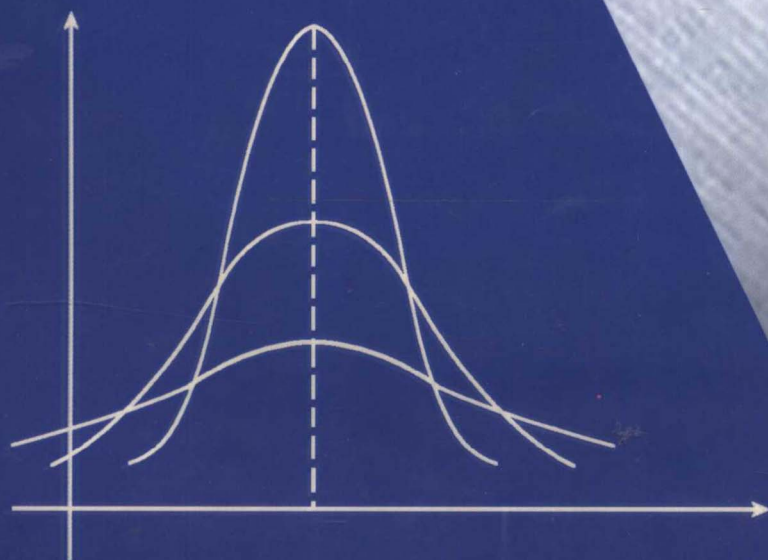


应用数学基础

胡晶◎主编

YINGYONG
SHUXUE
JICHU



责任编辑:徐树林
封面设计:赵 谦
责任印制:蔡进建

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/胡晶主编 —保定:河北大学出版社,
2001 2

ISBN 7 81028-741-9

I 应 II 胡 III.应用数学—电视大学—教
材 IV 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 06746 号

出版:河北大学出版社(保定市合作路 88 号)

经销:全国新华书店

印制:河北〇五印刷厂

规格:1/16(787mm×1092mm)

印张:16.75

字数:410 千字

印数:0001~3100 册

版次:2004 年 1 月第 2 版

印次:2004 年 1 月第 1 次

定价:25.00 元

序

高等数学由于它的基础作用,它提供的理论和方法的巧妙,它在应用时的简捷和有效,使得它越来越成为当代科学和技术进步、经济和社会发展离不开的一门基础学科。为了培养各类人才,为不同层次、不同专业所需要的高等数学教材也大量出现,其中也有不少优秀教材。

一本好的教材,除了对该学科的科学性、系统性、严肃性的要求之外,我想还应该强调两点:首先,要有针对性,根据培养目标、读者的基础和需要,对教材有一个准确的定位。这样,教材内容的确定、素材的选取、结构和时间的安排等,都应与之相适应,做到定位准确、结构合理、针对性强。其次,在语言文字上狠下功夫,在表现方式上要有“悬念情节”,要“有味道”。破除人们对数学教材是那种“枯燥无味的符号文字游戏”的误识。

胡晶同志主编的《应用数学基础》一书,是为电大系统(非数学专业)理工类和经济类学生学习高等数学而编写的。该书具有上述特点,较好地解决了“恰当定位”和“有味道”的问题。作者“以基本、实用、易自学、易掌握为原则”,“淡化理论性,注重实用性”。书中概念、理论、方法的背后,都给出适当的例题或应用实例;同时,淡化理论性不等于失去严肃性,在一些容易造成模糊的地方都指出应注意的问题,帮助读者纠正误解;在关键之处,提出一些思考题以引起读者的兴趣等。本教材篇幅不大,但要涵盖四个不同的数学分支。因此,作者在内容和素材的处理上下了一番功夫,大胆对传统和现行教材进行改革尝试;在讲清楚基本概念、基本思想的基础上,在基本定理和基本方法的应用上下功夫。本书突出重点、删繁就简,所讲述的内容读起来给人一种简洁、明快、自然、流畅的感觉。应该说这是一本很有特色的高等数学教材。

希望本书在教学实践中,不断充实,不断完善,在培养人才中发挥更大的作用。

李志阂

2001 1 9

前 言

本书是根据 2000 年 1 月经专家审定的中央电大统设的《计算机数学基础(A)”课程的教学大纲,为理工类和经济类各专业学生学完一元函数微积分内容后,开设应用数学基础课程而编写的。此课程由多元函数微积分、线性代数、概率论、数理统计基础四个数学分支的部分基本内容组成。它涵盖面宽,各个分支的知识内容的思维方式有所不同,知识的衔接性不太强,甚至有些内容难以理解。如概率论与数理统计基础部分,历届学生普遍感到课难懂、书难念、题难做。为此,在本书的编写过程中,我们注意做到以下几点:

1. 以基本、实用、易自学、易掌握为原则,吸取电大系统和其他高校相关课程教材改革的经验,遵循知识体系的系统性与科学性,而不追求知识体系的完整性,一些定理只给出结论而不进行大篇幅的逻辑推理证明,淡化理论性、注重实用性;

2. 在一些概念的描述上,大胆对传统和现行教材进行改革尝试,如逆矩阵定义等与传统定义有所不同,在不失科学性和严谨性的前提下,力求精简,使学生更容易接受;

3. 注意用通俗的语言,结合实际生活中注意到或没有注意到的实例,引入(或介绍)概念,介绍解决问题的思想方法,让人们感到数学不再深奥,数学不再难学,数学就在我们的身边,从而更加深刻地认识到数学知识的基础性和应用的广泛性;

4. 在讲清基本概念、基本思想的基础上,在基本定理、基本方法的应用上下功夫,尽量从多个方面给出一定数量的例题和与内容配套的习题,使学生加深对知识内容的理解,解决好做题难的问题;

5. 在抓住让学生掌握基本内容的同时,突出教学重点、难点,明确学习要求和知识考核点,在每章内容的开始设有学习要求,最后配有知识考核点及近年来中央电大期末考试或补考涉及到的相关课程中出现的典型试题,供学生在学习完一章内容后进行总结、归纳和自我测试;

6. 减轻学生的学习负担和经济负担,本课程不再编写与之配套的学习指导书或参考书,争取一部文字教材解决问题。在学生学习中容易混淆或易出现问题的地方,以“注意”或“思考题”的方式给予提醒和引导思考。

通过本课程的学习,使学生初步了解多个变量之间的函数关系和二元函数微积分学的基础知识,能够处理好多个变量之间的线性关系问题,掌握研究和解决随机现象规律性问题的基本思想和基本方法。

书中带(*)号的内容是教学大纲中没有要求的内容,考虑到它们的重要性,所以也把它们编入了此书,供学生选学。

各部分内容的学时是这样安排的(不包括带*部分):第1章9学时;第2章15学时;第3章12学时;第4章9学时;第5章12学时;第6章15学时,共计72学时。它可作为电大经济类本科及其他高校理工类和经济类各专业同类数学课程的教材。

本书作为河北广播电视大学重点课程教材建设项目之一,得到了河北电大李建强校长、侯侠副校长等领导同志的高度重视和具体指导。二位校长针对电大开放办学的特点及电大教学以学生为中心的实际需要,提出了该课程教材建设的总体设计思想和具体编写意见。本书由河北电大胡晶教授担任主编并编写第2,4,5,6章的内容,承德电大刘学军副教授担任副主编,编写第3章及第1章部分内容,青岛电大王可宪教授担任主审并编写第1章部分内容。河北大学原校长、现河北工业大学李志阡教授,青岛电大王可宪教授,河北电大高俊科教授、马桂君副教授都仔细地审阅了全部书稿,提出了许多宝贵意见,特别是李志阡教授为本书写了序;在本书的编写过程中,河北电大教学处、教务处、教材处的领导及同志们给予了大力支持和帮助,在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,加上编写时间紧张,虽为使本书达到最好效果尽了最大努力,但疏漏之处在所难免,诚望各位同行、老师、学生、读者给予批评指正。

编 者
2000.12

第2版说明

《应用数学基础》一书于2001年2月出版以来,在河北电大专科教育2000级、2001级和2002级计算机类各专业开设的应用数学基础课程中已使用三届,部分省电大开放教育经济类本科经济数学课程也多次使用。我真诚地希望这本源于电大数学教学实践的教材,能够回归于电大数学教学,服务于教学,在教学实践中进行检验,并得到充实和完善。两年多来,本书得到了全省电大乃至全国电大系统、部分普通高校同行们的多方关心和指导,大家在对本书给以充分肯定的同时,也诚恳地提出了许多修改意见,在此,我再一次对给予大力支持和热情帮助的各位同行表示衷心地感谢。

根据大家的意见和建议,我们对原教材从文字编写到知识内容都做了比较详细的修改,并在以下几个方面做了比较大的修改或补充:

1. 在原教材1.3.3节后增加了“1.3.4 二元函数的极值”的内容,包括一般极值和条件极值的基本概念、基本解题方法;在原教材5.5.4节后增加了“5.5.5 协方差与相关系数”的有关内容。

2. 在每节内容后增加了关键词。

3. 由于本书采用了文字主教材和辅助教材“一体化”的编写形式,在读者学习中容易混淆或容易出现问题的地方,以“注意”、“思考题”的方式给以提醒或引发思考。这次我们将这部分内容段前段后增加了空行,而且还更换了一种字体,目的是更加引起读者的注意。

最近,为了配合本书的教学和便于读者自学,我们设计制作了《应用数学基础辅助学习课件》,即CAI课件。该课件设有教学大纲、内容提要、学习要求、在线辅导、自测练习、模拟测试等栏目。特别是“在线辅导”栏目中,对本课程各章的重点、难点进行了重点辅导,并结合各部分知识内容设计制作了大量的动画、录音、录像,将一些在书本上不易用纯文字或平面图形表示的数学基本概念和基本解题方法用较生动、直观、形象地形式展现给了读者。“自测练习”不仅与读者实现了交互交流的功能,而且还可以使读者做到对每一问题知其然也知其所以然。

我真诚希望这本书在各位同行的帮助下,在教学实践中不断得到充实、完善,真正成为一部深受教师和学生欢迎的优秀教材。

胡 晶

2003.10

目 录

第 1 章 多元函数微积分学简介	(1)
学习要求	(1)
§ 1.1 预备知识	(1)
1.1.1 空间解析几何简介	(1)
1.1.2 平面点集	(4)
习题 1.1	(5)
§ 1.2 多元函数的概念、极限与连续	(5)
1.2.1 多元函数的概念	(5)
1.2.2 二元函数的极限	(7)
1.2.3 二元函数的连续性	(8)
习题 1.2	(9)
§ 1.3 偏导数与全微分	(9)
1.3.1 偏导数	(9)
1.3.2 全微分	(13)
1.3.3 复合函数和隐函数的微分法	(14)
* 1.3.4 二元函数的极值	(18)
习题 1.3	(22)
§ 1.4 二重积分	(23)
1.4.1 二重积分的概念和性质	(23)
1.4.2 二重积分在直角坐标系中的计算	(26)
1.4.3 二重积分在极坐标系中的计算	(30)
习题 1.4	(32)
知识考核点与典型试题举例	(33)
一、空间直角坐标系	(33)
二、多元函数的定义	(33)
三、偏导数与全微分	(34)
四、二重积分的计算	(34)
第 2 章 矩阵	(36)
学习要求	(36)
§ 2.1 矩阵的概念及代数运算	(36)
2.1.1 矩阵的概念	(36)
2.1.2 矩阵的代数运算	(38)

习题 2.1	(45)
§ 2.2 几种特殊矩阵	(47)
2.2.1 单位矩阵	(47)
2.2.2 数量矩阵	(47)
2.2.3 对角矩阵	(48)
2.2.4 三角矩阵	(49)
2.2.5 对称矩阵	(49)
习题 2.2	(50)
§ 2.3 方阵的行列式	(51)
2.3.1 方阵行列式的递归定义	(51)
2.3.2 行列式的性质	(54)
2.3.3 行列式的计算	(58)
2.3.4 矩阵乘积行列式定理	(62)
2.3.5 克莱姆法则	(63)
习题 2.3	(65)
§ 2.4 可逆矩阵	(66)
2.4.1 可逆矩阵与逆矩阵	(66)
2.4.2 可逆矩阵的判别与逆矩阵的求法	(67)
2.4.3 可逆矩阵的性质	(70)
习题 2.4	(72)
§ 2.5 矩阵的初等行变换与矩阵的秩	(73)
2.5.1 矩阵的初等行变换	(73)
2.5.2 初等矩阵	(74)
2.5.3 矩阵的秩	(76)
2.5.4 运用初等行变换求逆矩阵	(80)
习题 2.5	(83)
§ 2.6 分块矩阵	(83)
2.6.1 矩阵分块	(83)
2.6.2 分块矩阵的运算	(84)
习题 2.6	(87)
知识考核点与典型试题举例	(88)
一、矩阵的定义及运算	(88)
二、方阵行列式	(88)
三、特殊矩阵及其性质	(90)
四、可逆矩阵	(90)
五、矩阵的秩	(91)
六、分块矩阵及其运算	(91)
第 3 章 线性方程组	(92)
学习要求	(92)

§ 3.1 高斯消元法	(92)
3.1.1 线性方程组及其矩阵表示	(92)
3.1.2 高斯消元法	(93)
3.1.3 线性方程组所有解的矩阵形式	(98)
习题 3.1	(98)
§ 3.2 线性方程组的相容性定理	(98)
习题 3.2	(100)
§ 3.3 n 维向量及线性相关性	(101)
3.3.1 n 维向量及线性表出的概念	(101)
3.3.2 向量组的线性相关性	(103)
习题 3.3	(107)
§ 3.4 极大无关组及向量组的秩	(108)
3.4.1 极大无关组及向量组的秩的概念	(108)
3.4.2 向量组的秩及极大无关组的求法	(109)
习题 3.4	(111)
§ 3.5 齐次线性方程组解的结构	(112)
3.5.1 齐次线性方程组解的性质	(112)
3.5.2 齐次线性方程组的基础解系及通解	(112)
3.5.3 关于齐次线性方程组解的有关结论	(115)
习题 3.5	(115)
§ 3.6 非齐次线性方程组解的结构	(115)
3.6.1 非齐次线性方程组解的性质	(115)
3.6.2 非齐次线性方程组解的结构及通解	(116)
3.6.3 关于非齐次线性方程组解的有关结论	(117)
习题 3.6	(118)
知识考核点与典型试题举例	(118)
一、 n 维向量及线性相关性	(118)
二、向量组的秩及极大无关组	(119)
三、线性方程组及其一般解	(119)
四、线性方程组相容性定理及解的情况讨论	(120)
五、线性方程组解的结构	(120)
第 4 章 随机事件与概率	(122)
学习要求	(122)
§ 4.1 随机事件	(123)
4.1.1 随机试验与随机事件	(123)
4.1.2 事件间的关系与运算	(124)
习题 4.1	(128)
§ 4.2 随机事件的概率与古典概型	(128)
4.2.1 随机事件的概率及其性质	(128)

4.2.2 古典概型	(130)
习题 4.2	(132)
§ 4.3 概率的加法公式	(132)
4.3.1 互斥事件的概率加法公式	(132)
4.3.2 概率加法公式的一般形式	(135)
习题 4.3	(136)
§ 4.4 概率的乘法公式与全概公式	(137)
4.4.1 条件概率	(137)
4.4.2 概率的乘法公式	(139)
4.4.3 概率的全概公式	(140)
习题 4.4	(143)
§ 4.5 事件的独立性与二项概型	(143)
4.5.1 事件的独立性	(143)
4.5.2 贝努里试验与二项概型	(146)
习题 4.5	(148)
知识考核点与典型试题举例	(148)
一、随机事件与概率	(148)
二、概率的加法公式、条件概率、乘法公式、全概公式	(149)
三、事件的独立性与二项概型	(150)
第 5 章 随机变量及其数字特征	(152)
学习要求	(152)
§ 5.1 随机变量及其分布	(152)
5.1.1 随机变量的概念	(152)
5.1.2 离散型随机变量及其概率分布	(154)
5.1.3 连续型随机变量及其概率密度	(154)
5.1.4 随机变量的分布函数	(156)
习题 5.1	(158)
§ 5.2 随机变量的数字特征	(159)
5.2.1 数学期望	(159)
5.2.2 方差	(162)
5.2.3 矩的概念	(163)
习题 5.2	(163)
§ 5.3 几个常见随机变量	(164)
5.3.1 二点分布	(164)
5.3.2 二项分布	(165)
5.3.3 泊松分布	(165)
5.3.4 均匀分布	(167)
5.3.5 指数分布	(167)
习题 5.3	(168)

§ 5.4 正态分布	(169)
5.4.1 一般正态分布	(169)
5.4.2 标准正态分布	(170)
5.4.3 一般正态分布与标准正态分布的关系	(171)
5.4.4 正态分布的数字特征	(172)
5.4.5 二项分布的正态近似	(173)
习题 5.4	(174)
§ 5.5 二维随机变量及其独立性	(174)
5.5.1 二维离散型随机变量的联合分布与边缘分布	(175)
5.5.2 二维连续型随机变量的联合密度函数与边缘密度函数	(177)
5.5.3 二维随机变量的分布函数	(178)
5.5.4 随机变量的独立性	(179)
5.5.5 协方差与相关系数	(181)
习题 5.5	(183)
§ 5.6 大数定律与中心极限定理	(184)
5.6.1 切比谢夫(Чебышев)不等式	(184)
5.6.2 大数定律	(185)
5.6.3 中心极限定理	(186)
习题 5.6	(187)
知识考核点与典型试题举例	(187)
一、随机变量及其分布	(187)
二、随机变量的数字特征	(188)
三、常见的几个随机变量及其数字特征	(189)
四、正态分布的概率计算及其数字特征	(190)
五、二维随机变量及其独立性	(190)
第 6 章 数理统计基础	(192)
学习要求	(192)
§ 6.1 数理统计的基本概念	(193)
6.1.1 总体与样本	(193)
6.1.2 样本数字特征与统计量	(194)
6.1.3 常用统计量的分布	(195)
习题 6.1	(197)
§ 6.2 参数估计	(197)
6.2.1 参数估计的概念	(197)
6.2.2 参数的点估计	(198)
6.2.3 估计量优良性的评价标准	(203)
习题 6.2	(204)
§ 6.3 参数的区间估计	(205)
6.3.1 参数区间估计的概念	(205)

6.3.2 单正态总体均值的区间估计	(206)
6.3.3 单正态总体方差的区间估计	(208)
习题 6.3	(209)
§ 6.4 参数的假设检验	(209)
6.4.1 假设检验的思想	(209)
6.4.2 单正态总体对均值 μ 的假设检验	(212)
6.4.3 单正态总体对方差 σ^2 的假设检验	(214)
习题 6.4	(216)
§ 6.5 回归分析	(217)
6.5.1 最小二乘法与回归直线方程的建立	(218)
6.5.2 回归直线方程的显著性检验	(221)
6.5.3 预报与控制	(223)
习题 6.5	(226)
知识考核点与典型试题举例	(226)
一、数理统计的基本概念	(226)
二、参数的点估计	(227)
三、参数的区间估计	(227)
四、参数的假设检验	(228)
五、回归分析	(229)
习题答案或提示	(230)
附录 1 标准正态分布数值表	(246)
附录 2 t 分布双侧临界值表	(247)
附录 3 χ^2 分布上侧临界值表	(248)
附录 4 F 分布上侧临界值表	(249)
参考文献	(254)

第 1 章 多元函数微积分学简介

我们已经学习过了一元函数微积分,但是在自然科学中往往会碰到一个变量依赖于多个变量的情形,这就要求我们去研究含有多个自变量的函数,即多元函数.本章将介绍多元函数的概念,二元函数的极限与连续、偏导数、全微分、二重积分及其计算.

学习要求

1. 了解空间直角坐标系的有关概念,知道几个简单的二次曲面,会求空间两点之间的距离,会用不等式组表示平面区域.
2. 了解二元函数的概念.
3. 了解二元函数的偏导数与全微分概念,知道全微分存在的必要条件.熟练掌握求偏导数与全微分的方法.会求简单函数的二阶偏导数.
4. 了解二重积分的概念、几何意义及基本性质,掌握在直角坐标系下计算二重积分的方法,会利用极坐标系计算简单的二重积分.

§ 1.1 预备知识

本节介绍空间直角坐标系,空间的平面与曲面,平面区域,为后面介绍多元函数微积分知识做准备.

1.1.1 空间解析几何简介

在平面解析几何中,我们建立了平面上的点与一对有序实数的一一对应关系,建立了平面上的曲线和代数方程的一一对应关系,因此,可以用代数的方法研究几何问题.类似地,在空间解析几何中,我们也可以通过空间直角坐标系建立空间图形与代数方程的一一对应关系,这些知识正是我们后面学习多元函数微积分所必需的.

1. 空间直角坐标系

过空间一点 O , 做三条两两相互垂直的数轴 Ox, Oy, Oz , 它们的位置关系这样规定: 以右手握住 Oz 轴, 当右手四指从 Ox 轴正向逆时针旋转 90° 正好到达 Oy 轴正向时, 大拇指的指向就是 Oz 轴的正向. 点 O 称为坐标原点, Ox, Oy, Oz 统称为坐标轴, 简称为 x 轴, y 轴, z 轴, 原点 O 和三个

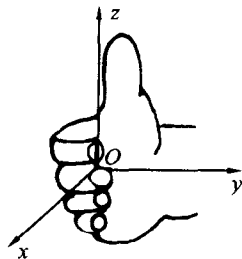


图 1-1-1

坐标轴组成了一个空间直角坐标系,见图 1-1-1.

分别由 x 轴与 y 轴, y 轴与 z 轴, z 轴与 x 轴所张成的 Oxy 平面, Oyz 平面, Oxz 平面统称为坐标平面;三个坐标平面把空间分成八个部分,每一部分称作一个卦限,见图 1-1-2.

在给定的空间直角坐标系中,设 M 是一给定点,过 M 做三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴,交点分别记为 P, Q, R , 这三点在三个坐标轴上的坐标依次为 x, y, z , 如图 1-1-3 所示. 这样,空间中的一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 (x, y, z) , 称 (x, y, z) 为点 M 的坐标, 记为 $M(x, y, z)$. 反之,任给一个有序数组 (x, y, z) , 我们也可以在三个坐标轴上分别取坐标依次为 x, y, z 的三点 P, Q, R , 然后通过 P, Q, R 分别做垂直于 x 轴、 y 轴与 z 轴的平面,这三个平面的交点 M 便是以有序数组 (x, y, z) 为坐标的点. 这样,通过空间直角坐标系就建立了空间点 M 与一个有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系.

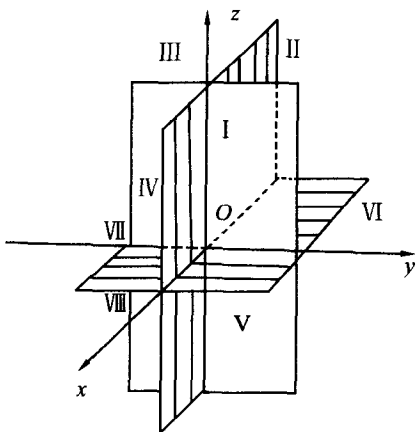


图 1-1-2

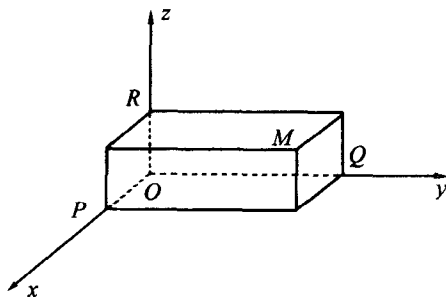


图 1-1-3

思考题 在空间直角坐标系的八个卦限中, 点的坐标的符号是怎样的? 点 $P(x, y, z)$ 的三个坐标中若有一个为 0, 这个点在何处? 若有两个坐标为 0, 这点在何处?

2. 空间两点间的距离公式

设在空间直角坐标系中给定两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 试求点 M_1 与 M_2 之间的距离.

过 M_1 与 M_2 分别做平行于坐标平面的平面.

这六个平面构成图 1-1-4 所示的长方体, 这个长方体的三个棱长分别为 $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$, $|z_2 - z_1|$. 我们注意到 $\angle M_1BA$ 和 $\angle M_1AM_2$ 都是直角, 很容易得到

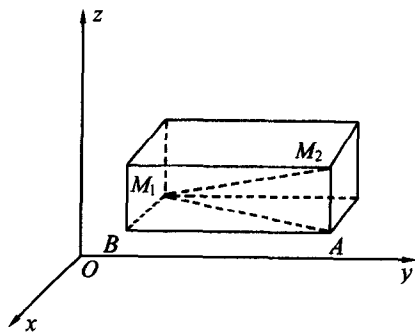


图 1-1-4

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

思考题 点 $P(x, y, z)$ 到: (1) 各个坐标平面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的距离各是多少?

3. 曲面与方程

如果曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 之间有下列关系:

(1) 曲面 S 上任一点的坐标 (x, y, z) 都满足方程 $F(x, y, z) = 0$;

(2) 满足方程 $F(x, y, z) = 0$ 的有序数组 (x, y, z) 所对应的点都在曲面 S 上, 那么方程 $F(x, y, z) = 0$ 就称为曲面 S 的方程, 而曲面 S 就称为方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形.

如果方程 $F(x, y, z) = 0$ 是关于 x, y, z 的一次方程, 则该方程表示一个平面. 即 $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C 为常数) 表示空间一个平面.

如果空间曲面方程 $F(x, y, z) = 0$ 是二次的, 则它所对应的曲面称为二次曲面, 后面用到的二次曲面有球面、椭球面、圆锥面、圆柱面和旋转抛物面.

例 1 以 (a, b, c) 为球心, R 为半径的球面方程为 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$; 特别地, 以原点 $(0, 0, 0)$ 为球心, R 为半径的球面方程是 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 见图 1-1-5.

例 2 二次方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 表示椭球面, 见图 1-1-6.

例 3 二次方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 表示对称轴为 z 轴的圆锥面, 见图 1-1-7.

例 4 二次方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 表示对称轴为 z 轴的圆柱面, 见图 1-1-8.

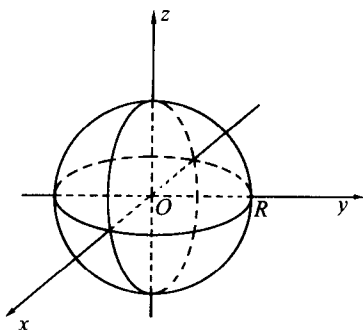


图 1-1-5

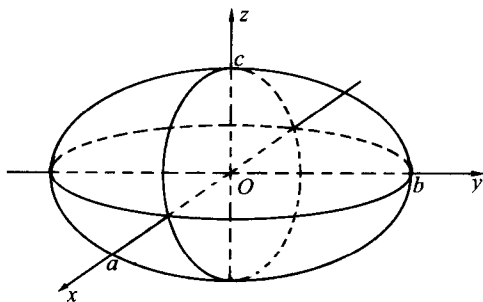


图 1-1-6

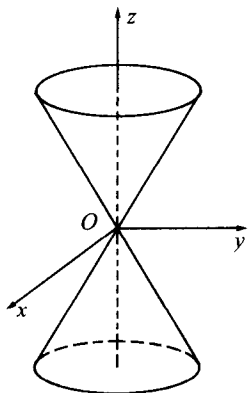


图 1-1-7

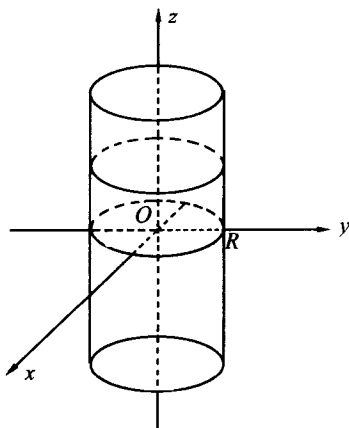


图 1-1-8

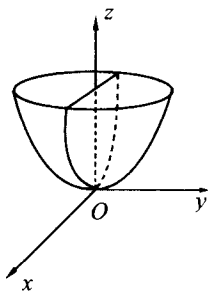


图 1-1-9

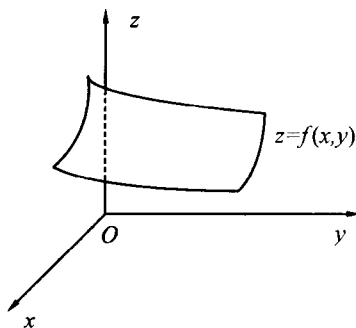


图 1-1-10

例 5 二次方程 $z = x^2 + y^2$ 表示以 z 轴为对称轴的旋转抛物面, 见图 1-1-9.

如果能从曲面方程 $F(x, y, z) = 0$ 中解出 z 来, 得到形如

$$z = f(x, y)$$

的曲面方程, 我们将在后面学习二元函数时知道, 二元函数 $z = f(x, y)$ 的几何意义通常就是一张空间曲面, 见图 1-1-10.

1.1.2 平面点集

我们已经知道一个二元有序数组 (x, y) 对应于平面上一个点, 这种点的集合称为平面点集.

例如, 平面点集 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 表示 Oxy 平面上以原点为圆心, 1 为半径的圆的内部及圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上所有点的集合. 平面点集 $B = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ 表示 Oxy 平面上第一象限内所有点的集合 (不包括 Ox 轴和 Oy 轴上的点). 平面点集 $C = \{(x, y) \mid x > y^2\}$ 表示 Oxy 平面上抛物线 $y^2 = x$ 内部所有点的集合.

本章我们将常用到“区域”的概念. 通俗地说, 平面区域是指平面上由一条或几条曲线围成的部分. 区域可以是有限的, 例如圆形区域, 矩形区域等, 这种区域总可以包含在某一个

以原点为圆心,半径充分大的圆周内,称为**有界区域**.区域也可以伸展到无穷远,如上面的点集 B 和 C ,这种区域不是有界的,称为**无界区域**.

围成区域的曲线称为**区域的边界**.包括全部边界的区域称为**闭区域**,不包括边界上任何点的区域称为**开区域**.

以 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心, $\delta(>0)$ 为半径的圆的内部的点的全体,即平面点集 $\{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$,称为点 P_0 的 δ 邻域,记为 $N(P_0, \delta)$.

本节关键词

空间直角坐标系 曲面方程 区域 邻域

习题 1.1

1. 求出点 $(2, -3, -1)$ 关于:(1) 各坐标平面;(2) 各坐标轴;(3) 坐标原点的对称点的坐标.

2. 根据下列条件求点 B 的未知坐标:

(1) $A(4, -7, 1), B(6, 2, z), |AB| = 11$; (2) $A(2, 3, 4), B(x, -2, 4), |AB| = 5$.

3. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ 的球心坐标和球的半径.

4. 指出下列各方程在空间直角坐标系中表示的几何图形:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; (2) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; (3) $x^2 + y^2 = 1$;

(4) $x^2 + y^2 - 2x = 0$; (5) $x^2 + y^2 = 0$; (6) $x^2 - y^2 = 0$; (7) $z = x^2 + y^2$;

(8) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; (9) $2x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 1$; (10) $x^2 = 4y$.

§ 1.2 多元函数的概念、极限与连续

在一元函数微积分中,我们讨论的都是一个自变量的函数,这种函数叫做一元函数.通常我们所研究的问题往往涉及到多方面的因素,反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的情形,这就要求我们去研究多元函数.因为从一元函数到二元函数会产生新问题,而从二元函数到二元以上的多元函数可以类推.因此,在后面的多元函数的微分学和积分学的研究中,我们重点研究二元函数.本节介绍多元函数的概念、极限和连续.

1.2.1 多元函数的概念

先看下面的例子.

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r 、高 h 之间具有关系

$$V = \pi r^2 h$$

这里, V 是随着 r, h 的变化而变化的,当 r, h 在一定范围($r > 0, h > 0$) 内取定一对值时, V 的对应值就随之确定.

例 2 一定量的理想气体的压强 P , 体积 V 和绝对温度 T 之间具有如下关系