初中数理化解题经验丛书

我解数学题

山东科学技术出版社

初中数理化解题经验丛书

我 解 数 学 题

张学军　贾庆祥　编

山东科学技术出版社

一九八八年·济南

《初中数理化解题经验丛书》编委会

初中数理化解题经验丛书

我解数学题

张学军　贾庆祥　编

*

山东科学技术出版社出版

（济南市玉函路）

山 东 省 新 华 书 店 发 行

山东新华印刷厂临沂厂印刷

*

787×1092毫米32开本　　7印张　　143千字

1988年12月第1版　　1988年12月第1次印刷

印数：1—6,200

ISBN 7—5331—0417—X/G·60

定价：1.75元

编者的话

“怎样审题？”“析题时应注意些什么？”“形成解题思路有哪些方法？”“如何搞好错解分析？”“解后总结指的是什么？”“巧解习题的诀窍在哪里？”“基础知识和解题能力之间到底有什么关系？”……这些是同学们在进行数理化习题练习时经常思考的问题。为了具体地、生动地回答这些问题，帮助初中同学们掌握科学的解题方法，形成熟练的解题技能，提高分析问题和解决问题的能力，我们组织编写了这套《初中数理化解题经验丛书》。这套丛书包括《我解数学题》、《我解物理题》和《我解化学题》三本。每本书中都有几十篇由同学们自己写的文章，这些文章是在全国范围内征集的，在富有经验的老师指导下完成。它们从数、理、化各科知识结构的各个方面，从审题、析题、解题、思路形成、解后总结等角度谈了自己的体会和感触，为大家提供了宝贵的解题经验。这些经验，短小精悍，生动真切，是同学们的肺腑之言，不仅对初中同学们提高解题能力有指导作用，而且对初中数理化教师组织好习题教学也有重要的参考价值。在此，我们向全国各地为这套丛书提供经验文章的同学们和指导老师们表示诚挚的谢意。

《我解数学题》一书是由张学军、贾庆祥编集的。由于

将同学们的解题经验结集成书还是一种尝试，难免有不足之处，因而恳切希望广大读者提出宝贵意见。

《初中数理化解题经验丛书》编委会

1988年6月

序

受《初中数理化解题经验丛书》编委会之托，我非常高兴地为这套丛书的小作者和读者们写几句话。

科学家，是少年朋友们仰慕和敬佩的英雄。爱因斯坦、爱迪生、居里夫人、华罗庚……都是你们熟悉的名字。然而，怎样把年轻一代培养成未来的科学家，培养成祖国现代化建设的栋梁之材，一直是社会各界人士非常关心和努力探讨的问题。《初中数理化解题经验丛书》的编委们将国内部分优秀中学生在数理化学习过程中独立思考、勤于探索的经验体会荟萃成书，集中反映了中学生在解题训练中的关键思想和方法，回答了同学们在学习中经常遇到的部分难点和问题。这不仅是丛书的小作者们在走向未来的进程中迈出的可喜一步，也必将为全国几千万初中学生的数理化学习提供非常有益的帮助。

亲爱的少年朋友们，祖国的科学事业和现代化建设需要有理想、有知识的年轻一代，科学的大门向你们敞开着，今天的学习正一步步将你们引入科学的殿堂。这是一个丰富多采的世界，你们是在老师的引导下漫步于其中，一条条精辟的定理、定律，一个个灵活的思想方法，都是我们前人辛勤劳作的结晶，也是你们首先要掌握的。然而，真正把这些“珍宝”变成自己的东西，仅仅靠老师课堂上的讲授是无法做到的。必须通过解题训练，才能促使你们独立思考，深刻理

解基础知识的内涵，准确把握它们的要点，熟练掌握基本内容和方法，把知识真正学到手。否则，就会象华罗庚先生所说的那样，“入宝山而空返”，最终一无所获。

解题既是对基础知识学习的巩固和补充，又是创造性思维能力的训练。解题过程，就是独立分析和思考问题的过程，就是创造性地运用所学知识的过程。它融合了对知识的综合理解和整体思维能力。事实上，科学的发明创造正是在掌握了大量前人知识的基础上，通过创造性思维而得到的。每解出一道题，就是重复了前人一个小小的发明，就是一件漂亮的“艺术品”经过精心雕琢而出于你手中。这不仅训练了独立分析和思考问题的能力，也从中获得了收获的喜悦和学习的兴趣。况且，不少习题来源于社会生产和生活的具体问题，解题训练同时也会增强你解决实际问题的能力。

解题的方法和技巧是非常丰富的，它需要你们在老师的指导下通过艰苦努力才能很好地掌握起来。我希望少年朋友们从这套丛书中学到的不仅是书中的内容，更重要的是能学到丛书的小作者们勤于思考、刻苦钻研的精神，学会自己总结学习中的经验，不断进步。科学的明天是属于你们的，祖国的明天是属于你们的，老一辈科学家把希望的目光落在你们身上。只有掌握好今天所学的知识，才能在明天的科学研究和现代化建设中创出新的奇迹。衷心希望你们成才，衷心希望你们成长为祖国新一代科学家。

潘承洞

1988年7月

目　录

一、代数部分

二、平面几何部分

一、代数部分

学好基础知识，提高解题能力

怎样才能学好数学？我想结合自己的学习实践谈两点体会。

第一，必须重视基础知识的学习。

老师常说，要学好数学，首先要掌握好基础知识，就象盖楼必须先打好地基一样。开始自己对此并不重视，后来在学习中碰了不少钉子，才逐渐体会到基础知识的重要性。如，$2=4-2=\sqrt{(4-2)^2}=\sqrt{(2-4)^2}=2-4=-2$。这种推算显然不对，但错在何处呢？又如，一次函数$y=kx+b$，可否写成$\frac{y-b}{x}=k$的形式？这种变形缩小了$x$的范围——$x\neq0$。诸如此类的问题，学习中时时遇到，如果基础知识不扎实，概念不清，就会出错，碰壁。

当然，学习基础知识不能死记硬背，必须灵活运用。我在学习一元二次方程根与系数的关系时遇到这样一道题：k为何值，方程$(k-1)x^2-2x+3=0$，（1）有两个不同的正根；（2）一个正根和一个负根，此时谁的绝对值大；（3）两根互为倒数？当时，我是这样解的：

根据题意，由韦达定理得

$$\begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \quad 即\begin{cases} \dfrac{2}{k-1}>0 \\ \dfrac{3}{k-1}>0 \end{cases} \Longrightarrow k>1$$

所以，当$k>1$时方程有两个正根。

后来发现，这样解错了，经过思考，问题找到了，原来上述解法忽略了方程必须有实根的条件。我又重新解了这道题：

解：（1）根据题意，有

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \quad 即\begin{cases} 4-4(k-1)\times 3>0 \\ \dfrac{2}{k-1}>0 \\ \dfrac{3}{k-1}>0 \end{cases} \Longrightarrow 1<k<\frac{4}{3}$$

∴当 $1<k<\frac{4}{3}$时，方程有两个不相同的正根。

（2）由题意，得

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ x_1x_2<0 \end{cases} \quad 即\begin{cases} k<\dfrac{4}{3} \\ k<1 \end{cases} \Longrightarrow k<1$$

∴当$k<1$时，方程有一正一负的实根。此时，若正根的绝对值较大，则有$x_1+x_2>0$，即$k>1$，与$k<1$矛盾，所以负根的绝对值大。

（3）由题意，得

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \text{即} \begin{cases} k < \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{3}{k-1} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k < \dfrac{4}{3} \\ k = 4 \end{cases}$$

k值不存在。

弄明白这道题后，这方面的知识也就记牢了。

第二，如何提高解题能力。

俗话说，熟能生巧。为做到这一点，我把数学练习题分成两大类。一类是必须做的基本题目，主要是课本上的题。我在做作业之前先复习课本上的有关基础知识，“吃透”例题。这样做作业时就较少出错，做到规范、准确。第二类是老师或自己找的补充题，解这类题目是为了开阔思路，提高能力。

学习数学不能只顾多做题，要多联想勤思考，有一次我遇到这样一道题：已知a、b、c为三角形的三条边，且方程$b(x^2-1)-2ax+c(x^2+1)=0$有两个相等的实根，求证：此三角形是直角三角形。这道题的关键字眼是“有两个相等的实根”，抓住它，从判别式下手就能证明。再如，解方程：$\dfrac{6x^2+2}{x^2+3x+2}=5-\dfrac{2x^2+6x+4}{3x^2+1}$这是一个较复杂的题目，但仔细观察分子、分母的关系，认真分析方程的特点，就会发现可用换元法来解。

解练习题时，还要善于把问题归类，从而得到规律性的东西，进而做到“以一代十”。如我在学习中遇到这样的方程组：

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ xy=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2-xy-10=0 \end{cases}$$

等等，这是对称方程组，即变换任一方程中两未知数的位置，方程不变。此类方程组的解法是先把两个未知数变形为和与积的形式，然后用换元法来解。

青岛市三十四中学生　刘文沅
指导教师　石云普

谈　审　题

同学们都知道，解答一道数学题，首先要进行审题。所谓审题，就是要正确地、全面地、细致地理解题意。只有理解了题意，才能正确探索解题方法。那么审题时应做好几方面的工作呢？我的体会是：

1.注意发掘数学信息

审题时应正确、透彻地分清题目中的“已知”与“未知”，或“条件”与“结论”，揭示每个条件与结论所涉及的数学概念以及所能提供的全部数学信息，并把它们进行分解。分解出的这些信息，往往具有启发联想、接通解题思路等功能。

如，“已知a、b、c、d都是实数，并且$a^2d^2+b^2(d^2+1)+c^2+2b(a+c)d=0$，求证$b^2=ac$”，可分解出如下信息：

（1）a、b、c、d都是实数；

（2）a、b、c、d满足$a^2d^2+b^2(d^2+1)+c^2+2b(a+c)d=0$；

（3）按相对元思想，已知等式可看成关于d（或a、b、c）的“一元二次方程”；

（4）欲证的结论是$b^2=ac$；

（5）欲证结论中不含实数d。

如果只盯着(1)、(2)是不容易推证的。分解出上述五条信息后，就可逐步展开联想：由（5）知结论中不含d，故应思考如何由已知等式消去d，又由（3）、（1）知，关于d的一元二次方程$(a^2+b^2)d^2+2b(a+c)d+(b^2+c^2)=0$有实数根，故联想起利用$\Delta\geqslant 0$以消去$d$推出欲证结论（证明略）。

2.注意利用图形性质

涉及到几何图形的题目，审题时首先应根据题意画出正确的图形，把题目中的“已知”与“未知”，或“条件”与“结论”在图上标注出来，必要时引入适当的符号，使概念式子化，内容摘要化，充分利用几何图形的性质展开联想，以利于发现解题途径。

如，“已知锐角ΔABC中，$\angle B=60°$，$AC=1$，求证：$AB+BC\leqslant 2$”。

审题时，可按如下步骤进行：

（1）依题意画出相应的图形（图1—1），并在图上标出60°、1；

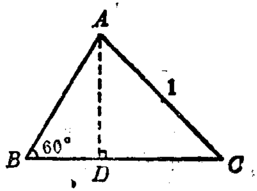

图1—1

（2）引入适当的符号：作$AD\perp BC$(暂把AD也看成一个符号)，$x=BD$，$y=AB+BC$；

（3）挖掘图形性质：$x>0$，$AB=2x$，$AD=\sqrt{3}x$，$DC=\sqrt{1-3x^2}$，$BC=BD+DC$，……

到此就很便于进一步分析，直至发现证明，$y=AB+BC=3x+\sqrt{1-3x^2}$，可整理成：$12x^2-6xy+y^2-1=0$，由$\Delta_x\geqslant0$可得$-2\leqslant y\leqslant2$，故$AB+BC\leqslant2$。

本题通过正确作图，引入适当的符号，充分利用图形性质，很容易就找到了解题方法。难怪数学家笛卡儿在《文集》中写道：“几何图形最易印入脑际、产生联想……”

3.做好“翻译”工作

有些数学题是用语言叙述的，审题时要先进行“翻译”，用数学符号表述命题的条件和结论，也就是将语义信息转化成符号信息。

如，“求证：周长和面积都是已知矩形的周长和面积的n（正整数）倍的矩形是存在的”。

审题时，可将题目“译”成：“已知a、b为矩形的两边，求证满足$x+y=n(a+b)$，$xy=nab$的x、y（1）存在（是实数）；（2）$x>0,y>0$”。

这样，就为证明此题指明了方向，只要证明方程$t^2-n(a+b)t+nab=0$有实根($\Delta\geqslant0$)，且两根为正即可（证明略）。

4.做好“分解”工作

有些命题形式上看是一个，实质上却包含着两个（甚至多个），审题时先要找出（从原题中分解出）相应的等价命题。

如，“若m为实数，求证方程$(2m-3)x^2-2mx+3=0$有实根”。

解此类问题时很容易犯“审题不周”的错误，误认为

$m \neq \frac{3}{2}$，事实上m可以为$\frac{3}{2}$，故证明此命题时应同时证明如下两个命题（与原命题等价）：

（1）已知$m \neq \frac{3}{2}$，求证方程（$2m-3$）$x^2-2mx+3=0$有实根。

（2）已知$m=\frac{3}{2}$，求证方程$(2m-3)x^2-2mx+3=0$有实根。

5.注意问题的“存在性”

审题应贯穿于解题的全过程。即使你顺利地解答了某个问题，审题也没有就此结束（你意识到了吗？），还应回过头来再审查一番，看所求结果对此题是否存在（有意义）。

如，“若方程$x^2+bx+c=0$的两个根比方程$x^2+(2b+1)x+2c=0$的两个根分别大2，求b、c”。

解此题时同学们很容易由韦达定理求得$b=3$，$c=10$，但这是不妥的，经回头审查，当$b=3$，$c=10$时，上述两个一元二次方程的判别式均小于零，从而两方程无实根，又如何比较大小呢？事实上，b、c不存在。

山东阳谷县寿张联中学生　孙雪婷
指导教师　孙保全

重视解题的暗功夫——审题

要保证顺利而正确的解题，首先要进行很好地审题。所谓审题，就是在解题前先对题目的条件和要求进行全面了解