

计算机辅助几何设计

胡瑞安主编



华中理工大学出版社

计算机辅助几何设计

胡瑞安 何 迅 李心灿 编著

胡瑞安 主编

华中理工大学出版社

内 容 提 要

计算机辅助几何设计 (CAGD) 是计算机图形学的后续课程。近十多年来, CAGD 已在许多方面取得成效, 并已成为 CAD/CAM 的核心技术而受到普遍的重视。当前, 理工科院校开设本课程教学的师生以及从事CAD/CAM工作的技术人员都急需有关CAGD方面的教材或参考书。本书就是为适应这一需要而编写的。

全书共计九章, 取材广泛, 具有一定的深度。书中, 对 CAGD 的基本理论作了恰如其分的叙述和分析, 所介绍的各种几何设计方法具有一定的实用价值。本书初稿曾在研究生教学中试用过多次, 并不断加以修改和补充。

本书可作为理工科院校有关专业讲授本课程时的教学用书, 也可供从事计算机绘图及CAD/CAM工作的技术人员参考。

计算机辅助几何设计

胡瑞安 何 迅 李心灿 编著

胡 瑞 安 主 编

责任编辑 钟利章

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

湖北省通城县印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 16.25 字数: 376,000字

1987年2月第1版 1989年2月第2次印刷

印数: 2 001—5 000

ISBN 7-5609-0025-9/TP·4

定价: 3.26元

前 言

计算机辅助几何设计是计算机图形学的后续课程。凡是从事计算机图形处理和 CAD/CAM 课题研究的大学生、研究生以及工程技术人员都必须具备这两门课的知识。计算机辅助几何设计在国外又称为形状处理,是在计算机图形学与计算几何学的基础上发展起来的。

在人类所感受的信息中,百分之七十以上是图象信息,有效地处理图形与形状的信息,将数值转换为视觉化的信息,不仅有助于研究者通过形象思维,更好地掌握客观世界的运动、变化及其规律性,而且也是实际工作中所需要的。

大家知道,用计算机显示三维形体的图形时,不仅需要有关该形体的几何数据,而且还需要其拓扑连接关系。在这种情况下,具有上述涵义的数据,已不单纯是一组几何数据,更确切地说,是一种图形或形状的数学模型。

数学模型应尽可能真实地描述形状。计算机图形学研究的范围是,在数模给定的情况下,如何产生图形显示或绘图输出;而计算机辅助几何设计所涉及的内容,则是在计算机内构作形状的数学模型,并进行各种处理与操作。

计算机图形学从六十年代初开始发展,到七十年代中期已基本完成。而计算机辅助几何设计,则是在六十年代后期才开始发展,到七十年代中、后期进入全盛时期,出现了一些以几何构型为核心的 CAD/CAM 系统,目前还在发展之中。近年来,由于图形与形状输入技术的需要,又发展了计算机视觉的应用研究。

学过计算机图形学的读者,都希望进一步学习有关几何设计的知识。近十多年来,计算机辅助几何设计已在许多方面取得成效,并已成为 CAD/CAM 的核心技术而受到普遍的重视。因而对于从事这方面工作的读者来说,需要一本关于计算机辅助几何设计的参考书。理工院校有关专业的教学以及从事计算机绘图与辅助设计的广大读者,也需要有一本关于计算机辅助几何设计的教材。鉴于目前国内这类书籍出版得不多,因此作者将近年来为研究生开课所用的讲稿作为基础,并参考在国外学习与工作时的笔记,以及从事 CAD 研究的报告和有关文献,编写而成此书,以适应读者的需要。在完成本书初稿的近两年多时间内,作者曾在华中工学院机械工程一系 82、83、84、85 级部分研究生及大学高年级选修课教学中试用过,在讲课中对本书的内容不断地进行修改、补充,努力使本书适应教学需要。

本书共计九章。其中,第九章是北京航空学院李心灿副教授和重庆电子技术研究所何迅工程师等合写的;第四章第一节由李心灿执笔;第六章第二、七节由何迅执笔;其余章节均由胡瑞安执笔。

云马机械厂李瑞石、仰文发,湖北电大计算机室胡纪阳等为本书提供素材,验证算法,编程调试,还设计绘制了一部分插图,使本书得以如期完成。责任编辑钟利章副教授在编辑加工上付出了艰辛的劳动,并对部分数学公式进行了检验,还对内容的取舍提出了宝贵意见。在此一并致谢。

由于作者水平有限,书中一定存在不少问题,请读者指正。

胡瑞安

一九八六年一月于华中工学院

目 录

第一章 几何设计基础	(1)
§ 1-1 概 述	(1)
§ 1-2 三维形状的性质	(2)
§ 1-3 二次曲线——圆的生成	(4)
§ 1-4 参数曲线的描述	(6)
§ 1-5 参数曲线的形状控制	(9)
§ 1-6 曲线、曲面的基础理论.....	(12)
§ 1-7 参数曲面上点的计算.....	(18)
§ 1-8 参数曲面的形状控制.....	(20)
§ 1-9 Lagrange插值曲线.....	(22)
第二章 三维图形显示	(23)
§ 2-1 概 述	(25)
§ 2-2 仿射变换.....	(26)
§ 2-3 射影变换.....	(27)
§ 2-4 绕任意轴的旋转变换	(29)
§ 2-5 视野变换.....	(32)
§ 2-6 规范透视变换	(34)
§ 2-7 透视的基本理论	(38)
§ 2-8 三维透视空间的若干性质.....	(40)
§ 2-9 齐次坐标.....	(47)
§ 2-10 二、三维剪取	(51)
第三章 隐藏线与隐藏面的消除	(57)
§ 3-1 概 述	(57)
§ 3-2 凸多面体隐线的消除.....	(58)
§ 3-3 消隐的基本处理方法.....	(62)
§ 3-4 消隐处理中坐标系的选择	(67)
§ 3-5 隐藏线(面)的消除算法(一)	(69)
§ 3-6 隐藏线(面)的消除算法(二)	(76)
第四章 Hermite插值	(82)
§ 4-1 基本概念.....	(82)
§ 4-2 Ferguson曲线(一)	(84)
§ 4-3 Ferguson曲线(二)	(87)

§ 4-4 Ferguson 曲面	(91)
§ 4-5 Coons 曲面 (一)	(93)
§ 4-6 Coons 曲面 (二)	(99)
§ 4-7 双三次曲面的形状控制	(103)
§ 4-8 扭转的影响与处理方法	(106)
§ 4-9 Coons 曲面片的连接	(110)
第五章 Bernstein-Bézier 逼近	(115)
§ 5-1 三次 Bézier 曲线	(115)
§ 5-2 Bézier 曲线与 Bernstein 基函数	(119)
§ 5-3 Bézier 曲线的描述与分析	(122)
§ 5-4 Bézier 曲线的增阶、分割与连接	(128)
§ 5-5 Bézier 曲面及其连接	(135)
§ 5-6 三角形 Bézier 曲面片	(142)
§ 5-7 三次 Bézier 插值曲线	(145)
第六章 B-Spline 逼近	(147)
§ 6-1 均匀三次 B-Spline 曲线	(147)
§ 6-2 均匀二、三次 B-Spline 曲面	(154)
§ 6-3 B-Spline 函数的差商定义	(160)
§ 6-4 B-Spline 函数的递推定义	(164)
§ 6-5 B-Spline 曲线的几种形态	(167)
§ 6-6 B-Spline 曲线顶点的反算	(171)
§ 6-7 B-Spline 曲面顶点的反算	(174)
§ 6-8 De Boor 算法	(177)
§ 6-9 节点的插入	(179)
§ 6-10 Chaikin 算法	(182)
§ 6-11 插值 B-Spline 与一般 B-Spline 曲面	(184)
第七章 有理函数曲线	(187)
§ 7-1 平面有理函数曲线	(187)
§ 7-2 圆锥曲线的参数方程及分类	(190)
§ 7-3 空间有理函数曲线与 T-Conic 曲线	(193)
第八章 几何构型	(198)
§ 8-1 基本概念与几何模型	(198)
§ 8-2 几种有代表性的几何构型方法	(202)
§ 8-3 几何构型中的布尔运算	(204)
§ 8-4 正则布尔运算	(206)
§ 8-5 多面体的数据结构与拓扑模型	(209)
§ 8-6 形状模型的数学描述	(214)
§ 8-7 自由曲面的构型	(218)
§ 8-8 几何构型中的局部变形	(220)

第九章 曲线、曲面的光顺	(225)
§ 9-1 圆弧曲线及其光滑连接.....	(225)
§ 9-2 二次曲线生成法.....	(237)
§ 9-3 三次Spline曲线.....	(234)
§ 9-4 构造曲面的母线法.....	(237)
§ 9-5 光顺的基本概念.....	(242)
§ 9-6 曲线光顺的回弹法.....	(244)
§ 9-7 曲线光顺的能量法.....	(248)

第一章 几何设计基础

§ 1-1 概 述

在工业设计中遇到的形状，一般可以分为两类：（1）定形形状（第一类形状），通常由平面、二次曲面或其它规则曲面所构成，大多数机械零件都由这类形状所构成；（2）自由形状（第二类形状），一般来说，它包含了自由曲线与自由曲面，设计时通常由给定的一系列型值点来定义其形状，某些复杂零件及汽车、飞机外形曲面均属这类形状。

计算机辅助几何设计着重讨论第二类形状的处理问题。近十多年来，由于许多学科按照新的方式进行了综合，因而逐步形成了计算机辅助几何设计（Computer Aided Geometric Design，简称CAGD）这一新的学科领域。它是研究几何形状信息的计算机描述、分析和综合的学科，是一个已在研究、探讨与实践取得了成效并正在迅速发展的领域。具体来说，它的研究内容包括以下三个方面：（1）形状信息的描述与传递；（2）形状信息的分析与综合；（3）形状的控制与显示。

关于形状信息的描述与传递，一般来说，用常规的三面视图的方法，对第一类形状是适用的，但是将三维形状在二维平面上描述并进行形状信息的传递，即使采用多面视图及其它表达方法，对某些形状来说，也仍然是难于做得好的。第二类形状所包含的形状信息更多，用传统的工程图学的方法有一定的困难，在CAGD中则是用数学方法来客观地定义、描述与传递形状信息。

关于形状信息的分析与综合，主要是指：根据形状信息构作数学模型，将形状输入计算机并通过运算求出足够的信息，在此基础上可以对形状进行各种分析与处理，包括图形处理、各种计算（如结构强度、振动、热传导等）、FEM（有限元）和BEM（边界有限元）分析、以及数控加工纸带的制作等。形状设计实际上是一个不断分析与综合的过程，既要满足产品技术要求，同时还要保证光顺要求等等。

关于形状的控制与显示，由于设计是一个不断试行与修改的过程，因此，设计中需要对形状进行有效控制与修正，并产生实时图形显示。

在几何设计中，曲线与曲面可用点集来表示，用小段折线来逼近曲线。此法的缺点是：占内存大，数学上处理不便，并且不易进行形状控制。关于曲线，首先是设计问题（即按设计的意图设计曲线），其次是插值与逼近的问题。设计中通常是用一组数据点来定义几何形状的，给定的数据点，又称为型值点。

应注意区别以下几个概念：

（1）插值：构造一个函数使之依次通过给定的型值点，称为插值。其主要特点是曲线严格通过所有的型值点。一般来说，是用一已知的插值函数代替被插值函数，或是用简单的插值函数来代替复杂的被插值函数。其所构造的曲线与曲面应满足光顺的要求。

（2）逼近：不要求曲线或曲面严格通过所有型值点，只要求所得曲线整体上最为接近这些型值点即可，这种方法，称为逼近。

（3）拟合：在研究与讨论问题时，通常将曲线、曲面的插值与逼近，统称为拟合。在

几何设计中,要求所得的插值与逼近函数尽量简单、便于使用,并且其曲线足够光滑,满足设计要求。

在CAGD发展过程中,自由曲线与曲面研究的历史最长,自由形状的处理在CAGD中亦占有相当大的比重。研究中存在着两个主要问题,其一是形状控制性如何改善的问题,另一是连接问题。针对着这两方面的问题,产生了一系列的解决方法,从而推动着CAGD不断发展。

§ 1-2 三维形状的性质

一、三维物体形状的性质

用计算机处理形状信息时,应注意保持现实世界中存在的物体形状的各种性质,即:

1. 空间的唯一性

两个物体不能同时占有同一空间。但是由于计算机内存中是用数学方程和数据来描述形状并通过数据结构来实现的,因此,满足空间唯一性的要求是非常困难的。为此,需进行干涉检验。

2. 物体的有界性与连续性

构成物体形状的各个表面都是有限大小的面,而不应是无限延伸的。因此,物体所占有的空间是有界、连续的。这些有限的表面是以边界线为分界线连成一体的。

在CAGD中,如何恰当地表示物体或曲线与曲面的伸展范围是非常重要的。形体上的有形平面或有限伸展的曲面,是以曲线(或棱线)为分界线彼此连续地互相连接在一起的,这种性质称为物体的连续性。对形状的处理,经常要用到物体的连续性。在计算机内描述形状,形状要素之间的拓扑连接关系的描述也是很重要的。这种描述是通过数据结构来实现的。

3. 坐标变换后物体形状的不变性

这一性质,又称为坐标独立性。它是指物体的形状不应随坐标系的变换而发生变化。因此,在构作物体形状的数学模型时,形状的不变性是一个必须保证的重要条件。通过下面举的一个例子可以看到,如果数学描述不恰当,则形状的不变性条件将有可能不成立。现考察图1-1所示的 Oxy 坐标系中的参数曲线

$$P(t) = A_0(t) \cdot P_0 + A_1(t) \cdot P_1 \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (1-2-1)$$

其中,若设 $A_0(t) = (1-t)^3$, $A_1(t) = t^3$,此时,由于 $A_0(0) = 1$, $A_0(1) = 0$, $A_1(0) = 0$, $A_1(1) = 1$,因此,曲线 $P(t)$ 应为连结两个点 $P_0 = [0,0]$ 和 $P_1 = [10,10]$ 的直线,

$$P(t) = (1-t)^3 \cdot [0,0] + t^3 \cdot [10,10].$$

若 $O^*x^*y^*$ 为新的坐标系,点 P_0 和 P_1 在新坐标系中的坐标分别为 $P_0^* = [-3,-2]$, $P_1^* = [7,8]$,此时,若

$$P^*(t) = A_0(t) \cdot P_0^* + A_1(t) \cdot P_1^*,$$

则当 $t=0$ 时,曲线通过 P_0^* ,而当 $t=1$ 时,曲线通过 P_1^* ,但是,当 $0 < t < 1$ 时,

$$P^*(t) = (1-t)^3 \cdot [-3,-2] + t^3 \cdot [7,8],$$

此式所表示的是一条曲线。由此可见,式(1-2-1)不满足坐标独立性(即形状不变性)的条件,因而用它来描述形状是不妥的。

前面已经提到, CAGD的研究内容是如何用计算机描述、分析与综合形状信息。这里所指的形状, 是一个几何不变的概念, 形状的性质并不完全等同于函数的性质。数学中的插值与逼近方法, 在CAGD中有时需要加以改造与充实, 以使形状不变性得以保证。

二、三维物体形状的数学描述

物体形状(例如曲线与曲面)的数学描述, 除了应满足形状不变性条件外, 尚应满足形状设计的要求:

(1) 数学表达式应具有足够强的描述能力。

例如自由曲线, 一般可由若干曲线段连接而成, 如何保证这些曲线段光滑地连接是设计时的基本要求, 一般应达到位置、斜率、曲率连续, 称为 C^0 、 C^1 、 C^2 连续, 视具体要求而定。对于曲线的光滑程度, 不仅要满足曲线的局部光滑, 也应考虑如何保证其整体光滑的问题。

(2) 数学表达式应便于对形状进行控制和预测。

控制点通常是指定义曲线与曲面的顶点, 当改变设计时, 应保证便于对形状进行控制, 不但能够整体控制, 而且能进行局部控制。

对于用数学表达式描述的曲线, 当调整控制点的参数仍不能实现设计者预期的形状时, 可通过以下方法来提高数学表达式的描述能力: 一种是保持形状不变, 使曲线的次数增大; 另一种是保持形状不变, 将曲线进行分割。

某些曲线具有闭凸包性和变差减小性, 这是两个极为重要的性质。这类曲线当其控制点的参数变化时, 往往可以预测形状的变化, 使形状易于控制。

三、坐标变换后形状不变性的条件

设曲线的表达式可用下面形式描述:

$$P(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)] \\ = [\phi_0(t) \quad \phi_1(t) \quad \dots \quad \phi_n(t)] [Q_0 \quad Q_1 \quad \dots \quad Q_n]^T, \quad (1-2-2)$$

其中, $\phi_0(t)$ 、 $\phi_1(t)$ 、 \dots 、 $\phi_n(t)$ 为参数 t 的多项式, Q_0 、 Q_1 、 \dots 、 Q_n 为定义该曲线的位置矢量。

问题在于, 任何形状经矩阵变换后, 是否都能保持其形状的不变性。下面将分别考察经过旋转和平移变换后, 要保持形状的不变性所需满足的条件。

1. 旋转变换

设 T 为旋转变换矩阵, Q_0^* 、 Q_1^* 、 \dots 、 Q_n^* 为变换后的位置矢量, 它们的变换关系分别为 $Q_0 \cdot T = Q_0^*$, $Q_1 \cdot T = Q_1^*$, \dots , $Q_n \cdot T = Q_n^*$, 此时, 有

$$P^*(t) = [\phi_0(t) \quad \phi_1(t) \quad \dots \quad \phi_n(t)] [Q_0^* \quad Q_1^* \quad \dots \quad Q_n^*]^T \\ = [\phi_0(t) \quad \phi_1(t) \quad \dots \quad \phi_n(t)] [Q_0 \cdot T \quad Q_1 \cdot T \quad \dots \quad Q_n \cdot T]^T \\ = [\phi_0(t) \quad \phi_1(t) \quad \dots \quad \phi_n(t)] [Q_0 \quad Q_1 \quad \dots \quad Q_n]^T \cdot T = P(t) \cdot T.$$

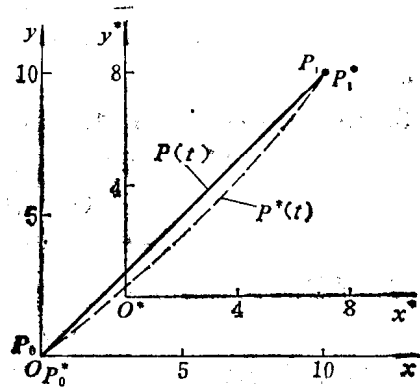


图1-1 形状不变性不成立的实例

由此可知, 旋转变换后仍保持物体的形状不变性。

2. 平移变换

设平移矢量为 $m[m_x, m_y, m_z]$, 平移变换后, 得

$$\begin{aligned} P^*(t) &= [\phi_0(t) \phi_1(t) \cdots \phi_n(t)] [Q_0^* Q_1^* \cdots Q_n^*]^T \\ &= [\phi_0(t) \phi_1(t) \cdots \phi_n(t)] [Q_0 + m, Q_1 + m, \cdots, Q_n + m]^T \\ &= P(t) + [\phi_0(t) + \phi_1(t) + \cdots + \phi_n(t)] \cdot m, \end{aligned}$$

为了保证平移的不变性, 应满足下面的条件:

$$\phi_0(t) + \phi_1(t) + \cdots + \phi_n(t) \equiv 1,$$

这个关系, 称为柯西 (Cauchy) 关系。

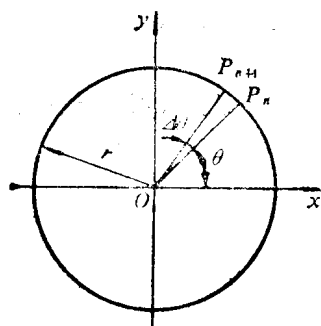
图1-1的例子中, 由于柯西关系不满足, 故不能保证平移后形状的不变性。

§ 1-3 二次曲线——圆的生成

在第一类形状中, 由直线和圆组成的形状是工程设计中应用最广泛的。下面介绍几种有关圆的生成方法, 这些方法既有联系, 又有区别。除此之外, 亦可用自由曲线逼近圆弧的方法, 参见本书第四、五、六章有关内容。这些方法, 读者可以作为习题进行程序设计试验, 并注意对各种算法进行比较。

1. 第一种方法

如图1-2所示。半径为 r 的圆周上一点 $P_n(x_n, y_n)$, 当按逆时针方向转过 $\Delta\theta$ 角后为 $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$, 有如下关系:



$$\begin{cases} x_{n+1} = r \cos(\theta + \Delta\theta) = r \cos\theta \cos\Delta\theta - r \sin\theta \sin\Delta\theta \\ \quad = x_n \cos\Delta\theta - y_n \sin\Delta\theta, \\ y_{n+1} = r \sin(\theta + \Delta\theta) = r \sin\theta \cos\Delta\theta + r \cos\theta \sin\Delta\theta \\ \quad = y_n \cos\Delta\theta + x_n \sin\Delta\theta. \end{cases} \quad (1-3-1)$$

上述关系可用矩阵表示为:

$$[x_{n+1} \ y_{n+1}] = [x_n \ y_n] \begin{bmatrix} \cos\Delta\theta & \sin\Delta\theta \\ -\sin\Delta\theta & \cos\Delta\theta \end{bmatrix}. \quad (1-3-2)$$

在选择适当大小的 $\Delta\theta$ 后, 利用以上关系, 后一点的坐标可由前一点的坐标通过计算得到。用这种方法, 可以计算出圆周上一系列等角度分布的点。但是, 用硬件来实现上述算法时, 不仅需要进行矩阵乘法运算, 还要进行三角函数计算。为了简化计算, 考虑到 $\Delta\theta$ 是一个很小的角度, 可近似地取 $\cos\Delta\theta = 1$, $\sin\Delta\theta = \Delta\theta$, 故式(1-3-1)又可写成

$$x_{n+1} = x_n - \Delta\theta \cdot y_n, \quad y_{n+1} = \Delta\theta \cdot x_n + y_n, \quad (1-3-3)$$

如果令 $\Delta\theta = \varepsilon = 2^{-m}$, 其中 m 为正整数, 则

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon \cdot y_n, \quad y_{n+1} = \varepsilon \cdot x_n + y_n, \quad (1-3-4)$$

上式用矩阵表示为:

$$[x_{n+1} \ y_{n+1}] = [x_n \ y_n] \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{bmatrix}. \quad (1-3-5)$$

在 $\varepsilon = 2^{-m}$ 情况下, 只要 m 的取值足够大, 则 $\varepsilon \cdot x_n$ 和 $\varepsilon \cdot y_n$ 可通过移位运算, 高速地生成圆

或圆弧。

这种算法存在的问题是，其所产生的圆是不封闭的，且该圆的半径有不断增大的趋势。这是因为 P_{n+1} 是在 P_n 上加一个小的矢量而得到，这个矢量垂直于位置矢量 $P_n = [x_n, y_n]$ ，所以新的半径经常比前一个半径大，因而得到的曲线实际上不是精确的圆弧，而是一条螺线，如图1-3所示。

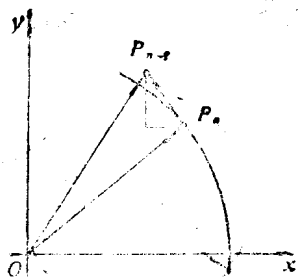


图1-3 曲线不封闭

2. 第二种方法

将式(1-3-4)的第二式中的 x_n 用 x_{n+1} 代替，即

$$y_{n+1} = \varepsilon \cdot x_{n+1} + y_n = \varepsilon \cdot x_n + (1 - \varepsilon^2) y_n,$$

则可得到一组新的关系式如下：

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon \cdot y_n, \quad y_{n+1} = \varepsilon \cdot x_n + (1 - \varepsilon^2) \cdot y_n,$$

它可用矩阵表示为：

$$[x_{n+1} \quad y_{n+1}] = [x_n \quad y_n] \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 1 - \varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

即

$$P_{n+1} = P_n \cdot T,$$

其中， T 为 2×2 矩阵。

上式又可用椭圆的差分方程描述如下：

$$x_{n+1} = r \cos(\theta + \Delta\theta) = r \cos\theta - 2r \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \sin\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) = x_n - \varepsilon \cdot y_n,$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= r \sin\left(\theta + \Delta\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) = r \sin\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) + 2r \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \cos\left(\theta + \Delta\theta\right) \\ &= y_n + \varepsilon \cdot x_{n+1}, \end{aligned}$$

其中， $x_n = r \cos\theta$ ， $y_n = r \sin\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right)$ ， $\varepsilon = 2 \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$ 。

消去 θ 并将 x_{n+1} 、 y_{n+1} 置换成 x 、 y ，可得到下式，这是一个椭圆方程：

$$\frac{x^2}{\left(r \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right)^2} - \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\left(r \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right)^2} xy = 1.$$

若 $\varepsilon = 2^{-m} = 2 \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$ ，则此椭圆与精确圆之间的误差为

$$E = \left(\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) / \sqrt{1 - \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)} - 1 \right) \times 100(\%) \approx \frac{1}{2^{m+1}} \times 100(\%).$$

例如，当 $m=4$ 时， $E=1.6\%$ 。

3. 第三种方法

连续旋转一个点亦可产生一个圆。当一点绕 z 轴旋转时，旋转变换矩阵为

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

故

$$[x_n \quad y_n] \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = [x_{n+1} \quad y_{n+1}],$$

即

$$x_{n+1} = \cos\theta \cdot x_n - \sin\theta \cdot y_n, \quad y_{n+1} = \sin\theta \cdot x_n + \cos\theta \cdot y_n.$$

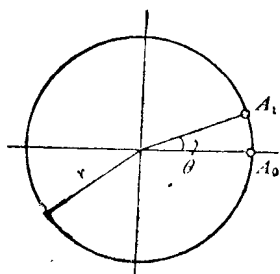


图1-4 圆的生成

如图1-4所示, 当点 $A_0(x_0, y_0)$ 旋转 θ 角, 转到第一个点 $A_1(x_1, y_1)$ 时, 其坐标 $y_1 = r\sin\theta = 1$, 即要求二点之间的距离等于一个象素(1 pixel)的大小。因此, 有 $\sin\theta = 1/r$, 所以 $\theta = \sin^{-1}(1/r)$ 。

令 $\sin\theta = \varepsilon$, 由于 $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, 下面的关系成立:

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \varepsilon^2} & \varepsilon \\ -\varepsilon & \sqrt{1 - \varepsilon^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{r^2 - 1}/r & 1/r \\ -1/r & \sqrt{r^2 - 1}/r \end{bmatrix}.$$

§ 1-4 参数曲线的描述

用非参数形式的数学方程表示曲线是CAGD早期采取的方法。它在曲线的拟合中, 存在着斜率 $dy/dx = \infty$ 的问题, 以及多值问题等等。图1-5所示的曲线就是一个例子。根据前面叙述的形状的有界性与连续性, 在描述曲线时, 在三维空间中正确表示被研究曲线的延伸范围也是必要的。

为了正确地表示曲线段的伸展范围, 在图1-5的平面曲线的情况下, 可以采用下式的单参数矢函数来表示, 即

$$P(t) = [x(t) \ y(t)],$$

图1-5中被研究的曲线段, 是以 $t = a$ 为首端, $t = b$ 为终端的那段曲线, 其参数的取值范围为 $a \leq t \leq b$ 。三维空间曲线亦类似, 只需增加 $z(t)$ 一项即可。

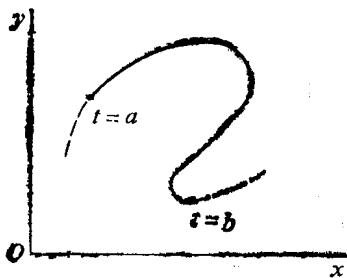


图1-5 多值

用参数描述曲线具有以下优点:

(1) 在多值的情况下, 可以方便地指定曲线的延伸范围;

(2) 具有几何不变性, 其形状与坐标的选择无关, 可以不依赖坐标系来研究图形的几何性质;

(3) 易于进行几何变换, 如仿射变换、射影变换等;

(4) 曲面上点的计算容易, 对空间曲线 $P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$ 来说, 由于 x 、 y 、 z 都是参数 t 的显函数, 故易于计算。

一、曲线上点的计算

在CAGD中, 用多项式表示的参数曲线, 其最低次数为三次。三次曲线可用下式表示:

$$P(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (1-4-1)$$

为了计算曲线上的点, 可将参数 t 的变化域 n 等分, 令 $\delta = 1/n$, 则有

$$t = 0, \delta, 2\delta, \dots, n\delta.$$

然后, 将 t 的数值代入式(1-4-1)进行计算即可。为了减少计算量, 可将式子改写为

$$P(t) = [(At + B)t + C]t + D. \quad (1-4-2)$$

这样, 可使计算时作乘法运算的次数, 由原来的 6 次减少到 3 次。

如果采用差分, 则可以完全不用乘法计算, 只用移位和加法运算即可, 从而可以高速地生成所需曲线。

现将式(1-4-1)作向前差分计算, 其零、一、二、三阶差分如下:

$$\text{零阶: } P(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D,$$

$$\text{一阶: } \Delta P(t) = P(t-\delta) - P(t) = 3A\delta t^2 + (3A\delta^2 + 2B\delta)t + A\delta^3 + B\delta^2 + C\delta,$$

$$\text{二阶: } \Delta^2 P(t) = \Delta P(t+\delta) - \Delta P(t) = 6A\delta^2 t + 6A\delta^3 + 2B\delta^2,$$

$$\text{三阶: } \Delta^3 P(t) = \Delta^2 P(t-\delta) - \Delta^2 P(t) = 6A\delta^3.$$

三阶差分为与参数值无关的矢量, 一般情况下, n 次多项式, 其 n 阶差分为常数矢量。

设 $t=0$, $t=i\delta$ 的各阶差分为 P_0 , ΔP_0 , $\Delta^2 P_0$, $\Delta^3 P_0$ 和 P_1 , ΔP_1 , $\Delta^2 P_1$, $\Delta^3 P_1$, 则有如下关系:

$$P_1 = P_0 + \Delta P_0, \quad \Delta P_1 = \Delta P_0 + \Delta^2 P_0, \quad \Delta^2 P_1 = \Delta^2 P_0 + \Delta^3 P_0, \quad \Delta^3 P_1 = \Delta^3 P_0. \quad (1-4-3)$$

若已知 $t=0$ 的各阶差分, 则 $t=\delta, 2\delta, \dots, i\delta, \dots$ 处曲线上的点, 可通过不断重复加法运算依次求得。当 $\delta=1/2^8$ 时, $\Delta^3 P_0$ 以后的各阶差分实际上已经变得相当小了。因此, 可以分别取 ΔP_0 、 $\Delta^2 P_0$ 、 $\Delta^3 P_0$ 的 $1/\delta$ 、 $1/\delta^2$ 、 $1/\delta^3$ 的数值, 进行如下运算, 即

$$\begin{cases} P_1 = P_0 + \delta \left(\frac{1}{\delta} \cdot \Delta P_0 \right), \\ \frac{1}{\delta} \cdot \Delta P_1 = \frac{1}{\delta} \cdot \Delta P_0 + \delta \left(\frac{1}{\delta^2} \cdot \Delta^2 P_0 \right), \\ \frac{1}{\delta^2} \cdot \Delta^2 P_1 = \frac{1}{\delta^2} \cdot \Delta^2 P_0 + \delta \left(\frac{1}{\delta^3} \cdot \Delta^3 P_0 \right), \\ \frac{1}{\delta^3} \cdot \Delta^3 P_1 = \frac{1}{\delta^3} \cdot \Delta^3 P_0. \end{cases} \quad (1-4-4)$$

若令 $\delta=1/2^m$, 其中, m 为正整数, 利用上述公式可以高速地算出曲线上的点。若将上述公式用矩阵表示, 可得 4×3 差分矩阵

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ \frac{1}{\delta} \cdot \Delta P_0 \\ \frac{1}{\delta^2} \cdot \Delta^2 P_0 \\ \frac{1}{\delta^3} \cdot \Delta^3 P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ A\delta^2 + B\delta + C \\ 6A\delta + 2B \\ 6A \end{bmatrix}. \quad (1-4-5)$$

二、正则点与奇异点

为了更好地把握参数曲线的几何性质并对曲线形状进行控制, 有必要研究参数曲线的正则条件、奇异点性质以及产生奇异点的条件。设给定参数曲线

$$P(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)],$$

在 $t=t_0$ 处, 其一阶导数为

$$\dot{P}(t_0) = [\dot{x}(t_0) \quad \dot{y}(t_0) \quad \dot{z}(t_0)].$$

若满足 $\dot{P}(t_0) \neq 0$ 的条件, 则曲线在 $t=t_0$ 处为正则。正则的点称为寻常点, 不是正则的点称

为奇异点或奇点。上述正则性条件，意味着 $\dot{x}(t_0)$ 、 $\dot{y}(t_0)$ 、 $\dot{z}(t_0)$ 不同时为零，亦即满足

$$[\dot{x}(t_0)]^2 + [\dot{y}(t_0)]^2 + [\dot{z}(t_0)]^2 > 0.$$

对于曲线 $P(t)$ ($a \leq t \leq b$) 而言，若 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 的所有 r 阶为正的导数存在且连续，满足上述正则条件，则称此曲线为 C^r 级连续。

在曲线的正则点上，可以确定唯一的切线。但在奇异点处，则会出现种种异常的情况，如图1-6 a) 所示为具有尖点的情形。设参数曲线

$$x = \phi_1(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t, \quad y = \phi_2(t) = -3t^2 + 3t,$$

在 $t = 0.5$ 处，存在一个尖点，其坐标为 $[0.5, 0.75]$ 。在尖点处， $\dot{P}(t)$ 将不连续并等于零矢量，即 $\dot{x} = 0$ ， $\dot{y} = 0$ 。

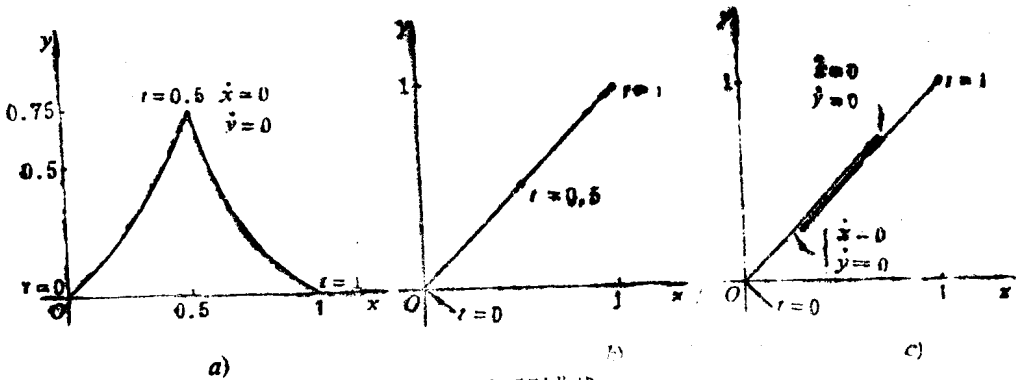


图1-6 非正则曲线

又如图1-6 b) 和 c) 所示为以参数 t 表示的直线；其中，图 b) 的直线为 $x = y = t$ ，因 $\dot{P}(t) \neq 0$ ，故曲线在整个区间上为正则；而图 c) 所表示的是同一条直线，其方程为

$$x = y = \phi(t) = 10t^3 - 15t^2 + 6t,$$

为了清晰起见，图中未按真实曲线描绘。由 $\dot{x} = 0$ 和 $\dot{y} = 0$ 的条件，可以求出两个奇异点，即当 $t = (5 \pm \sqrt{5})/10$ 时为奇异点。就是说，从起点 $t = 0$ 开始，随着 t 值的增大，直线上的点将沿直线向前移动；当 t 值增大到 $t_2 = (5 + \sqrt{5})/10$ 以后，随着 t 值增大到 $t = 1$ ，直线上的点又继续沿直线向前移动，直到终点 $t = 1$ 为止。这表明，在 $t = (5 \pm \sqrt{5})/10$ 时，曲线上出现奇异点。

由以上例子可知：对于同一条曲线，参数值与曲线上的点之间的对应关系可以是多种多样的，但要尽可能选择满足正则性要求的参数来描述。此外，作为特殊例子，也有曲线退化为一个点的情况。

三、参数三次曲线的形态

对于参数三次曲线

$$P(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1][A \ B \ C \ D]^T,$$

若指定 $t = 0$ 处的位置矢量 \dot{Q}_0 和切矢 \dot{Q}_0 ，以及 $t = 1$ 处的位置矢量 \dot{Q}_1 和切矢 \dot{Q}_1 ，则此曲线可以完全确定，即

$$\begin{aligned} A &= 2(\dot{Q}_0 - \dot{Q}_1) + \dot{Q}_0 + \dot{Q}_1, & C &= \dot{Q}_0, \\ B &= 3(\dot{Q}_1 - \dot{Q}_0) - 2\dot{Q}_0 - \dot{Q}_1, & D &= \dot{Q}_0. \end{aligned}$$

两条曲线，若始端与终端的位置矢量相同，且切矢方向一致，但切矢的大小不同，则此两曲线的形状也不相同。这说明，不仅切矢方向，而且切矢的大小，均对曲线形状有影响。

关于曲线的拐点，由曲率公式 $K = \frac{|\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}|}{s^3}$ 知，若曲率 $K=0$ ，则该点称为拐点。因此，

拐点实际上是 $\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}} = 0$ 的点。若不考虑 $\dot{\mathbf{P}} = 0$ 的点，设 g 为标量，则有 $\ddot{\mathbf{P}} = g\dot{\mathbf{P}}$ 的关系。这是一个关于 t 的二次方程式，参数 t 的变化范围为 $[0, 1]$ 。由此可知，参数三次曲线至多有两个拐点。参数三次曲线的形态如图1-7所示，其中包括正常、尖点、闭环及拐点等形态。

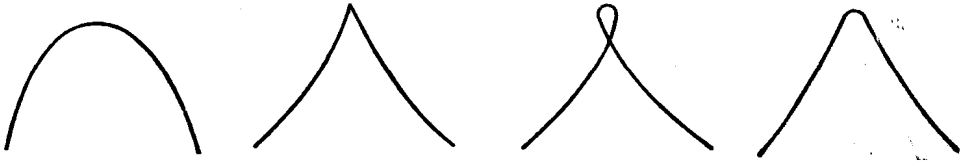


图1-7 参数三次曲线的几种形态

参数三次曲线的挠率为

$$\tau = \frac{[\dot{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{P}}]}{s^3 K^2}$$

由于

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}] = 3At^2 + 2Bt + C,$$

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}] = 6At + 2B,$$

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}] = 6A,$$

代入 τ 的公式，得

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}) \cdot \ddot{\mathbf{P}} &= \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3A_x t^2 + 2B_x t + C_x & 3A_y t^2 + 2B_y t + C_y & 3A_z t + 2B_z t + C_z \\ 6A_x t + 2B_x & 6A_y t + 2B_y & 6A_z t + 2B_z \\ 6A_x & 6A_y & 6A_z \end{vmatrix} \\ &= -12 \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

若上式等于零，则参数三次曲线为平面曲线。

§ 1-5 参数曲线的形状控制

一、曲线段的连接

设有两段曲线 $\mathbf{P}_1(t)$ 和 $\mathbf{P}_2(t)$ ($0 \leq t \leq 1$)，如图1-8所示，将此两段曲线光滑连接须满足的条件如下所述：

1. 位置连续条件

两段曲线必须在同一点上连接，故应满足如下条件：

$$P_x(0) = P_x(1). \quad (1-5-1)$$

2. 斜率连续条件

在连接点上, 设 $P_I(t)$ 与 $P_{II}(t)$ 的切矢大小为 α_1 与 α_2 , 由单位切线矢量相等, 可知应满足如下条件:

$$\dot{P}_x(0) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \dot{P}_I(1) = \lambda \cdot \dot{P}_I(1), \quad (1-5-2)$$

其中, $\lambda = \alpha_2/\alpha_1$.

3. 曲率连续条件

在两段曲线的连接处, 其曲率应连续变化, 故须满足如下条件:

$$\ddot{P}_x(0) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \ddot{P}_I(1) + \beta \dot{P}_I(1) = \lambda^2 \ddot{P}_I(1) + \beta \dot{P}_I(1), \quad (1-5-3)$$

其中, β 为任意标量。

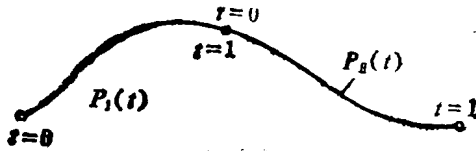


图1-8 曲线的连接条件

二、曲线的参数变换

对于参数曲线

$$P(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] [A \ B \ C \ D]^T,$$

一般来说, $t \in [0, 1]$ 。当设计时, 须将此曲线中的某一段, 例如 $t = t_0$ 至 $t = t_1$ 的一段取出

(图1-9), 取出该段曲线后, 还要进行参数规范化, 使之仍然由 0 至 1 变化。设新的参数为 t^* , 并且 $0 \leq t^* \leq 1$, 此时, 新的参数 t^* 与原来参数 t 之间有如下关系:

$$t = (1-t^*)t_0 + t^*t_1 = t_0 + (t_1 - t_0)t^*. \quad (1-5-4)$$

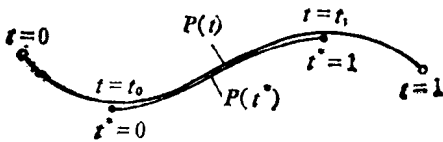


图1-9 曲线的参数变换

将此关系代入曲线公式并整理, 得

$$P(t^*) = [t^{*3} \ t^{*2} \ t^* \ 1] \begin{bmatrix} (t_1 - t_0)^3 A \\ 3(t_1 - t_0)^2 t_0 A + (t_1 - t_0)^2 B \\ 3(t_1 - t_0) t_0^2 A + 2(t_1 - t_0) t_0 B + (t_1 - t_0) C \\ t_0^3 A + t_0^2 B + t_0 C + D \end{bmatrix} \\ = [t^{*3} \ t^{*2} \ t^* \ 1] [A^* \ B^* \ C^* \ D^*]^T. \quad (1-5-5)$$

其一、二阶导矢分别为

$$\frac{dP}{dt^*} = (t_1 - t_0) \frac{dP}{dt}, \quad \frac{d^2P}{dt^{*2}} = (t_1 - t_0)^2 \frac{d^2P}{dt^2}, \quad (1-5-6)$$

其中, $0 \leq (t_1 - t_0) \leq 1$ 。由此可知, 切矢的大小为原来 (参数为 t 时) 曲线切矢的 $(t_1 - t_0)$ 倍。

参数变换尚可采用更为一般的方式, 例如采用双线性变换或同形变换。其变换关系可用下式所示的有理变换: