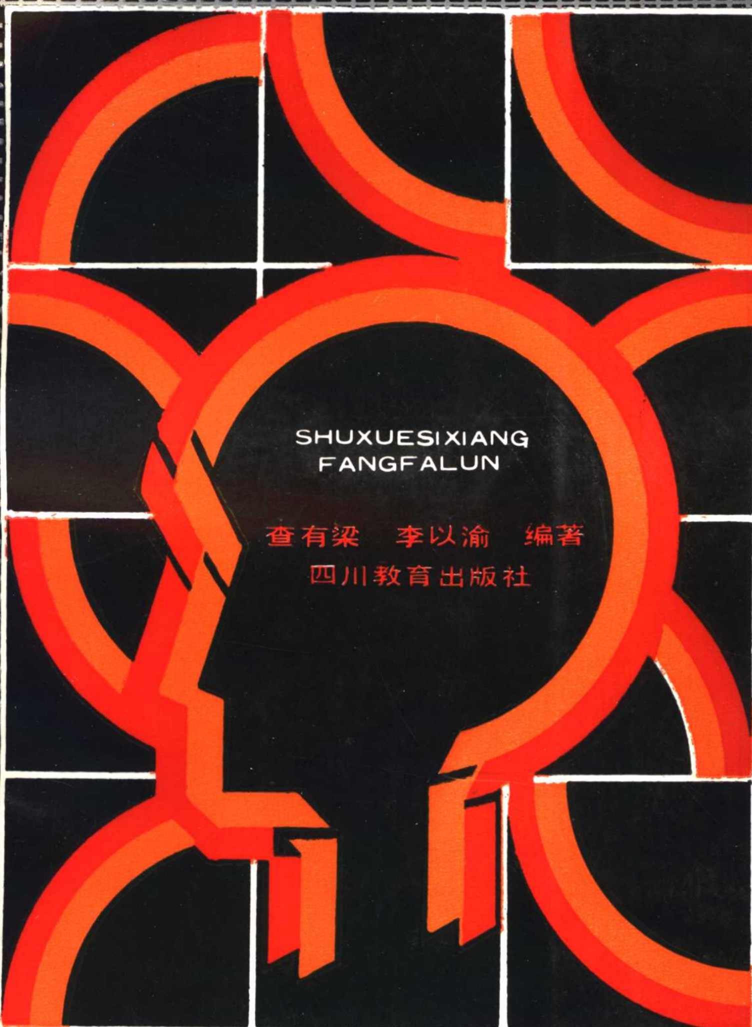
数学智慧的横向渗透

——数学思想方法论



SHUXUESIXIANG
FANGFALUN

查有梁　李以渝　编著

四川教育出版社

数学智慧的横向渗透
——数学思想方法论

SHUXUEZHIHUIDE HENGXIANG SHENTOU

SHUXUESIXIANGFANGFALUN

查有梁　李以渝　编著

四川教育出版社

1990年　成都

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵

数学智慧的横向渗透
——数学思想方法论　　查有梁　李以渝　著

四川教育出版社出版发行　　（成都盐道街三号）
四川省新华 书 店 经 销　　内江新华印刷厂印刷

开本850×1168毫米 1/32 印张8.25 插页4 字数180千
1990年10月第一版　　1990年10月第一次印刷
印数：1—1510册

ISBN7-5408-1291-5/G·1252　软精定价：3.52元

内容提要

本书旨在将数学这种人类特殊智力活动及其成果中的智慧——数学思想，运用到自然科学、社会科学等各个领域。运用数学思想是运用数学的一种新形式，由此在数学与其外部世界之间打开了一个新窗口。相应形成了一门新方法论：数学思想方法论。

初等数学、高等数学和现代数学都蕴含有丰富的数学思想，运用这些思想将对科学技术、社会实践各个领域有重要的指导和启示作用。本书发掘和整理了数学内容中蕴含的数学思想，论述了数学思想方法论的体系和运用数学思想的原理、规律，列举了中外学者运用数学思想的大量实例。这对读者发掘和运用数学思想将有所启迪。

书中内容将通俗性与学术性相结合，对不同层次的读者会各有所得。本书可供自然科学、社会科学各领域有兴趣于运用数学思想去研究问题，尤其是希望从数学中寻找新思想、新启示的读者阅读和参考，可作为数学工作者及大学、中学数学教师的参考书，亦可作为大、中学生的课外读物。

前言：智慧比知识更有力量

在过去的工业革命时代，被马克思称为科学的始祖的弗兰西斯·培根，喊出了那个时代的口号：知识就是力量。20世纪末的今天，世界进入新的工业革命的时代，新时代的口号是：智慧比知识更有力量！

如何增长人类的智慧呢？可以有多种途径。从迄今人类创造发明的科学技术中发掘智慧是一种途径。因为科学技术的深处沉积着人类的智慧，可以透过科学技术解决专门问题的理论、方法提炼出一般智慧。至少有五千多年历史的数学，在科学之林中是一门特殊的科学，是人类的一种特殊的智力活动及其成果。数学中充满思想性，闪耀着灿烂的智慧光芒。数学是人类寻找智慧的富矿区。

数学思想方法论是一门新的方法论，它的基本的出发点，正是把数学作为一个开放系统，发掘数学中的智慧（数学思想），运用到数学以外的科学、技术、艺术和社会实践的各个领域，运用到自然科学、社会科学、思维科学、哲学、交叉科学等中去。这也是运用数学的一种新形式——运用数学思想，如此它在数学与其外部世界之间打开了一个新窗口、建立了一种新联系。这就是数学智慧的横向渗透。

初等数学、高等数学和现代数学都蕴含有丰富的数学思想。凡学过一些数学的人，按数学思想方法论的思路、方法，都将从数学中得到莫大的智慧启迪，将启发你的思想，将移动你正在思考的问题的难点，……。数学思想方法论开启了数学王国中隐埋的宝藏，给自然科学、社会科学各个领域的人们，提供了一种新的方法论。

由于数学思想没有数学语言这一坚硬的外壳，运用数学思想不涉及数学符号、公式推导，没有传统运用数学的数量化、建立模型等困难，而易为人们接受和运用，因此数学思想方法论的运用有广泛的可能性。并且，以数学思想为中介，数学思想方法论将密切数学与它外部公众的联系，密切数学内部各分支的联系。

至今，自然辩证法、科学方法论学者主要注意从物理、化学、生物等自然科学中总结、提炼科学方法，而较少注意从数学中提炼一般科学思想、方法。本书提出和建立的数学思想方法论也有助于填补这方面的不足。并且，本书整理、列举了数学思想运用于自然科学、哲学、社会科学、思维科学、交叉科学的100多个例子。这是用数学思想将各个领域具体联系起来了，绘出一幅人类知识的整体联系图，这也会给人们带来启示，它本身属于交叉科学的研究成果。另外，还由于现在中学、大学的数学教学效益较低，数学思想方法论的建立、推广、交融到数学教学中，将启迪和发展学生的智慧，从而会提高中学、大学数学教学的效益。

在本书中，我们发掘、整理和论述了从初等数学到现代数学的大量数学内容中的数学思想，论述了数学思想方法论体系和运用数学思想的形式、原理和规律。列举了中外学者包括我们自己运用数学思想的大量例子。这样，本书建立起了数学思想方法论的框架，数学思想方法论还需要不断丰富和发展。

本书的两位作者，经过三年合作，多次讨论修改，不断丰富提高，几易其稿，才成此书。两位作者各自都对本书作出了努力和贡献，故我们采用交叉署名的新办法。就数学智慧的横向渗透而言，无论在理论上或应用上，我们仍深感不足，有待完善，希望广大读者批评指正。

查有梁　李以渝

1989年3月

□□目录

理 论 篇

第一章 数学中蕴藏无穷的智慧：数学思想…………………………(3)
1-1 数学与数学思想……………………………………………(3)
1-2 数学的两种运用形式………………………………………(6)
1-3 数学思想的分类……………………………………………(11)
第二章 数学智慧是一把金钥匙：数学思想方法论…………………(19)
2-1 何谓数学思想方法论………………………………………(19)
2-2 数学思想方法论的交缘性…………………………………(21)
2-3 数学思想方法论的基础……………………………………(23)
第三章 运用数学智慧的奥妙：数学思想方法论的原理……………(60)
3-1 运用数学思想的一般形式…………………………………(60)
3-2 运用数学思想的作用方式…………………………………(63)
3-3 运用数学思想的基本理论…………………………………(73)
3-4 运用数学思想的思维过程…………………………………(80)
第四章 数学智慧的力量：数学思想方法论的意义…………………(94)
4-1 数学思想方法论对数学外部的意义………………………(94)
4-2 数学思想方法论对数学内部的意义………………………(108)
4-3 数学思想方法论的特点……………………………………(114)
第五章 数学智慧的传播：数学思想方法论的教育价值……………(117)
5-1 数学思想与教育理论………………………………………(117)
5-2 数学教育与人的智慧发展…………………………………(123)
5-3 数学思想方法论对数学教育的意义………………………(125)

应用篇

第六章 数学思想方法论在自然科学中的应用………………………………（137）
6-1 在物理学中的应用………………………………………………………（137）
6-2 在化学、生物学中的应用………………………………………………（144）
6-3 在天文学、宇宙学中的应用……………………………………………（147）
第七章 数学思想方法论在社会科学中的应用………………………………（149）
7-1 在社会改革学、经济学中的应用………………………………………（149）
7-2 在教育学、人才学中的应用……………………………………………（165）
7-3 在管理学、科学学中的应用……………………………………………（171）
第八章 数学思想方法论在人文科学中的应用………………………………（183）
8-1 在文学艺术、美学中的应用……………………………………………（183）
8-2 在伦理学、历史学中的应用……………………………………………（201）
8-3 在语言学、心理学中的应用……………………………………………（206）
第九章 数学思想方法论在思维科学中的应用………………………………（211）
第十章 数学思想方法论在哲学中的应用……………………………………（227）
后记 ……………………………………………………………………………（251）
参考文献…………………………………………………………………………（252）

理论篇

本篇是数学思想方法论的理论部分。我们将论述什么是数学思想？什么是数学思想方法论？如何从浩瀚的数学知识中发掘出数学思想？以及如何运用数学思想的一般步骤、规律和原理？本篇还分析了数学思想方法论的意义、价值。

只要文明不断进步，在下一个两千年里，人类思想中压倒一切的新事物，将是数学智慧的统治。

——A.N.怀特海

让我们在受桎梏的数学家思想中，进一步探索把数学看作文化，看作对文化的形成有影响的想法。

——A.L.哈蒙德

第一章　数学中蕴藏无穷的智慧：数学思想

数学是一种文化，并且数学文化是人类文化中最基本的文化。[1] 数学文化的一个特点是数学富有思想智慧。数学文化渗透于人类各个方面。

1—1　数学与数学思想

数学是研究现实世界的数量关系和结构关系的科学。数学大致经历了三个发展阶段：17世纪微积分以前为一个时期，可称为古代数学时期；微积分诞生至19世纪末为一个时期，可称为近代数学时期；19世纪末、20世纪初至现在为现代数学时期。在不同的时期，数学的研究对象和相应的方法、理论有显著的变化。至今，数学创造出了十分浩瀚的内容。在数学科学的核心范围内，已有近一百种分科，假如再加上应用数学，则不同分科的数目将不下几百个。

数学是人类认识世界、改造世界的重要工具。早期，数学是丈量土地和计数的方法。近代，数学和实验方法是自然科学发展的两大基础，在此基础上，力学、天文学、物理学等兴起并臻于

完善，近代科学建立起来了，同时发生近代工业革命。随后，数学成功地应用于化学、生物学，乃至自然科学的各个领域。今天数学正在向经济科学、社会科学广泛渗透，科学的数学化成了现代科学发展的一个显著特征。不仅如此，今天数学与世界的发展更加紧密了，现代数学中新概念、新理论、新方法的大量涌现，是现代新的工业革命的风源，现代数学为新的科技革命大厦提供框架。现代数学是创造现代世界的基本方式之一。

科学的数学化，一方面表现在数学方法广泛地成功应用，另一方面还表现在数学思维正成为一般科学思维。后者是指数学影响自然科学、社会科学的不是通过它现成的解决某些专题的方法，而是通过它的思维的性质，通过数学中不断制定出来的大量普遍适用的思维方法。[2]

恩格斯认为，数学是一种研究思想事物的抽象的科学。[3]确实，数学有二重属性，一是数学研究成果揭示了事物数量和形式的一般规律；二是数学研究过程及其成果中蕴含有一般思维规律。我们可把数学中所蕴含的一般思维规律称为数学思想。数学的二重性，简单地说，一是数学知识，二是数学思想。

看个简单例子：笛卡尔坐标系

1637年，法国数学家笛卡尔发表《方法论》一书，书后一篇附录叫《几何学》，其中他首次明确提出了点的坐标，并借助坐标系用含有变数的代数方程来表示和研究曲线。

平面上，由相互垂直的两条直线，确定它们的正向、单位，并以它们的交点为原点O，这就是平面直角坐标系。由此，平面上任一点P，由它与两轴的相对位置对应两个实数x、y，成为P点的坐标（x，y）。点子与坐标一一对应。曲线看作点子运动的轨迹，其相应坐标为变数，于是代数方程与几何曲线可相互表

示。这些就是（直角）坐标系的基本数学知识。

数学知识中蕴含数学思想。数学知识是显化的；数学思想是潜在的，数学思想需要从数学知识中发掘。而发掘数学思想有两种着眼点，一是着眼于数学内部，发掘数学史上对数学理论发展有着基本作用的种种数学思想，其目的是研究数学思想史以及由此促进数学理论的发展，这样发掘出来的数学思想简称为“内部数学思想”。这方面著名的例子如美国数学家M．克莱因著的《古今数学思想》（译本由上海科技出版社出版，该书译者认为“本书着重在论述数学思想的古往今来”。），国内有近年出版的《数学思想方法纵横论》（解恩泽等编著，科学出版社出版，1987）等；二是着眼于数学外部，发掘提炼数学理论、方法等等之中的一般思想智慧，其目的是将这些一般思想智慧运用到数学外部去，实现数学智慧的横向渗透，这样发掘出来的数学思想简称为“外部数学思想”。本书主要是从数学中发掘、整理“外部数学思想”，并将它运用于科学、技术、社会各个领域。

例如，笛卡尔坐标系的“内部数学思想”，即数与形结合的思想，代数与几何结合的思想。正如M．克莱因说：“事实上，他（指笛卡尔，引者注）所着手开发的，是把代数用到几何上去。他完全看到代数的力量，看到它在提供广泛的方法论方面，高出希腊人的几何方法。”[4] 坐标系思想是近代数学诞生、发展的一个原始种子。由坐标系诞生了解析几何，进而诞生了微积分。近代数学的发展，进一步使坐标系思想成为数学的基本思想之一，这就是拉格朗日所说的：“只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄。但是，当它们相伴而行，它们就互相吸取新鲜的活力，以快速的步伐走向完善。”

坐标系的“外部数学思想”，如坐标系表现一种由部分如何

构成整体的思想，即把数集X、Y看作一般系统，由X、Y中的数x、y（系统中的要素）分别组合成“坐标”（x、y），这是新元素，它们的全体成一整体；以及相反，整体如何分解为部分的思想。这是坐标系所体现的一种一般方法思想。坐标系也就是局整关系的形象化，分析局整关系的一种直观、形象的一般工具。此外，坐标系还表现出一种“参照系”的思想：研究问题应当给它“建立坐标系”，即将它置于一定的背景中、参照系中。从坐标系创立、发展过程中也能提炼出数学思想，如关于创造发明的思想等等。每一项数学知识所蕴含的“外部数学思想”可能有多种。从这个例子可见，“内部数学思想”的参照系是数学自身，“外部数学思想”的参照系是整个科学、整个人类活动。

内部数学思想是特殊的、专门的科学思想，外部数学思想是一般的科学思想、一般的思想智慧。不过它们也是有联系的，将数学内部的专门思想一般化，可以推广、发展为一般科学思想，即可以将内部数学思想转化、发展为外部数学思想。至于如何发掘外部数学思想，我们将在2－3中讨论。（以下的数学思想指外部数学思想）。

1—2 数学的两种运用形式

数学来源于现实世界，最终又作用于现实世界。由于数学有二重性（数学知识与数学思想），相应，数学有两种运用形式：数学知识的运用和（外部）数学思想的运用。

数学知识的运用是数学的传统运用形式。

【例1】 我们研究某个自由落体的运动规律，可以运用伽

利略总结的落体定律：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

这是自由落体运动的一个数学模型，由它可计算出任意时刻t下落物体经过的距离s，以及t时刻的速度$v_t=gt$。

【例 2】　坐标系方法运用于机械设计、制造等方面。如铣床上加工铡刀刀头，如图1.1建立坐标系，要求前角$\gamma=-12°$，刃倾角$\lambda=-8°$，夹角$\varphi=45°$，求铣床工作台旋转角度α。

应用公式$\mathrm{tg}\alpha=(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\lambda-\mathrm{tg}\gamma)\cos\gamma$，

代入γ和λ之值，得

$$\mathrm{tg}\alpha=(-\sqrt{2}\cdot\mathrm{tg}8°+\mathrm{tg}12°)\cos12°$$
$$=0.0135002,$$

$\therefore\quad \alpha=46'24''.$

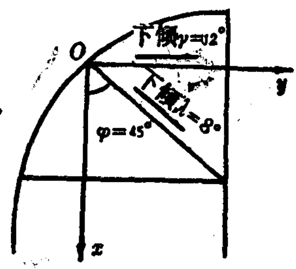


图　1.1

【例 3】　19世纪末，高等数学开始运用于经济学，出现了数量经济学派。它把商品的使用价值、生产成本等都视为变量。由于经济现象十分复杂，一个经济变量往往由许多个自变量决定，考虑变量间关系，发现了导数$\frac{dy}{dx_i}$的经济学意义，即“边际值”。如使用价值对消费量求导，得边际效用。这使得边际值有了丰富的含义，从而进一步提出了边际消费、边际产出、边际收益等一系列概念。更重要的是用边际效用概念解决了“价值之谜”。其中涉及“效用”的数量化（序数理论）、效用的数学模型——导数，以及进而由微积分知识推导出边际效用递减律，等定性结论。

例 1 、例 2 是数学在自然科学中传统运用形式的例子，例 3

是数学在社会科学中传统运用形式的例子。例1、例2主要是定量计算、定量分析，例3主要是在定量分析的基础上作定性分析，得定性结论。

下面看运用（外部）数学思想的例子。

【例4】　坐标系具有将事物分解与综合的一般方法思想。有人将这一数学思想运用于创造学，建立了“要素组合法”这一创造技法。[5] 如要改进一种产品，可以将它分解为各种要素，按功能、材料、形态等类分解，将这些因素列入坐标系，如图1.2是杯子这种产品的坐标分解图。然后分两坐标或三坐标联点组合，产生许多创新产品的思路。例如功能轴上列上新要素温度，与形态轴上的要素杯体结合，产生在杯体上嵌上温度计的思路，等等。同样，将几种不同类型的系列产品列于坐标轴，坐标联点组合，可以产生产品综合创新的思路。据报道，“组合创造技法”与奥斯本的“头脑风暴法”和戈登法并列为当今世界三种主要创造性思维技能。

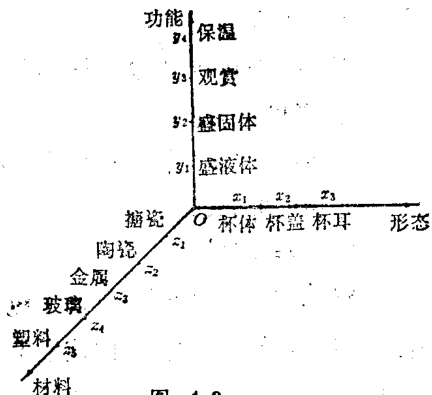


图　1.2

这一坐标系方法思想还被运用于文学创作，可设立从中心向外辐射出多根坐标轴，每根轴上置一个信息系统，然后对这些信息进行扫描找连接点，实现快速构思。用此创作技巧，能使作家迅速从体验到的生活信息中找到最佳的反映角度，得到多种成功的构思。

设置坐标系亦即寻找“参照系”的科学思想，这也有运用和

启发。如现今经常谈到横向比较与纵向比较，这就是寻找不同的参照系；说看问题要站到高层次，放到世界范围，也是如此；还如价值观，即是研究许多问题（尤其是社会问题）的坐标系。那么，从坐标系思想看，‘轴心’是什么，‘指向’是什么，‘单位度量’是什么，对上述问题会有启发。

【例5】　代数运算律的方法论启示。

结合律、交换律、分配律是代数运算律。诸如作加法、乘法可以有，$8+7+2=8+2+7=10+7=17$，$7\times28=7\times(20+8)=7\times20+7\times8=140+56=196$。直接计算困难一些，用运算律会容易一些，这就有巧妙。巧妙的东西，当然有思想性。可以发现，运算律的一般意义是事物的顺序问题，它提醒我们，作事情要注意顺序，不同顺序的组合，其难度、效率不同。抓住事物间特殊联系可实现优化组合。现代生物学揭示，生命的奥秘在于各种遗传密码的排列次序，而具有划时代意义的基因工程，就是人工重排遗传密码的次序——基因重组。此外，做事情将“一步走”分解为若干“小步”，于是有顺序，就可优化顺序组合，提高工作效率。

【例6】　“同构”是现代数学的一个重要概念。两个代数系统A与B同构，是指A与B之间存在一一映射f，使得A中任意两个元a、b，

只要　$a\xrightarrow{f}\bar{a}$，　$b\xrightarrow{f}\bar{b}$，

就有　$a\circ b\xrightarrow{f}\bar{a}\,\bar{\circ}\,\bar{b}$。

其中$\circ$、$\bar{\circ}$分别是A、B中的代数运算。这是同构的数学知识。同构就是不同代数系统在结构上存在着一一对应的等价关系，即忽略两个系统的具体内容看，它们的结构是相同的。因此，同构