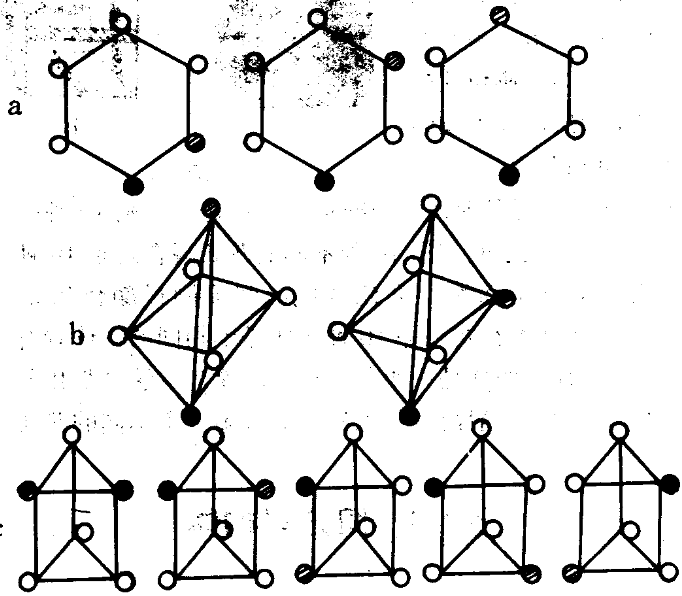


图 1.3

§ 1.2　涂色的积木

给你一块立方积木和红、绿两种油漆，让你把立方积木的六个面各涂上一种色，共有多少种不同的花式呢（见图 1.4a)？单凭试验，很多人都知道共有 10 种不同的花式，其中一种是六面涂红色、一种是五面涂红色、两种是四面涂红色、两种是三面涂红色、两种是二面涂红色、一种是一面涂红色、

一种是没有一面涂红色。有位朋友比较懒惰，他不愿把整个面涂色，只在那个面的中间涂上一条红线或者绿线；为了避免这些颜色线条相接，他把线的横直逐面相隔开（见图1.4b）。你猜共有多少种不同的花式呢？是否还是10种呢？不是！固然，相应于刚才那10种不同的花式现在还是10种不同的花式（把整个面涂什么色看作中间涂同样颜色的线条便成），但还有2种花式跟那10种花式是不相同的，读者有兴趣找出吗？为什么同样是一块立方积木，涂色方法又复相似，答案却不相同呢？一般而言，怎样计算有多少个不同的花式呢？

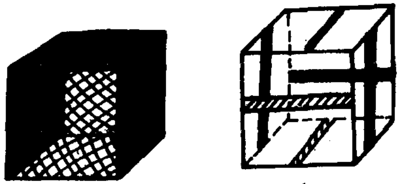


图 1.4

§1.3 同分异构体

化学上有种现象，叫做同分异构，早于1811年已被法国化学家盖吕萨克（J.L.GAY-LUSSAC）在实验中证实了，并于1827年由瑞典化学家伯齐力阿斯（J.J.BERZELIUS）正名引入化学中。按照他的定义，同分异构体是具有相同的化学组成和分子量但具有不同性质的物质。这种现象的解释，却要再过半个世纪后才随着结构理论的出现而被揭露。原来虽然两个化合物的结构式相同，它们的原子在分子中所处的位置却可以不相同，这便导致两者具有不同的性质了。例如丁烷的结构式是C_4H_{10}，它的四个碳原子有两种不同的摆法（见图1.5），由此产生两种同分异构体。一般而言，给定一个N烷烃的结构