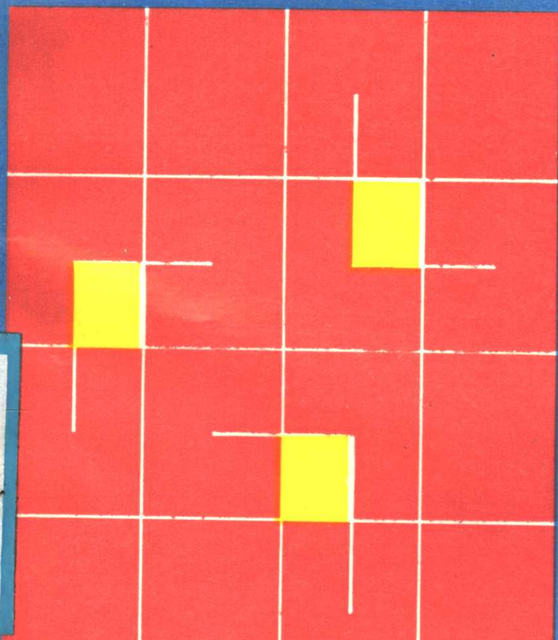
中学数学奥林匹克系列专题

绝对不等式 200例

张宁生 田利英 编著

新华出版社



中学数学奥林匹克系列专题

绝对不等式200例

张宁生　田利英　编著

新华出版社

中学数学奥林匹克系列专题
绝对不等式200例
张宁生　田利英　编著
*
新华出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
北京燕山印刷厂印刷
*
787×1092毫米　32开本　4印张　77,000字
1990年12月第一版　1990年12月北京第一次印刷
印数：1—15,000册
ISBN 7-5011-0935-4/G·289　定价：1.90元

引　言

有差异就存在着不等，因此不等式是大量的、绝对的，而等式却显得微乎其微。今天，关于不等式的探讨与应用几乎渗透到涉及数量关系的数学各个领域。正是基于此点，国内外中学生数学竞赛中，不等式的问题才经常出现。

本书是作者在北京市东城区、海淀区数学奥林匹克学校等处用过的讲稿的基础上整理汇编而成。

目　录

引言

§1 基本知识

1 不等符号

$$<,\ >,\ \leqslant,\ \geqslant,\ \neq,\ \not>,\ \not\geqslant,\ \not<,\ \not\leqslant$$

例1 若$a\in R$，则

(1) $a^2\geqslant 0$

(2) $|a|\geqslant 0$

(3) $\sqrt[2n]{a^2}=\sqrt[n]{|a|}\geqslant 0$

(4) $a^2-2a+2=(a-1)^2+1\geqslant 1$

(5) $-2a^2+6a+16=20\frac{1}{2}-2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\leqslant 20\frac{1}{2}$

2 比较法

(1) $a-b>0\Longleftrightarrow a>b$

(2) $a-b=0\Longleftrightarrow a=b$

(3) $a-b<0\Longleftrightarrow a<b$

例2 若a、$b\in R$，则$a^2+b^2\geqslant 2ab$，其中等号当且仅当

$a=b$时成立。

证 $\because\ a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$

$\therefore\ a^2+b^2\geqslant 2ab$ 且

$(a-b)^2=0\Longleftrightarrow a-b=0\Longleftrightarrow a=b$

例3 若a、$b\in R^+$，则$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$。其中等号当且仅当$a=b$时成立。

证 $\because\ \dfrac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$ 且当a、$b\in R^+$时

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0\Longleftrightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}=0\Longleftrightarrow\sqrt{a}=\sqrt{b}$

$\Longleftrightarrow a=b$

练习 1 已知$a>0$，求证$a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$

（山西省1978年高中数学竞赛试题）

例4 若a、b、$m\in R^+$且$a<b$，则

$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$

证 $\because\ \dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{(a+m)b-a(b+m)}{b(b+m)}$

$$=\frac{mb-ma}{b(b+m)}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}=\frac{(+)(+)}{(+)(+)}>0$$

$$\therefore\quad \frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$$

例5　若a、$b\in R^{+}$，则

$(a+b)(a^4+b^4)\geqslant(a^2+b^2)(a^3+b^3)$

（苏联基辅第49届数学竞赛试题）

证　$\because\ (a+b)(a^4+b^4)-(a^2+b^2)(a^3+b^3)$

$=a^4b+ab^4-a^2b^3-a^3b^2$

$=ab(a-b)^2(a+b)\geqslant 0$

$\therefore\quad (a+b)(a^4+b^4)\geqslant(a^2+b^2)(a^3+b^3)$

例6　柯西($Cauchy$)不等式

若　a_k，$b_k\in R$（$k=1$，2，…，n），则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

其中等号当且仅当a_k/b_k为一常数时成立

说明：特别规定当a_k、b_k之一为零，则另一个也为零。

证　$\because\ \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \sum_{j=1}^{n} a_j b_j + \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_k^2 b_j^2 - 2a_k b_k a_j b_j + a_j^2 b_k^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_k b_j - a_j b_k\right)^2 \geqslant 0$$

$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$ 且

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_k b_j - a_j b_k\right)^2 = 0$$

$\Longleftrightarrow a_k b_j - a_j b_k = 0 \ (k,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

$\Longleftrightarrow \dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{a_j}{b_j} \ (k,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

练习2 若$a_i > 0$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$m \in N$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m-1}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m}\right)^2$$

例7 切比雪夫(Чебышев)不等式

设$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

式中等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时成立。

证 $\because\ n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{j=1}^{n}b_j$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_kb_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k-a_kb_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_jb_j-a_jb_k)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k+a_jb_j-a_kb_j-a_jb_k)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_j)(b_k-b_j)\geqslant 0$$

$$\therefore\quad n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\geqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k$$

说明：切比雪夫不等式曾于1963年—1964年波兰数学竞赛中出现过

若 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，$b_1<b_2<\cdots<b_n$，$n\geqslant 2$，$n\in N$，则

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

3 比值法

若$b>0$，则

(1) $a/b>1 \Longleftrightarrow a>b$

(2) $a/b=1 \Longleftrightarrow a=b$

(3) $a/b<1 \Longleftrightarrow a<b$

例8 比较$\sqrt{3}$和$2^{0.6}$的大小

(沈阳市1978年数学竞赛试题)

分析：为此只要比较$(\sqrt{3})^{10}=3^5$与$(2^{0.6})^{10}=2^6$的大小即可.

解 $\because \dfrac{(\sqrt{3})^{10}}{(2^{0.6})^{10}}=\dfrac{3^5}{2^6}=\dfrac{243}{64}>1$

$\therefore \quad (\sqrt{3})^{10}>(2^{0.6})^{10}$

故 $\sqrt{3}>2^{0.6}$

练习3 求证 $16^{18}>18^{16}$

例9 若a、$b\in R^+$且$a\neq b$，则$a^ab^b>a^bb^a$

证 不失一般性，假定$a>b$。

$\because \quad \dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$

$\therefore \quad a^ab^b>a^bb^a$

练习4 若a、$b\in R^+$则

$$\frac{a+b}{2} \geqslant (a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}$$

例10　若a、b、$c \in R^+$，则

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$$

（1974年美国第三届数学竞赛试题）

证　不失一般性，假定$a \geqslant b \geqslant c$

$$\because \quad \frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}}$$

$$= a^{\frac{a-b}{3}+\frac{a-c}{3}} b^{\frac{b-a}{3}+\frac{b-c}{3}} c^{\frac{c-a}{3}+\frac{c-b}{3}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}} \geqslant 1$$

$$\therefore \quad a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$$

练习5　若$a > b > c > 0$，则

$$a^{2a} b^{2b} c^{2c} > a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$$

（上海市第七届中学生数学竞赛试题）

练习6　若$a_i \in R^+ (i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

4 分析与综合

例11 求证 $2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}>0$

分析：欲证 $2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}>0$成立

只要证 $2>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ 成立

只要证 $4>2+\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 成立

只要证 $2>\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 成立

只要证 $4>2+\sqrt{3}$ 成立

只要证 $2>\sqrt{3}$ 成立

只要证 $4>3$ 成立

但上式显然成立

综合 $4>3\Longrightarrow 2>\sqrt{3}\Longrightarrow 4>2+\sqrt{3}$

$\Longrightarrow 2>\sqrt{2+\sqrt{3}}\Longrightarrow 4>2+\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\Longrightarrow 2>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\Longrightarrow 2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}>0$

例12 若$k\in N$，则

$$2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2\sqrt{k-1}$$

分析：(1) 欲证 $\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2\sqrt{k-1}$

只要证 $1<2k-2\sqrt{k-1}\ \sqrt{k}$

只要证 $2\sqrt{k-1}\ \sqrt{k}<2k-1$

只要证 $4(k-1)k<(2k-1)^2$

只要证 $4k^2-4k<4k^2-4k+1$

但这是显然的

(2) 欲证 $2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}$

只要证 $2\sqrt{k+1}\ \sqrt{k}-2k<1$

只要证 $2\sqrt{k+1}\ \sqrt{k}<2k+1$

只要证 $4(k+1)k<(2k+1)^2$

只要证 $4k^2+4k<4k^2+4k+1$。但这是显然的。

练习7 求证 $(0.99)^{99}>(1.01)^{-101}$

练习8 求证 $\left(\frac{1}{\sin^4\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^4\theta}-1\right)\geqslant 9$

5 扩大与缩小

例13 若$n>1$，$n\in N$，则

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>1$$

（1937年—1938年匈牙利
数学竞赛试题）

证 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}$

$$>\frac{1}{n}+\underbrace{\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}_{(n^2-n)\text{个}}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}=1$$

例14 若a、b、c、$d\in R^+$ 设

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$$

则 $1<S<2$

证 （1）$S<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}$

$$=\frac{a+b}{a+b}+\frac{c+d}{c+d}=2$$

（2） $S>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}$

$$+\frac{d}{a+b+c+d}=\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}=1$$

故$1<S<2$

练习9 比较$\sqrt[8]{8!}$和$\sqrt[9]{9!}$哪个大？

练习10 若$n>2$，则$2\cdot4\cdot6\cdots2n<(n+1)^n$

练习11 设$0\leqslant a$、b、$c\leqslant 1$，则

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1$$

（第9届美国数学竞赛试题）

§2 基本不等式的应用

1 若a、$b\in R$，则$a^2+b^2\geqslant 2ab$。其中等号当且仅当$a=b$时成立（见§1例2）

例15 若a、b、$c\in R$，则

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$$

证 $\because$ $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ca$

$\therefore$ $(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)\geqslant 2ab+2bc+2ca$

即 $2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$

故 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$

例16 若a、b、$c\in R$，则

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$$

证 $\because$ $a^2b^2+c^2a^2\geqslant 2ab\cdot ca=2a^2bc$

$b^2c^2+a^2b^2\geqslant 2ab^2c$

$c^2a^2+b^2c^2\geqslant 2abc^2$

将上面三个不等式相加，得

$$2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)\geqslant 2abc(a+b+c)$$

故 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$

练习12 若a、b、$c\in R$，则

$$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$$

例17 设a、b、c为任意三角形三边之长，且$p=a+b+c$，$S=ab+bc+ca$，则$3S\leqslant p^2<4S$

（天津市1978年数学竞赛试题）

证 (1) $\because$ $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$

$\therefore$ $3S=3(ab+bc+ca)\leqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=(a+b+c)^2=p^2$

(2) $\because$ $|a-b|<c$ $\therefore$ $a^2-2ab+b^2<c^2$

同理 $b^2-2bc+c^2<a^2$，$a^2-2ca+c^2<b^2$

故 $2(a^2+b^2+c^2)-2ab-2bc-2ca<a^2+b^2+c^2$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca<4(ab+bc+ca)$

即 $(a+b+c)^2<4S$，故$p^2<4S$

因此 $3S\leqslant p^2<4S$