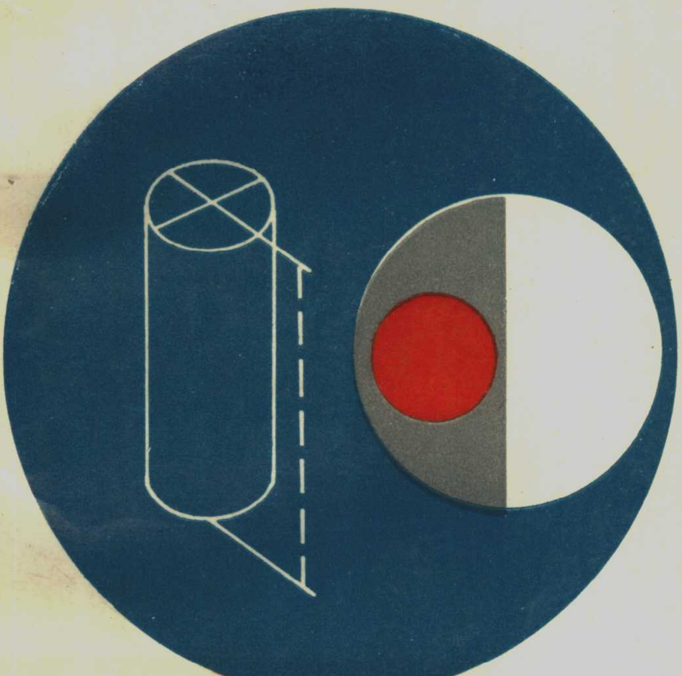
陈荣华　编著

# 数学素质提高捷径

## —初中数学概念与思维



科 学 普 及 出 版 社

# 数学素质提高捷径

## ——初中数学概念与思维

陈荣华　　编著

科 学 普 及 出 版 社

## 内 容 提 要

一个没有养成良好学习习惯的学生，日后将难以胜任繁重的学习任务。本书作者认为：数学素质的核心是啃概念的本领和思维品质的形成。因此，全书以初中教材为背景，深入浅出地讨论了以上两大问题，以帮助初中生扎实地掌握好数学的基本功。

本书编写上有别于国内现行的中学生读物，而是对数学学习中最难突破的、往往被人忽视的两大重点问题以浅显易懂的方式进行讲解，使之日后能轻松地学习高中、大学数学课程。本书适用于广大初中生、家长及教师。

（京）新登字026号

数学素质提高捷径

——初中数学概念与思维

陈荣华 编著

责任编辑：颜 实

封面设计：王铁麟

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京昌平百善印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：11.125 字数：245千字

1992年9月第1版 1992年9月第1次印刷

印数：1—3 600册 定价：6.60元

ISBN 7-110-02408-3/G·650

# 前 言

数学学习的直接目的，简言之，无非就是掌握知识，训练思维，并把两者结合起来，形成一种学习能力，形成良好的素质。正反两方面的经验，都一再表明：数学教育质量的高低，并不取决于教学内容的难度。数学教育改革几经反复以后，人们在反思中，逐渐清醒过来，把数学教育的重点，把教育改革的力量，开始聚集到理解基本概念和思维训练这两个焦点上来。当前急需解决概念学习和思维训练的方法问题。作者追求的目标和本书写作意图就在于此。

好方法带来“高效率”和“高质量”，不讲究方法，一味“拼时间”“拼体力”，必然是“低效率”，结果将是越学负担越重，越学头脑越死，数学学不好，还会拖其他学科的后腿。

本书分上下两编。上编通过解剖初中数学基本概念，具体研究了概念学习十二法，把通向概念学习方法宝库的条条航道展现在读者面前。因为任何数学理论，都不过是以概念为“元件”，精心构成的一个知识网络系统。因此，基本概念的学习及其方法，自然成为人们十分关注的事情。

下编研究了数学思维素质培养的方法和途径。思维素质从某种意义上决定着一个人思维能力发展的速度和水平。良好的思维素质使人终生受益，不良的思维素质，贻误一个人的前途。数学是“思维的体操”，担负着提高学生思维素质的特殊重任。

数学思维素质的指标，主要包括敏捷性、灵活性、严密性、深刻性、批判性和创造性，这六个方面相互联系，又各有区别。思维素质的培养必须与知识学习同时进行，同步发展，有重点、按计划、坚持不懈。

为了便于阅读，本书尽可能通过具体的例题，来指出方法和要领，避免理论上的过多阐述和论证。

作者的用意并非“奉送”“十二法”“六要素”，自知这不是唯一的最后的答案。方法是无穷无尽的发展过程。作者真心希望读者在“引进”别人的方法以后，加以改造和发展，使之形成“自己”的学习方法。只有当方法具有“自己的”特色之时，才真正是有效的好方法。

由于水平所限，错误难免，欢迎批评指正。

1992年于北京教育学院东城分院

# 目　录

附

# 上　　编

## 概念学习十二法

概念学习和思维训练，犹如打开数学大门的两把钥匙。只有掌握这两把钥匙，才能进入数学的大千世界。否则，将永远是数学的门外汉。

概念是数学思维的细胞。学习数学，要从学概念开始。培养数学能力，从培养啃概念的能力开始。有的人，学习很努力，数学成绩还是上不去，其原因之一，就是不懂得在基本概念上下功夫，没有掌握一整套学习概念的有效方法。基本概念不扎实，起码的东西没学会，判断、推理、论证便成了无本之木，无源之水。

在数学教学中，对于一些重要的概念，我们总是特别注意从以下四个方面来认识和理解，以达到掌握这些概念的目的。

一是概念的引入。解决概念的来源问题，引入的必要性和概念的形成过程。包括概念的抽象概括过程。

二是给概念下定义。把概念的本质属性及数量界限，用精炼严格的语言表述出来，解决该概念“是什么”和“什么是”的问题。

三是研究概念的有关性质。这些性质实际上是一个个定理，因为它们都是直接由定义经过简单的推导得到的，所以被称为性质。通过这些性质的学习，我们对概念的认识更具体、更丰富了。对概念本质属性的认识也就更加深刻更加清晰。

四是概念的应用。解决“有什么用处”和“怎样应用”的问题。

这里提到的四个方面，只是对一般情形来说的，并非每一个概念的学习都必须经历这样一个过程，更不意味着这四个方面平均使用力量。

在纵向深入的同时，概念学习还有一个横向扩展的问题。新概念不断引入，概念体系不断扩大、犹如一张无边无际的大网，向各个方向延伸开来。

概念学习的核心问题是“理解”。根据不同特点，采取灵活的学习方法，是概念学习必须遵守的一个原则。

从定义入手，是学习概念最常用的方法之一。如结构分析法、特征分析法、“两面烤”等均属此列。

一个概念的学习，总是要经过从具体到抽象，再从抽象到具体的过程。这是同一过程的两个不同阶段。在概念的引入和形成阶段，常采用抽象概括法。从抽象到具体，就是具体化法，或称特殊化法。

有的概念内涵丰富，联系广，应用多，地位重要。对于这些概念，就要下一番分解与集成的功夫。先把定义拆开，作微观透视。再组合起来，作宏观理解。先熟悉单个“零件”的性能，再掌握整体功能。

有的概念是贯穿性的。小的贯穿几章内容，大的贯穿整个学科，甚至贯穿几个学科。需要经过多次扩充，多个发展阶段，长时间的深入过程，才能完成认识。对于这种概念，可以对比不同定义形式，加强概念间联系，深入揭示本质属性。

总之，要根据概念的不同定义方式，结构特征，形成过程，应用特点，不同的地位与作用，采用不同方法来学习，以求取得最佳效果。

# 第一讲　特征分析

## 1．“名”与“形”

我们认识事物，往往从该事物的特殊“模样”，即它的外部特征入手．这是由于有些事物的外部模样奇特，或说特征鲜明的缘故．长颈鹿因颈长而得名．确实没有别的什么动物的颈长能跟长颈鹿的颈长相比的了．一提起大象，我们就自然想起它的细长鼻子，大扇面似的耳朵．动物世界，千奇百怪．牛马分明，虎豹有别，都在于各有其特征．因此，特征分析，就成为人们认识事物的基本方法之一．

数学中，有许多概念，它们的名称概括了它们的最主要的特征．例如，“三角形”，“平行线”，“角平分线”，“倒数”，“等差数列”，“等比数列”，等等．对于这类概念，由于它们的“形”“名”统一，“名”符其实，我们可以“看形知名”，“顾名思义”，给学习带来方便．

数学中，更多的概念，它们的名称概括了它们的含义，而不直接体现它们的“外形”．“外形”也不直接体现名称．例如，面对一个代数式，我们不是一眼就能从“外形”作出判断，它是不是“恒等式”．只有通过一定的推理后，才能做到这一点．“一元二次方程”的概念，“同类项”的概念，都是这样．对于这些概念，我们还是可以顾名思义，而不能直接“看形知名”了．

还有诸如“函数”、“实数”、“虚数”等概念的名称，都是从外文翻译过来的名称．它们的“名”与“形”不沾“亲”、不相干．对于它们，顾名思义也行不通了．但是

它们仍有自己的本质属性。这些属性就成为它们的特征。这时，只有深入到它们的内部，才能把握住它们的特征。

**2．关于一元二次方程**

方程1　$x^2-3x+1=x^2+2x-1$

方程2　$x^2+4=x^2+4$

方程3　$\dfrac{x^3-1}{x-1}=1$

以上三个方程是一元二次方程吗？

要回答这个问题，就得研究一元二次方程的特征。

（1）一元二次方程是整式方程；

（2）一元二次方程只含有一个未知数，并且未知数的最高次幂为二次幂；

（3）一元二次方程有标准形式：$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）。

上述方程1和2都具备了特征（1）和（2）。但都不具备特征（3）。因此，它们都不是一元二次方程。

事实上方程1，移项后化为$5x-2=0$。方程1是一元一次方程。

方程2　移项后，未知数消失了。得$4=4$。这是一个恒等式。

方程3　$\dfrac{x^3-1}{x-1}=1$，约分化简后可化为$x^2+x=0$。但化简前它不是整式方程。即不具备一元二次方程的特征(1)。因此方程3也不是一元二次方程，而是分式方程。

这里产生一个疑问：为什么方程1和方程2，必须变形后判断它们都不是一元二次方程，而方程3，必须就原方程作出判断，它是分式方程，而不是一元二次方程？

对于整式方程来说，方程中移项，方程两边乘除不为零的同一个数，均是同解变形。所以整式方程可以通过这两种变形，化为标准形。而其他方程，则不能。换句话说，整式方程都有统一的标准形式，作为其特征。

整式方程还有一个基本定理："一元$n$次方程有$n$个根"。这也是相对于标准形式来说的。一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两个根。如果把$x^2-3x+1=x^2+2x-1$划入一元二次方程；把$x^3-x=x^3+x-1$划入一元三次方程那么，它们分别应该有两个和三个根。事实上，它们都只有一个根。因此，把它们划入一元一次方程才是对的。这样，就使得方程的次数与方程根的个数相一致。这也是数学自身的一种和谐性。

经过以上讨论，我们可以这样来定义一元二次方程：整式方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）称为一元二次方程。

还要指出一点，在利用求根公式、应用判别式以及利用根与系数关系时，都必须先把方程化成标准形式，才能准确地指出$a$、$b$、$c$的值。

我们不能满足于认识事物的共性。更需要注意研究事物的特殊性。一元二次方程的共性决定着它的一般解法——公式法。还有许许多多的特殊的一元二次方程。由于它们的特殊性，决定着它们还有简便得多的特殊解法。特征分析应包括共性分析和特性分析这两个方面。这样，才有更大的意义。

例如，设$a$、$b$、$c$为有理数，且$a+b-c\neq 0$，试证方程（$a+b-c$）$x^2+2bx+$（$b+c-a$）$=0$的根也为有理数。

这个一元二次方程的特征是二次项系数与常数项之和等于一次项系数：（$a+b-c$）+（$b+c-a$）$=2b$。所以$x_1=-1$是方程的一个有理数根，由根与系数关系，得另一根

$x_2=\dfrac{b+c-a}{a+b-c}$显然也是有理数根。

再如，求解方程$x^4-2ax^2+x+a^2-a=0$

如果死盯住是一元四次方程，这一特点，那么，解起来就费事了。如果换一个角度。就可以发现它的特征。可以看成关于$a$的一元二次方程：$a^2-a(2x^2+1)+(x^4+x)=0$

解得　　$a=\frac{1}{2}[(2x^2+1)\pm(2x-1)]$

即　　$a=x^2+x$　或　$a=x^2-x+1$

再解关于$x$的一元二次方程$x^2+x-a=0$

得　　$x_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4a}$，$x_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4a}$。

解关于$x$的一元二次方程$x^2-x+1-a=0$

得　　$x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4a-3}$，$x_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4a-3}$。

所以原方程的根是：

$$x_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4a+1},$$

$$x_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4a+1},$$

$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4a-3},$$

$$x_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4a-3}.$$

### 3．关于恒等式

“恒等式”是一个基本概念，似乎它的特征就在“恒等”二字上。然而，往往就在“恒等”二字的理解上出偏差。

若问等式$\dfrac{a^2}{a}=a$是不是恒等式？

回答的错误率总是惊人的高。

一部分同学认为这不是恒等式。理由是，既然是“恒等式”，那就意味着等式两边的字母，不论用什么值代入，等式两边的值都应该相等。否则就不叫“恒等式”。但是，当$a=0$代入时，左边$\frac{a^2}{a}$无意义，而右边$a$有意义，因而$\frac{a^2}{a}=a$不是恒等式。

另一部分同学认为$\frac{a^2}{a}=a$是恒等式，但说不出充足的理由。

究竟什么是恒等式呢？恒等式的本质特征是什么呢？

“如果两个代数式，不管其中的字母取（使两式都有意义的）什么值，这两个代数式的值都相等时，我们就说这两个代数式恒等”，“表示两个式子恒等的等式叫做恒等式”。

请注意，这里括号内的条件——使两式都有意义的值，是必不缺少的。

$\frac{a^2}{a}$与$a$都有意义的前提是$a\neq 0$。此外的任何值代入$\frac{a^2}{a}$与$a$都相等。因此，$\frac{a^2}{a}=a$是恒等式。

$x^2=4$不是恒等式。因为$x$取任何值时等式两边都有意义，而只有两个值$x=\pm 2$代入，才能使等式成立。所以它不是恒等式，而是方程。

又如$\sqrt{a^2}=a$也不是恒等式。因为$a$取负值时，就不相等。

试问下列各式中哪些是恒等式：

（1）$\sqrt{x^2}=-x$（$x<0$）；

（2）$|x|=x$（$x\geqslant 0$）；

（3）$\sqrt[3]{x^3}=x$；

（4）$\lg ab=\lg a+\lg b$；

（5）$a^{\log_a N}=N$

（6）$x^2+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$。

很显然，（1）—（5）都是恒等式；（6）不是恒等式，而是方程。

**4．一点启示**

有这样一则报道，某次，招待外国旅游者的一桌宴席上，茅台酒无人问津。相反，竟有多人向服务员索要凉白开水。由于事前没有准备，忙坏了在场的服务员。

事后了解，这些外宾中，有多人是专来“吃中国菜”的。他们认为只有佐以不带任何味道的白开水，方能不串味地尝出每道中国菜的美味。有的外宾出于保健和宗教的原因从不沾酒。个别的外宾，要白开水，是饭前服药。

佳酒迎贵宾，可谓盛情。不看场合和对象反失礼了。

我们在进行概念特征分析时，不注意前提条件，不注意揭示本质属性，也会闹出笑话来的。

还有，此团外宾的品尝之心，品味之术，令人钦佩。这种追求真知灼见的探索精神，这种科学方法，也是与数学学习相通的。

## 思 考 题 一

1．判断下列各题的是非

（1）一次函数的图象都是直线，直线都是一次函数的图象；

（2）边对应相等的多边形全等；

（3）角对应相等的三角形相似；

（4）角对应相等的多边形相似；

（5）$\frac{\sqrt{2}}{x-1}$是单项式；

（6）不循环的小数是无理数；

（7）无理数是不能用分数表示的数。

2. 如果关于$x$的方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两个根是$\alpha$和$\beta$，那么方程$ax^2-bx+c=0$的两个根是

（A）$-\alpha$和$\beta$；　　（B）$\alpha$和$-\beta$；

（C）$-\alpha$和$\beta$或$\alpha$和$-\beta$；（D）$-\alpha$和$-\beta$。

3. 已知二次三项式$(a-3)x^2-(a-3)x+1$可以表示成一个关于$x$的完全平方式，那么$a$的值是

（A）7；（B）8；（C）3；（D）3或7

4. 已知$\lg x$的首数是1，则$x$的取值范围是＿＿＿。

5. 如果质数$p$、$q$满足关系式$3p+5q=31$。那么

$\log_2[p/(3q+1)]$的值是＿＿＿。

6. 已知$A=3\lg a+\lg b$，其中$a$、$b$是质数，且$b-a=1989$，求$A$值的范围。

7. 若$x^2+bx-1=ax^2+c$，就下列三种情形，分别讨论$a$、$b$、$c$的取值或范围。

（1）上式为恒等式；

（2）上式为一元一次方程；

（3）上式为一元二次方程。

# 第二讲　结构分析

从结构入手，是人们认识事物的方法之一，在数学中也是这样。

**1．关于"结构"**

数学中的许多概念，是通过指出它的结构来定义的：

"只含有加、减、乘（包括乘方）运算的代数式叫做多项式。"

"$b^2-4ac$叫做实系数一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的判别式。"

掌握了"结构"，也就一定意义上掌握了这些概念。

掌握"结构"，无论是"整体结构"，还是"局部结构"；是"外部结构"，还是"内部结构"，这里说的"结构"的含义，主要有"组成成份"和"联结方式"这样两个方面。

例如正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$的结构，是一个等比式。三个比的分子分别是三角形的三条边长，分母是对应角的正弦值。

再如"三角形内心"的结构，是指三角形三个角平分线的交点。

结构分析有时也叫结构特征分析。"结构"与"特征"是密切联系着的，很难完全区分开来，又是侧重点稍有不同。"结构"比较注重"组成"，而"特征"更多注重的是"性质"。