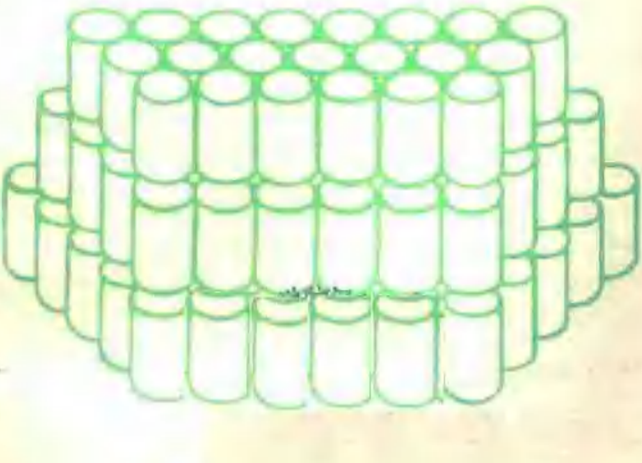
# 堆垛计算手册

DUIDUO JISUAN SHOUCE

洪 伯 阳





湖北人民出版社

# 堆垛计算手册

洪伯阳

湖北人民出版社

堆垛计算手册

洪伯阳

·

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

汉阳县印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　4.5印张　100,000字

1978年12月第1版　1978年12月第1次印刷

印数：1—8,000

统一书号：15106·226　定价：0.34元

# 前　言

随着工农业生产的发展，市场的繁荣，仓库里堆积的商品日渐增多，例如一个公社或县级的普通日杂公司，陶瓷用品竟可达到几万甚至几十万件之多；一个瓷器厂一个月可生产几百万件产品．象这样每堆有成千上万件商品，要进行清点，计算件数，其工作量是很大的．据我们在本省一些专县和江西省九江、景德镇地区的参观了解，目前所采用的堆垛计算方法，公式繁杂，工人不易掌握，功效不高，已不能适应生产发展的需要．为了解决这个问题，近几年来，在工人师傅的启发和协助下，我们编写了这本《堆垛计算手册》，介绍了更简明且具有普遍意义的堆垛计算公式，列出了长方垛、三角垛、梯形垛以及单面靠墙和双面靠墙的堆垛计算表格．只要适合本表的使用范围，就可以迅速查出每堆在十万个以内的结果来．经试验表明，在每堆一千件以上的堆垛计算中，可比原来的计算方法提高效率几十倍．并且本书提供的方法简便，易于掌握，不仅可以提高工作效率，还可以改进工作方法，可供许多有关工厂和商业部门的同志作工作手册使用．也可作中学数学教学的参考资料．

本书是在华中师范学院黄石分院党委关怀和鼓励下写成的．初稿完成后，分院数学系的老师们曾提出了不少宝贵的意见；在送湖北人民出版社审阅过程中，还得到了洪湖县永丰公社花古分店和新洲县城关高中数学组的同志们的帮助．在此向他们表示感谢．

本书完稿后，虽然经过一再修改，但由于编者水平有限，难免有谬误和不妥之处，因此，希望广大读者，特别是从事与堆垛计算有关工作的同志批评指正.

编　者

1978 年 3 月

# 目　录

# 一、堆垛计算概述

## （一）从沈括的隙积术谈起

关于堆垛计算问题，早在宋代的时候，我国数学家沈括(1031—1095)在他写的《梦溪笔谈》一书中就研究了这种问题.

《梦溪笔谈》第十八卷中有一段原文是这样写的：

“算术求积尺之法，如刍萌①、刍童②、方池、冥谷③、堑堵④、鳖臑⑤、圆锥⑥、阳马⑦之类，物形备矣，独未有隙积⑧一术．古法，凡算方积之物，有立方，谓六幂皆方者，其法再自乘则得之．有堑堵，谓如土墙者，两边杀，两头齐，其法并上下广折半以为之广，以直高乘之，又以直高为股，以上广减下广，余者半之为勾，勾股求弦，以为斜高．有刍童，谓如覆斗者，四面皆杀，其法倍上长加入下长，以上广乘之；倍下长加入上长，以下广乘之；并二位，以高乘之，六而一．隙积者，谓积之有隙者，如累棋、层坛及酒家积罂⑨之类．虽似覆斗，四面皆杀，缘有刻缺及虚隙之处，用刍童法求之，常失于数少，余思而得之．用刍童法为上位、下位，别列下广，以上广减之，余者以高乘之，六而一，并入上位.”

〔注释〕 ①刍萌——长方楔． ②刍童——平截长方楔四棱截头． ③方池、冥谷——倒平截长方楔． ④堑堵——等腰梯形直柱体． ⑤鳖臑——三棱锥． ⑥圆锥——圆

锥体． ⑦阳马——四棱锥． ⑧隙积——相同形状物体堆放成的长方形堆垛(如坛子、瓦罐等即可堆成)．沈括研究得到了计算这种长方形堆垛的总数方法，称为隙积术．沈括得出的求全堆总个数的计算公式经过整理，大致是这样的：

$$S=\frac{h}{6}\left[(2q+b)p+(2b+q)a+(b-q)\right]$$

如设总个数为$S$，底层宽$a$个，长$b$个；顶层宽$p$个，长$q$个；共有$h$层．

这个公式怎样得来，《梦溪笔谈》中没有交待． ⑨罂(读因)——酒坛子．

〔原文翻译〕 算术中求物体体积的方法，如刍萌、刍童、方池、冥谷、暂堵、鳖臑、圆锥、阳马等，各种物体形状差不多都有了，唯独没有隙积这一算法．古代的方法，凡算立方体的体积，有立方；对于立方，即是六个面都是正方的物体，它的体积以一边的自乘再乘求得之．还有暂堵，就是象土墙那样的物体，两个墙面是斜的，两头的面是直立的，它的截面积的算法是把上下底面宽度的和的一半作为平均宽度，乘以高即得截面积．

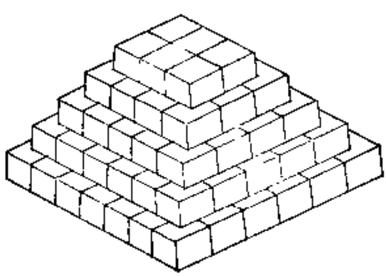
另外，把直高作为股，从上底面的宽减去下底面的宽，将得出的差数的一半作为勾；用勾股定理算出弦，就是斜高．还有刍童，就象扣在地上的斗那样的物体，四个侧面都是斜面，它的体积的算法是先把上底面的长乘二加下底面的长，用上底面的宽乘它；再把下底面的长乘二加上底面的长，用下底面的宽乘它；合并以上两项，乘以高，再取其六分之一即得结果．至于所谓隙积的就是有空隙的堆垛体，象堆起来的棋子、逐层堆放的坛和酒店里垛起来的酒坛子一类的东西．它们虽象复斗，四个侧面也都是斜的，但由于它的边缘有虚缺和空隙的地方，因此用刍童法来算它，得出的数目一般比实际的少．我想出一

个算法. 用刍童法算得的结果作为第一项，另列一个第二项：下宽减去上宽，把这个差数乘以高，取其六分之一，加入第一项.

以上大致介绍了沈括研究堆垛问题的简单情况，他得出长方形堆垛的算法虽然没有给以证明，但方法是正确的. 沈括在十一世纪就能发现这一数学公式，不仅表明沈括是一个杰出的数学家，而且也是我们中华民族在数学史上的光荣一页.

## （二）有关堆垛计算的实际问题

某些工厂或商业部门的仓库存放某种物品时，为了避免物品(如玻璃制品、陶瓷制品以及不宜倒置的物品等)的损坏，同时又要考虑到尽可能利用空间多存放一些物品，使仓库能够得到比较充分的利用. 因此，在堆放方法上就存在一个科学性问题. 在这方面，有实践工作经验的人就把这种类型的物品层层堆积，底层排成一个长方阵，以上逐层的长宽各减少一个，堆成一个长方台的形状(如图 1). 这样一来，虽解决了上面两点要求，但怎样去计算这堆物品的总数呢？这就是一个应考虑解决的实际问题.



图一、收缩幅度为(1，1)的长方形堆垛

前面已经介绍了沈括计算长方垛的全堆总个数的公式是：

$$S=\frac{k}{6}\left[(2q+b)p+(2b+q)a+(b-q)\right] \qquad (1)$$

这个公式应用起来是不方便的，故各地很少应用这个公式去计算长方形堆垛的总个数.

华罗庚同志在《从杨辉三角谈起》一书中写出了沈括公式(1)的又一形式，即

$$S=\frac{k}{6}\left[2k^2-3(a+b+1)k+6ab+3a+3b+1\right] \qquad (2)$$

这个公式项数较多，难以记忆，故仍然不便于为实际工作者掌握和应用.

一九七三年底前后，我们曾到黄石市"陶瓷门市部"仓库和"大冶县日杂公司"陶瓷仓库等单位参观学习，据这些单位工作的同志告诉我们说：对这种长方台形堆垛总个数是用逐层计算然后再相加的办法. 即全堆总个数

$$S=ab+(a-1)(b-1)+(a-2)(b-2)+\cdots+(a-k+1)(b-k+1) \qquad (3)$$

这需要作出 $k$ 次乘法及 $k-1$ 次加法计算，当层数 $k$ 较大时，计算的工作量就比较大了.

一九六四年前后，黄石市"陶瓷门市部"曾派人去江苏省宜兴县学习，从宜兴带回来的资料中，关于计算长方台形堆垛总个数的公式仍是按(2)式计算的. 由于不便掌握，故他们目前仍用(3)式计算.

我们在"大冶县日杂公司"陶瓷仓库参观学习时，那里的同志还提出了这样一个问题：在存放钵子时是一行一行摆成长方形放的，每行又都是一个套着一个重叠着的；设最底层共有 $a$ 行，每行有 $b$ 个钵子；以上逐层行数减少一个，每行的钵子数

逐层减少 $d$ 个，还是堆成长方台的形状；共有 $k$ 层，顶层有 $p$ 行，每行有 $q$ 个，问全堆的钵子总数有多少个？

这样的堆垛问题的计算显然困难一些，在后面我们将要介绍它的计算方法．

## （三）计算长方垛的简便公式与推广

如上所述，计算长方形堆垛的公式(1)与(2)，既不便于记忆，也不易于为广大实际工作者掌握，而(3)式的计算工作量又较大．面对这种情况，我们进行了多次反复的研究，得出了计算长方形堆垛总个数的简便公式是：

$$S=\frac{k}{2}(pq+ab)-C_k^3 \qquad (4)$$

此式中 $pq$ 是顶层个数，$ab$ 是底层个数，$k$ 为层数，$C_k^3$ 是 $k$ 个元素取 3 个的组合数，即

$$C_k^3=\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}$$

它只与层数 $k$ 有关．在我们计算长方形堆垛的总个数时，这个 $C_k^3$ 称之为相对差数．为了使计算简化，我们已列出 100 层以内的所有相对差数表(见表二)．

现在，我们可用很通俗的语言将计算长方形堆垛总个数的公式表写如下：

$$\text{全堆总个数}=\frac{\text{层数}(\text{顶层个数}+\text{底层个数})}{2}-\text{相对差数}$$

这就是用文字形式叙述的公式(4)．它比较容易为文化水平低一些的实际工作者所掌握和应用．不仅是它的计算次数比(1)式和(2)式的计算次数要少一些，而且特别是它比公式(1)和(2)都要容易记忆得多．后面我们还将要指出，公式(4)是计算长方形堆垛总个数的各种公式中最本质的一种形式．

我们在前段已经提到，大冶县日杂公司的同志曾提出一个堆钵子的计算问题．前已假定最底层共有 $a$ 行，每行有 $b$ 个钵子；以上逐层行数减少一个，每行的钵子数逐层减少 $d$ 个，还是堆成长方台的形状；共有 $k$ 层，顶层有 $p$ 行，每行有 $q$ 个，那么全堆钵子总数怎样去计算呢？对于这个问题，经过研究我们得出了与公式（4）类似的公式．如果仍设全堆钵子的总个数为 $S$，则可以证明

$$S=\frac{k}{2}(pq+ab)-d\cdot C_k^3 \tag{5}$$

这里 $d$ 是每行钵子逐层减少的个数．

不仅如此，对于更一般的长方形堆垛，底层宽 $a$ 个，长 $b$ 个；以上逐层宽减少 $e$ 个，长减少 $d$ 个，顶层宽 $p$ 个，长 $q$ 个；共有 $k$ 层，象这样的堆垛的全堆总个数 $S$ 我们仍可得出它的公式为

$$S=\frac{k}{2}(pq+ab)-d\cdot e\cdot C_k^3 \tag{6}$$

只要将公式（4）、（5）、（6）比较一下，我们显然可以看出：特别地，当 $e=1$ 时，公式（6）就变成了公式（5）；当 $d=e=1$ 时，公式(6)、公式（5）就都变成了公式（4）．正因为如此，我们才肯定说公式（4）是计算长方形（包括正方形）堆垛总个数的各种公式中最本质的一种形式，它反映了求长方形堆垛总个数的一般规律．

## （四）解决某些存在问题的建议与方法

近几年来，我们参观访问了武汉、黄石和省内的某些专县以及江西省景德镇和九江地区的某些有关工厂和单位，使我们学习到很多从书本上学不到的东西．在学习的同时，我们也初

步感到目前还存在有关堆垛的一些实际问题有必要研究和解决. 为了后面叙述的方便，现在先引入一个概念.

**定义** **如果一个长方形(包括正方形)堆垛底层宽 $a$ 个，长 $b$ 个；以上逐层宽减少 $e$ 个，长减少 $d$ 个，我们则称这个长方形堆垛的宽缩幅度为 $e$，长缩幅度为 $d$. 并简记其收缩幅度为 $(e, d)$.**

下面分三个方面谈谈有关的问题和解决这些问题的建议和方法.

1. *怎样充分利用仓库*

无论是工厂还是商业部门，都需要存放产品(或商品). 今以陶瓷器为例，陶器一般可露天存放，仓库代价不高. 而瓷器(特别是高档贵重瓷器)不仅不能露天存放，而且更应注意堆放的安全. 要想充分利用仓库，必须将空间尽可能利用，可见堆高与产品安全矛盾. 为了说得具体一些，再举景德镇某大瓷厂堆放茶壶为例：他们用两种方法堆放. 一是稍倾斜靠墙堆放，这样可以堆得高；二是四面不靠墙堆放，这样一般采用收缩幅度为(1, 0)的堆放法，高度只放五层. 很明显的是不能指望都靠墙堆放. 因此四面不靠墙应如何堆放为宜，就值得研究了.

由于茶壶是两头小、中间大，如果堆放时是放成收缩幅度为(1, 1)的长方垛，则会放不稳妥. 根据这种实际情况，我们建议可采用收缩幅度为(1, 2)长方垛放置茶壶，这样放上十几层甚至二十层也是很安全的，这样一来，只要底层长为宽的2～4倍，就可很显著的节约仓库的使用面积，从而也就在保证茶壶安全的前提下，达到了充分利用仓库的目的.

至于收缩幅度为(1, 2)的长方垛怎样计算其全堆总个数，后面将会介绍.

应该说明，上面是以堆放茶壶为例的，对于不同种类的物

品则应分别灵活处理．如对高级瓷花瓶则可堆成收缩幅度为(1，1)的长方垛；对茶盘则可采用湖北大冶县堆钵子的办法放成收缩幅度为(1，4)或(1，5)的长方垛．此外，还有些物品可以放成三角垛、梯形垛等等．其点数方法都要一一介绍．

2．堆垛计算的简便方法

根据各种不同物品的特点，可能放置成不同类型的堆垛，如长方垛、三角垛、梯形垛、两面靠墙或一面靠墙的长方垛；在四面都不靠墙的长方垛中，还可以采用各种不同的收缩幅度．那么这些不同类型的堆垛怎样点数简便一些，这又是一个值得研究的问题．

关于堆垛点数问题，许多有关的工厂和商业工作者经常会遇到，如月终盘存和季度盘存，则要用较多的人力和时间．为了节约人力和时间，我们进行过多次的、反复的研究．上面讲的公式(4)、(5)、(6)，虽然在解决长方形堆垛总个数的计算上比公式(1)、(2)简便一些，但还是要作几次四则运算．为了进一步简化计算手续，我们又将“相对差数”$C_i^3$列成表，算出一百层以内的相对差数表(即表二)．这样又可减少三次乘除运算．那么是否可以更进一步的解决这个问题呢？

为了能够让数以万计的与堆垛计算问题有关的实际工作者省去大量的计算工作，我们就更进一步把计算长方形堆垛总个数逐层列成表格，每计算一堆用不了半分钟就可以查表得出全堆总个数．特别应该提到的是：此表不仅对收缩幅度为(1，1)的长方垛能够适用，而且对收缩幅度为(1，$d$)和($e$，$d$)的长方垛以及对三角垛、梯形垛等均可适用(用法在后面介绍)．这样一来，只要这本小册子出版后，就能让我国广大的与堆垛计算有关的实际工作人员提高工作效率几十倍．

3．在码堆方面改进工作方法

前面已经可以看出，许多物品怎样码堆不仅与物品安全、仓库利用、点数简便有关，我们同时还考虑到，怎样码堆与改进工作方法有密切的关系.

近几年来，我们通过到某些工厂和商业部门参观学习了解到将物品码堆时，带有较大的随意性，具体地说就是将多少件物品码成一堆，底层长宽各多少，共码几层？事先并未周密考虑，故在码好堆后需要计算件数. 我们建议可作如下改进：在码堆前先计划好将多少件物品码成一堆，比如将 1000 件、2000 件码成一堆，或将 5000 件、10000 件码成一堆，这样心中有数，盘点时就很容易了.

那末，将一个固定的件数(比如 1000)码成一堆，怎样码法呢？也就是底层长和宽要多少，共码几层才恰好适合这个预先固定的件数呢？关于这方面，我们列出了一个“表四”，可以称之为“反堆垛表”，它提供了从 500 到 60000 之间任何整件数(即无零头数，如 500、1000、4000、10000 等数都是)码成一个收缩幅度为(1，1)的长方垛的堆放方法. 可见表四不仅可以提高工作效率，而且还可以改进工作方法.

## 二、公式的证明

对于第一段中提出的求长方形堆垛总个数的计算公式(4)、(5)、(6)，本来可以用高阶等差数列的知识来加以证明. 为了能让与堆垛计算有关的广大实际工作者便于看懂，因此想尽可能写得通俗一些. 我们在这里不引入“高阶等差数列”的概念，而采用了极初等的方法和数学知识来作出公式(4)、(5)、(6)的

证明. 尽管这三个公式的证明方法类似，还是将它们都写出来。为此，今先介绍一些简单的预备知识.

## （一）预备知识

1. 等差数列求和公式

设等差数列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n$$

的和是 $S_n$，则有

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2} \tag{1}$$

这个公式的证明可在一般的"初等代数"书中找到，这里不再给以证明.

2. 自然数平方求和公式

设 $1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=S$，则

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

证明　根据三次恒等式

$$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1,$$

我们得到

$$k^2=\frac{1}{3}[(k+1)^3-k^3-3k-1]$$

再将 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 依次代入上式，就有

$$1^2=\frac{1}{3}(2^3-1^3-3\cdot 1-1),$$

$$2^2=\frac{1}{3}(3^3-2^3-3\cdot 2-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1)^2=\frac{1}{3}[n^3-(n-1)^3-3(n-1)-1]$$

$$n^2=\frac{1}{3}[(n+1)^3-n^3-3n-1]$$

现在将上面一串等式两边分别相加就得到

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{3}[(n+1)^3-1^3-3(1+2+\cdots+n)-n]\\&=\frac{1}{3}[n^3+3n^2+3n-\frac{3n(n+1)}{2}-n]\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{2n^3+6n^2+6n-3n^2-3n-2n}{2}\right)\\&=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

于是(2)式即得证明.

## (二) 简便公式的推导

现在我们就来对第一段中计算长方形堆垛总个数的公式(4)以及推广后的公式(5)与公式(6)加以严格的证明.

1. 第一段公式(4) 的证明

首先注意，由于已设长方形堆垛底层宽 $a$ 个，长 $b$ 个；顶层宽 $p$ 个，长 $q$ 个；共有 $k$ 层.可见 $p=a-k+1$, $q=b-k+1$. 如果令 $S$ 为全堆总个数，则有

$$\begin{aligned}S&=ab+(a-1)(b-1)+(a-2)(b-2)+\cdots\\&\quad+(a-k+1)(b-k+1)\\&=ab+(ab-a-b+1^2)+(ab-2a-2b+2^2)+\cdots\\&\quad+[ab-(k-1)a-(k-1)b+(k-1)^2]\\&=kab-[a+2a+\cdots+(k-1)a]\\&\quad-[b+2b+\cdots+(k-1)b]+[1^2+2^2+\cdots+(k-1)^2]\end{aligned}$$

至此，再注意应用前面的预备知识，我们有

$$S=kab-\frac{k(k-1)a}{2}-\frac{k(k-1)b}{2}+\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}$$