国家理科基地教材

泛函分析基础

刘培德　编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书以简短的篇幅叙述了线性泛函分析的基础理论. 全书共分5章. 按章序分别讲解度量空间和赋范空间的拓扑知识与结构性质、有界线性算子和有界线性泛函的基本定理、共轭空间与共轭算子、Hilbert 空间的几何学以及线性算子的谱理论. 本书注重阐述空间和算子的基本理论, 取材既有简洁的一面又有深入的一面, 并适当引入了自反空间、一致凸空间等较新的内容, 在突出基本理论系统的同时, 有选择地叙述了在其他学科分支的应用.

本书可作为综合性大学、师范院校的理科各专业教材或参考书, 也可作为工科有关专业的研究生教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析基础/刘培德编著. —北京: 科学出版社, 2006
(国家理科基地教材)

ISBN 7-03-016375-3

I.泛… II.刘… III.泛函分析-高等学校-教材 IV.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 123338 号

责任编辑: 姚莉丽 祖翠娥 / 责任校对: 包志虹
责任印制: 安春生 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年1月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2006年1月第一次印刷 印张: 14
印数: 1—4 000 字数: 270 000

定价: 21.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换<双青>)

前　言

在从19世纪向20世纪转折的时期，分析数学中出现了抽象化的趋势，探求其中结论与方法的一般性和统一性是它的突出特点，泛函分析就是在这一进程中产生的．这一趋势的出现并不是偶然的，一方面它反映了数学中积累的素材已经足够丰富，并且不同学科(包括经典分析、变分学、积分方程等)的某些对象之间显示了思想上和方法上的相似之处,需要加以归纳、整理和总结.另一方面它反映了一种愿望：建立一套理论，能够对已有的或将要出现的同种类型的对象运用统一的方法去处理．这些愿望由于早期在数学物理和量子力学等学科中的成功运用而得到有力的支持．事实证明这些类型通常就是具有代数结构和拓扑结构的集合，而这里的方法则是代数的、几何的、分析的以及不断引入的新方法的综合运用．几十年来的历史告诉我们，泛函分析在其发展过程中保持了这一特色和风格,它不断地从其他学科领域吸取新鲜材料，通过加工和升华形成带系统性的新的思想和方法，然后应用到更广泛的范围内去解决理论的和应用的问题．这就无怪乎纯粹数学和应用数学的几乎所有学科都和泛函分析有着广泛的联系．从微分方程的现代理论、调和分析、随机过程与随机分析学、计算数学、逼近论、规划与优化、控制论、现代物理到计算机科学、生物数学、经济数学等无不渗透着泛函分析的思想与方法．时至今日，泛函分析已形成内容丰富、方法系统的理论体系，但它仍在蓬勃地发展着，同时也是从事数学理论研究和实际应用的人们不可缺少的一门学科．

对于泛函分析的内容可以作不同形式的分类，如依照所研究的算子是否为线性区分为线性泛函分析与非线性泛函分析，也可以依照基本空间的拓扑性质分为度量空间上的和一般拓扑空间上的泛函分析．但就实质而言，泛函分析应该包括三部分内容：空间理论、算子理论以及作为二者与其他学科相互联系的应用，三者有机地结合在一起．本书是为高年级大学生编写的教材，由于讲授时间所限，仅限于讲解度量空间上的和线性的泛函分析．希望以简短的篇幅叙述这一领域的基本思想和方法，并提供给相关学科基本的工具，以便应用．

我们一开始(第1章)便铺开了度量空间、赋范空间与内积空间的公理体系并讨论它们彼此的联系，介绍了度量空间上的点集拓扑和赋范空间的结构知识．对于

泛函分析的基本定理(第 2 章), 包括关于有界线性算子和有界线性泛函的主要结论, 我们给出了尽可能广泛的表述形式和尽可能简捷的证明. 较为详细地介绍了 Banach 空间与其一次、二次共轭空间的相互关系以及由此引申出的序列的弱收敛、弱*收敛性质, 对于自反空间和一致凸空间也做了扼要的介绍(第 3 章). 在一般赋范空间的结构之外, 讲述了 Hilbert 空间的几何结构, 即正交基、正交投影、算子与泛函的特殊表现形式(第 4 章). 最后, 第 5 章简要地叙述了有界线性算子的谱的属性, 紧算子、自伴算子的谱论以及谱表示问题. 此外, 书中每章末设有一定数量的习题, 除了通过练习掌握解题方法外, 有些习题还提供了可资参考的例子.

本教材着意加强基础理论的讲解, 在突出基本理论框架的同时有重点地介绍了对于其他学科的应用. 以简短的篇幅叙述这一学科的基本理论并以适当的深度尽力挖掘其中的思想与方法是本书写作的初衷. 书中有重点地选择不动点定理、最佳逼近问题、积分方程、微分方程的适定问题以及 Fourier 分析中的某些问题做了介绍, 从中可以了解泛函分析对于其他学科的应用. 另外本书还引进了几点较为现代的内容, 如关于 Schauder 基、关于一致凸空间的叙述等. 事实上, 这些内容的进一步扩展会带来泛函分析理论的深化和十分广泛的应用. 作者这样做的目的除了强调它们本身的知识内容以外, 还希望引起读者进一步学习和研究的兴趣.

本书是在作者多年授课使用讲义的基础上修订而成的. 此次出版对于书中内容做了新的修正、补充和调整. 在本书撰写和出版过程中, 不少专家、同事曾经提出过宝贵的意见和建议, 尤其是侯友良教授、王茂发博士在使用本教材的过程中都提出过具体的建议, 作者借此机会一并向他们表示衷心的感谢! 对于书中错漏之处, 还望读者给予批评指正.

作 者

2005 年 8 月

符 号 表

$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
Φ	标量域($\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)
$\mathbf{Q}$	有理数域
$\mathbf{N}$	自然数全体
$\varnothing$	空集
$A+B$, $A-B$	集合 A, B 的线性和, 差
$A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$	集合 A, B 的并, 交, 余
$\mathrm{co}E$	集合 E 的凸包
$\mathrm{span}\ E$	由集合 E 张成的线性子空间
$d(x, y)$	x, y 两点之间的距离
$d(x, E)$	x 到集合 E 的距离
$O(x, r)$	以 x 为中心, r 为半径的开球
$S(x, r)$	以 x 为中心, r 为半径的闭球
$S(X)$	空间 X 的闭单位球($=S(\mathrm{o}, 1)$)
$Sp(X)$	空间 X 的单位球面
$\bar{E}$, E°, E'	集合 E 的闭包, 内部, 导出集
T: $X\rightarrow Y$	从 X 到 Y 中的映射(算子)
$x\mapsto y$	把 x 点映射为 y 点
$T(A)$, $T^{-1}(B)$	集合 A 的象, 集合 B 的原象
$N(T)$, $R(T)$	算子 T 的零空间, 值空间
$X/\sim$, X/M	X 关于等价关系“~”的商集, 关于 M 的商空间
$B(X,Y)$, $B(X)$	从 X 到 Y 中, 从 X 到 X 中的有界线性算子全体
$C(X,Y)$, $C(X)$	从 X 到 Y 中, 从 X 到 X 中的紧算子全体
X^*, X^{**}	空间 X 的一次, 二次共轭空间
X'	X 的代数共轭空间
T^*, T^{-1}	算子 T 的共轭算子, 逆算子

$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$	函数 f 在 $[a,b]$ 上的全变差
μ_A	集合 A 的 Minkowski 泛函
$J:X\to X^{**}$	自然嵌入算子
$E^\perp$	集合 E 的正交补空间
$\rho(A)$, $\sigma(A)$	算子 A 的正则集，谱集
$\sigma_p(A),\sigma_c(A),\sigma_r(A)$	算子 A 的点谱，连续谱，剩余谱
r_A 或 $r(A)$	算子 A 的谱半径
R_A 或 $R(A)$	算子 A 的数值半径
$\exists$	存在量词
$\forall$	全称量词
$\Rightarrow$	蕴含
$\Leftrightarrow$	等价于

目　　录

第 1 章　线性赋范空间

正如前言中所提到的, 泛函分析的基础建立在集合的两种结构之上, 一种是代数结构即线性结构, 另一种是拓扑 (本书中体现为度量) 结构. 本章将首先介绍线性空间、度量空间、赋范空间、内积空间的公理系统, 讨论它们之间的相互关系; 然后给出某些经典的赋范空间的例子; 在此基础上叙述度量空间的两个重要概念 —— 完备性和紧性, 以及它们的某些应用. 本章提供了全书的基础知识.

1.1　线性空间与度量空间

我们以 Φ 代表标量域, 即实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$.

定义 1.1.1　设 X 是某个集合, 其中规定了两种运算 ("加法" 与 "数乘"), 使得

(1) X 关于加法构成交换群: $\forall x, y \in X$, 存在 $u \in X$, 称 u 为 x 与 y 之和, 记为 $u = x + y$, 满足 $\forall\, x, y, z \in X$,

① $x + y = y + x$.

② $x + (y + z) = (x + y) + z$.

③ 存在 $0 \in X$, 使得 $\forall\, x \in X$, $x + 0 = x$.

④ 对于每个 $x \in X$, 存在 $x' \in X$ 使得 $x + x' = 0$. 记 $x' = -x$, 称 x' 是 x 的负元.

(2) 数乘运算可行: $\forall x \in X$, $\alpha \in \Phi$, 存在 $v \in X$, 称 v 为 α 与 x 的积, 记为 $v = \alpha x$, 满足 $\forall\, x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

① $1x = x$.

② $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

③ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

则称 X 是线性空间或向量空间, 其中的元素称为向量.

当 $\Phi = \mathbf{R}$ 时, 称 X 是实线性空间.

当 $\Phi = \mathbf{C}$ 时, 称 X 是复线性空间.

线性空间的子集合 E, 若对于同样的标量域构成线性空间, 则称 E 是 X 的线

性子空间. 显然 E 是 X 的线性子空间当且仅当

$$\alpha x + \beta y \in E, \quad \forall x, y \in E, \quad \alpha, \beta \in \Phi.$$

我们采用以下记号：当 $x \in X$, E_1, $E_2 \subset X$, $\alpha \in \Phi$ 时,

$$x + E_1 = \{x + x_1 : x_1 \in E_1\},$$

$$\alpha E_1 = \{\alpha x_1 : x_1 \in E_1\},$$

$$E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}.$$

称 αE 是 E 的倍集, $E_1 + E_2$ 是 E_1, E_2 的 (线性) 和集.

注意　应该把线性空间的子集之间的这些运算与集合论中的 "并" 与 "交" 运算区别开来. 就运算性质来说, 一般地, 当 $E \subset X$ 时, $2E \subset E + E$, 其中的包含关系可能是严格的. 此外, $\forall\, E \subset X$, $-E$ 有明确的意义; 若 $E \neq \varnothing$, 则 $E - E \neq \varnothing$ 等.

线性空间 X 中的元素 $x_1, \cdots, x_n$ 称为线性无关, 若 $\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Phi$, 当

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

时, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. X 的子集合 E 称为线性无关集, 若 E 中任意有限多个元素都线性无关. 不是线性无关的集合称为线性相关. 若 E 线性无关并且 $\forall x \in X$, 存在有限多个 $x_1, \cdots, x_n \in X$ 和 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Phi$ 使得

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

则称 E 是 X 的基底 —— Hamel 基. 此时若 E 仅由 n 个元素组成, 则称 X 是 n 维空间, 记为 $\dim X = n$. 若 E 由无穷多个元素构成, 则称 X 为无穷维空间, 记为 $\dim X = \infty$. 当 $X = \{0\}$ 时, 记为 $\dim X = 0$.

例 1.1.1　空间 Φ^n.

其中的每个元素是一个 n 数组 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $x_i \in \Phi$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 定义坐标式的加法和数乘

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$

$$a(x_1, \cdots, x_n) = (ax_1, \cdots, ax_n) \qquad (a \in \Phi).$$

这些 n 数组的全体构成线性空间, 其维数为 n, 即 $\dim X = n$.

例 1.1.2　无穷序列空间 Φ^∞.

其中的每个元素是一个无穷序列 $x=(x_1,x_2,\cdots)$, $x_n\in\Phi$, $n\geqslant 1$, 类似地定义

$$(x_1,x_2,\cdots)+(y_1,y_2,\cdots)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots),$$

$$a(x_1,x_2,\cdots)=(ax_1,ax_2,\cdots) \qquad (a\in\Phi).$$

则无穷序列空间是线性空间, 其维数是无穷的, 即 $\dim X=\infty$.

例 1.1.3 函数空间.

设 Ω 是任一点集, X 是在 Ω 上定义的函数全体, 规定点态的加法和数乘, 即 $f=f(t)$, $g=g(t)$ 时,

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),$$

$$(af)(t)=af(t), \quad \forall t\in\Omega \quad (a\in\Phi).$$

容易验证 X 也是线性空间.

今后对于有限维空间、无穷序列空间和函数空间将分别采用上面规定的线性运算. 在经典分析、线性代数、复变函数、实变函数、微分方程中遇到的许多空间都是线性空间.

利用 Zorn 引理可以证明 (见本书附录), 任一非零线性空间 (即 $X\neq\{0\}$) 必存在极大线性无关集合, 这一集合即是 X 的 Hamel 基. 换句话说, 任一非零线性空间必存在 Hamel 基.

凸集和子空间是线性空间中时常用到的子集. X 的子集 E 称为是凸的, 若 $\forall x,y\in E$, $0\leqslant r\leqslant 1$, $rx+(1-r)y\in E$. 对于任一集合 $E\subset X$, 记

$$\operatorname{co}E=\left\{\sum_{i=1}^{n}r_ix_i: x_i\in E, \sum_{i=1}^{n}r_i=1,\ r_i\geqslant 0,\ n\geqslant 1\right\}, \tag{1.1.1}$$

称 $\operatorname{co}E$ 是 E 的凸包或凸壳, 其中形如 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_ix_i$ 的元素称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的凸组合. 记

$$\operatorname{span}E=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i: x_i\in E, a_i\in\Phi, n\geqslant 1\right\}, \tag{1.1.2}$$

称 $\operatorname{span}E$ 是由 E 张成的线性子空间, 其中形如 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$ 的元素称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合.

命题 1.1.1 设 X 是线性空间, $E\subset X$.

(1) $\operatorname{co}E$ 是 X 中的凸集, 它是 X 中包含 E 的所有凸集的交集.

(2) span E 是 X 的线性子空间, 它是 X 中包含 E 的所有线性子空间的交集.

证明　这里仅证 (1). 类似地可以证明 (2).

(1) co E 是凸集. 实际上 $\forall x,\ y \in \operatorname{co} E$, 不妨设

$$x=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i, \qquad y=\sum_{j=1}^{m} s_j y_j,$$

其中 $x_i, y_j \in E$, $r_i \geqslant 0$, $s_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{m} s_j = 1$. $\forall r$, $0 \leqslant r \leqslant 1$,

$$rx+(1-r)y=\sum_{i=1}^{n} r r_i x_i+\sum_{j=1}^{m}(1-r) s_j y_j.$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{n} r r_i+\sum\limits_{j=1}^{m}(1-r) s_j=r+(1-r)=1$, 上式是 x_i, y_j 的凸组合, 由 co E 的定义知 $rx+(1-r)y \in \operatorname{co} E$. 故 co E 是凸集.

(2) 对于任一凸集 A, A 中任意 n 个元素的凸组合仍在 A 中.

应用数学归纳法, 当 $n=2$ 时, 只要 $x_1, x_2 \in A$, $r_1+r_2=1$, $r_i>0$, 则 $r_1 x_1+r_2 x_2 \in A$, 这由定义直接得出. 设 $n=k$ 时结论成立, 我们证明 $n=k+1$时也成立. 实际上若 $x_1, \cdots, x_k, x_{k+1} \in A$, $r_i>0$, $\sum\limits_{i=1}^{k+1} r_i=1$, 注意 $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{r_i}{1-r_{k+1}}=1$, 由归纳假设 $x=\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{r_i x_i}{1-r_{k+1}} \in A$, 从而

$$\left(1-r_{k+1}\right) x+r_{k+1} x_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1} r_i x_i \in A.$$

(3) 设 $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是包含 E 的全体凸集, 由 $E \subset E_\lambda$, 显然 $\operatorname{co} E \subset \operatorname{co} E_\lambda$. 由 (2), $\operatorname{co} E_\lambda = E_\lambda$, 从而 $\operatorname{co} E \subset \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. 另一方面由 (1), co E 是包含 E 的凸集, 从而对于某个 $\lambda_0 \in \Lambda$, $\operatorname{co} E = E_{\lambda_0}$, 于是

$$\operatorname{co} E=E_{\lambda_0} \supset E_{\lambda_0} \bigcap\left(\bigcap_{\lambda \neq \lambda_0} E_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda .$$

总之, $\operatorname{co} E=\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$.

定义 1.1.2　设 X 是某个集合, $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个映射, 满足

(1) $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$.

(2) $d(x,y)=d(y,x)$.

(3) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ (三角不等式).

则称 d 是 X 上的度量 (距离) 函数, 称 X 为度量 (距离) 空间, 称 $d(x,y)$ 是 x 与 y 之间的距离. 有时为了明确, 记为 (X,d).

度量空间的子集合 E, 仍以 d 为 E 上度量构成的度量空间称为 (X,d) 的子空间.

例 1.1.4 对于 n 维空间 Φ^n 中的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n)$, 定义

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.3}$$

容易验证 d 是 Φ^n 上的度量函数. 其中的三角不等式即多元微积分中用到的不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

记此空间为 (Φ^n,d), 称之为 n 维欧氏 (Euclid) 空间.

实际上在 Φ^n 上还可以定义其他度量, 例如:

$$d'(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|.$$

此时 (Φ^n,d') 仍是度量空间. 但须注意应把 (Φ^n,d') 与 (Φ^n,d) 视为不同的度量空间.

例 1.1.5 空间 s.

考虑例 1.1.2 中的线性空间 Φ^∞, 对于 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, 定义

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}. \tag{1.1.4}$$

现证明 d 是 Φ^∞ 上的度量函数, 记此空间为 s.

证明 注意 (1.1.4) 中的级数总是收敛的, 所以 $d(x,y)$ 是有限实数.

现在, (1) 显然 $d(x,y)\geqslant 0$. 若 $d(x,y)=0$, 则必有 $|x_i-y_i|=0$, 即 $x_i=y_i$ $(i\geqslant 1)$, 故 $x=y$.

(2) $d(x,y)=d(y,x)$ 显然.

(3) 考虑函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$, $t\geqslant 0$. 由于 $f(t)$ 的递增性, 对于任意实数 a, b, 由 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

所以

$$\begin{aligned}d(x,z) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i+y_i-z_i|}{1+|x_i-y_i+y_i-z_i|}\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}+\frac{|y_i-z_i|}{1+|y_i-z_i|}\right)\\ &= d(x,y)+d(y,z).\end{aligned}$$

例 1.1.6　空间 $C[a,b]$.

$C[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上定义的连续函数全体, 对于 $x,y\in C[a,b]$, 规定

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|. \tag{1.1.5}$$

则 d 是 $C[a,b]$ 上的度量函数. 实际上容易验证

(1) $d(x,y)\geqslant 0$. 若 $d(x,y)=0$, 则 $x(t)=y(t)$, $\forall t\in[a,b]$, 故 $x=y$.

(2) 显然 $d(x,y)=d(y,x)$.

(3) $\forall x,y,z\in C[a,b]$,

$$\begin{aligned}d(x,z) &= \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|\\ &\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\}\\ &\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)-z(t)|\\ &= d(x,y)+d(y,z).\end{aligned}$$

所以 $C[a,b]$ 是度量空间.

定义 1.1.3　设 (X,d) 是度量空间.

(1) 若 x_n, $x\in X$, 称 x_n 依度量收敛于 x, 若 $d(x_n,x)\to 0(n\to\infty)$, 记之为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 或 $x_n\to x$.

(2) 若 $E\subset X$ 是一子集合, 称 $\operatorname{diam}E=\sup\{d(x,y):x,y\in E\}$ 是 E 的直径. 称 E 是有界集, 若 $\operatorname{diam}E<\infty$.

定理 1.1.1　度量空间中序列的极限是唯一的, 收敛序列的元素构成有界集.

证明　若 $x_n\to x$, $x_n\to y$, 即

$$d(x_n,x)\to 0,\qquad d(x_n,y)\to 0.$$

由三角不等式知

$$0 \leqslant d(x,y) \leqslant d(x_n,x)+d(x_n,y) \to 0.$$

故 $d(x,y)=0$, 由定义知 $x=y$.

当 $d(x_n,x)\to 0$ 时, $d(x_m,x_n)\leqslant d(x_m,x)+d(x_n,x)\to 0(m,n\to\infty)$, 由此得出后一结论.

定理 1.1.2 $d(x,y)$ 是两个变元的连续函数, 即当 $x_n\to x$, $y_n\to y$ 时,

$$d(x_n,y_n)\to d(x,y). \tag{1.1.6}$$

证明 由三角不等式知道,

$$d(x,z)-d(x,y)\leqslant d(y,z).$$

同样地

$$d(x,y)-d(x,z)\leqslant d(z,y)=d(y,z),$$

于是

$$|d(x,y)-d(x,z)|\leqslant d(y,z). \tag{1.1.7}$$

应用 (1.1.7) 又得到

$$\begin{aligned}|d(x_n,y_n)-d(x,y)| &\leqslant |d(x_n,y_n)-d(y_n,x)|+|d(y_n,x)-d(x,y)|\\ &\leqslant d(x_n,x)+d(y_n,y)\to 0,\end{aligned}$$

从而

$$d(x_n,y_n)\to d(x,y).$$

例 1.1.7 设 X 是任一点集, 定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}\quad \forall x,y\in X\ .$$

容易验证 (X,d) 是度量空间. 称此空间是离散度量空间.

此例说明对于任一点集 X, 总可以在 X 上规定某种度量使之成为度量空间. 但是我们研究度量空间的目的在于研究空间的性质并用于解决实际问题, 因此我们通常所关心的是与空间的某种性质紧密联系的度量函数. 下面是这方面的例子.

命题 1.1.2 $C[a,b]$ 中的序列依度量收敛等价于在 $[a,b]$ 上一致收敛.

这由 $C[a,b]$ 中度量函数的定义直接得出.

例 1.1.8　空间 S.

设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, $\mu(\Omega) < \infty$, 关于 Σ 可测的函数全体记为 S. 定义

$$d(x,y) = \int_\Omega \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}\mu, \qquad \forall x, y \in S, \tag{1.1.8}$$

将 S 中关于 μ 几乎处处相等的函数视为同一元. 由定义直接验证知道 (S,d) 是度量空间.

命题 1.1.3　S 中的函数序列依度量收敛等价于依测度收敛.

证明　若 $x_n, x \in S$, x_n 依测度收敛于 x, $\forall \sigma > 0$, 记 $E_n(\sigma) = \{t : |x_n(t) - x(t)| \geqslant \sigma\}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n(\sigma)) = 0$. 由于

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \int_{E_n(\sigma)} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}\mu + \int_{\Omega\setminus E_n(\sigma)} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \mu(E_n(\sigma)) + \frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(\Omega), \end{aligned}$$

对于事先给定的 $\varepsilon > 0$, 先取 σ 足够小使第二项小于 $\dfrac{\varepsilon}{2}$, 再取 n 足够大使第一项小于 $\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则知 $d(x_n, x) \to 0$.

反之, $\forall \sigma > 0$, 由于

$$\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(E_n(\sigma)) \leqslant \int_{E_n(\sigma)} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}\mu \leqslant d(x_n, x),$$

所以当 $d(x_n, x) \to 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n(\sigma)) = 0$, 这说明 x_n 依测度收敛于 x.

此外, 例 1.1.5 的空间 s 中的序列依度量收敛等价于依坐标收敛. 读者可自行验证.

一个线性空间上未必定义有度量, 反过来一个度量空间也未必是线性的. 同时是线性又是度量的空间 X 称为线性度量空间, 假若加法和数乘关于此度量是连续的. 即当在 X 中, $x_n \to x$, $y_n \to y$, 在标量域 Φ 中 $\lambda_n \to \lambda$ 时必有

$$x_n + y_n \to x + y, \qquad \lambda_n x_n \to \lambda x.$$

定义 1.1.4　设 (X, d) 是度量空间.

(1) 若 $x_0 \in X$, $r > 0$, 称集合 $O(x_0, r) = \{x \in X:\ d(x, x_0) < r\}$ 和 $S(x_0, r) = \{x \in X:\ d(x, x_0) \leqslant r\}$ 分别是以 x_0 为中心 r 为半径的球和闭球.

(2) 称集合 $B \subset X$ 是开集, 若 $\forall x \in B$, 存在 $r > 0$, 使得 $O(x, r) \subset B$.

(3) 包含 x 的任一开集都称为 x 的邻域.

(4) 集合 $E \subset X$ 称为闭集, 若 $X \backslash E$ 是开集.

命题 1.1.4　$\forall x_0 \in X, r > 0$, 球 $O(x_0, r)$ 是开集, $S(x_0, r)$ 是闭集.

证明　$\forall y \in O(x_0, r)$, 取 $r' = r - d(y, x_0)$, 则 $r' > 0$. 此时 $\forall z \in O(y, r')$,

$$d(z, x_0) \leqslant d(z, y) + d(y, x_0) < r' + d(y, x_0) = r,$$

故 $z \in O(x_0, r)$. z 是任意的, 所以 $O(y, r') \subset O(x_0, r)$. 由定义知道 $O(x_0, r)$ 是开集.

另一方面, $\forall y \overline{\in} S(x_0, r)$, 则 $d(y, x_0) > r$; 取 $r' = d(y, x_0) - r$, 则 $r' > 0$, 此时 $\forall z \in O(y, r')$,

$$d(z, x_0) \geqslant d(y, x_0) - d(z, y) > r,$$

所以 $O(y, r') \bigcap S(x_0, r) = \varnothing$, 故 $X \backslash S(x_0, r)$ 是开集, $S(x_0, r)$ 是闭集.

下面定理可以仿照实数轴上的情况证明之, 这里将具体的证明略去.

定理 1.1.3　设 X 是度量空间, 则

(1) 空集 $\varnothing$ 与 X 是开集;

(2) 任意多个开集之并是开集;

(3) 有限个开集之交是开集.

设 $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是集合 X 的子集族, 若空集 $\varnothing$ 与 X 属于该集族, 并且该集族中的集合对于任意并和有限交封闭, 则称 $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 X 上的拓扑, 称 X 是拓扑空间. 定理 1.1.3 的结论表明度量空间中由全体开集构成的集族是它的拓扑, 从而每个度量空间是一个拓扑空间.

定义 1.1.5　设 X 是度量空间, $E \subset X$, $x_0 \in X$.

(1) 若存在 $r > 0$ 使得 $O(x_0, r) \subset E$, 称 x_0 是 E 的内点. E 的内点全体称为 E 的内部, 记为 E°.

(2) 若存在 $r > 0$ 使得 $O(x_0, r) \bigcap E = \varnothing$, 称 x_0 是 E 的外点, E 的外点全体记为 E^e.

(3) 若 $\forall \varepsilon > 0$, $O(x_0, \varepsilon) \bigcap E \neq \varnothing$, 称 x_0 是 E 的接触点. E 的接触点全体称为 E 的闭包, 记为 $\overline{E}$.

(4) 若 $\forall \varepsilon > 0$, $(O(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \bigcap E \neq \varnothing$, 称 x_0 是 E 的聚点. E 的聚点全体称为 E 的导出集, 记为 E'.

下面命题容易由定义直接验证, 这里将具体的验证留给读者.

命题 1.1.5　(1) $\overline{E} \bigcup E^e = X$, $\overline{E} \bigcap E^e = \varnothing$, $\overline{E} = E \bigcup E'$.

(2) $x_0 \in \overline{E}$ 当且仅当存在 $x_n \in E$, $x_n \to x_0$.