

內 部 刊 物
注 意 保 存

中國科學技術大學建校五周年紀念

科學論文集

1963.9.

中國科學技術大學建校五周年紀念

科學論文集

1963.9.

科学论文集

中国科学技术大学科学论文集編輯委员会編

中国科学技术大学印刷厂印刷

1963年9月第一次印刷	开本: 787×1092 1/16
字数: 957,840	印数: 0001—1,575
印张: 38 1/2	插页: 2页

发 刊 詞

郭 沫 若

中国科学技术大学建校五周年了。

在党领导下，进行社会主义建设，要把祖国建设成为农业现代化、工业现代化、国防现代化、科学技术现代化的社会主义强国，这是我们的历史使命。

科学技术现代化尤其是四个现代化中的关键问题。为国家多多培养出科学人才，多多贡献出科学成果，这是本校建校的的根本任务。

建校五年，我们第一次初步培养出了一批科学人才，今后还将源源不断地增加人才的数量，并提高人才的质量。质量的提高是包含着已毕业的同学们的不断努力，提高自己的学术水平和业务水平而言。

为了纪念校庆，教师们和同学们决定编辑出版“科学论文集”，收集教师们与同学们的科学论著以为纪念。

这为本校开辟出了一个“百家争鸣，百花齐放”的园地，确实是出成果的一个好办法。不仅可以促进本校科研工作的开展，活跃本校的学术空气；并通过相互观摩、交流经验，更可以不断地提高教学质量和学术水平。

既出人才，又出成果，两者是互相联带的。成果的数量和质量也希望不断地增加和提高。

同一科系对同一问题提出不同的看法，这是一种争鸣。不同科系本着社会主义竞赛的精神，争出成果，这也是一种争鸣。这后一种争鸣，事实上也就是百花齐放。

不同科系的竞赛是应当欢迎的,不同意見的爭論也是应当欢迎的。在科学技术崗位上,爭社会主义之鳴,放社会主义之花,断然可以保証提高我們的学术水平,乃至教学質量。

我們标迈出了万里长征第一步。我們要不断努力,不断前进,踏破任何艰險的途徑,攀登上科学高峯并不断創造科学高峯,逐步完成并开拓我們的历史使命。

1963年12月10日

目 錄

发刊詞.....	郭沫若	
有限与无穷, 离散与連續.....	华罗庚、王 元	1
多复变数典型域的 Cauchy 型积分 (I).....	龔 昇	23
关于测度的一个收敛定理.....	陈希孺	26
具有正特征值矩陣的 P 条件数界限的估計.....	石鍾慈	35
一类定常迭代法收敛的必要条件.....	石鍾慈	41
关于有限羣零群的几个定理.....	曾肯成	44
Poincaré 型方程的极限环綫	董金柱	50
Riemann 函数的两个性質及其应用	温寰海、涂方登、刘耀荣	55
加入概率依赖于队长的 M/G/1 排队模型中的某些 問題.....	曹靖华、顏基义	65
用数論网格計算重积分.....	张荣肖	76
橢圓內整点問題.....	馮克勤	88
长方陣射影几何基本定理的証明.....	裴定一	99
带电粒子在电磁場中的运动区域及其模型实验.....	徐荣栏、周国成	111
扰动和基本气流相互作用的若干問題.....	叶篤正、方宗义	115
太阳輻射影响下热对流的发展.....	巢紀平、郭裕福	129
滴譜取样中併合概率的計算.....	徐华英、周乐义	136
氢原子的双光子吸收.....	方勋之、区 智	150
Hall 效应及磁电阻效应对趋肤效应的非綫性影响	季为之	155
关于固体强度理論.....	刘叔仪	162
原子核振动的近似二次量子化处理.....	周邦融	169
配合慢閃燄体的快符合綫路.....	徐克尊、俞順弟	184
高中子通量、水水型、鈾燃料元件工程材料試驗反应堆.....	王世伟	190

磁芯测试仪的研制	戴貴亮、洪世榕	202
隧道二极管的大訊号图解分析	吳錫九、胡維义、薛嘯宙、张 冀、廖后国	215
取样电压表	林金谷、黃盛林、叶国輝	220
釷—釷石榴石型鉄氧体鉄磁共振的研究	叶安民、程国良	223
无坩堝区域熔化法中提高硅单晶質量之途径的研究	梁駿吾、麦汝奇、孟承中	229
Nb_3Sn 热导率的測量	曾泽培、錢永嘉	233
$Nb-Sn$ 合金相图的两个問題	管維炎、王昌衡、陈兆甲	236
关于圓电波波导网络元件的一些初步研究	吳志元	238
用时变相参积累器实现中頻寬脉冲信号的积累	楊震明、林可祥、孙延祺、周海祥	245
角形天綫半机械扫描的研究	林德应	260
推广的等效自旋哈密頓	林福成、祝繼康、黃武汉	269
对流层的不均匀性对无綫电定向定位的影响	刘瑞源	280
等离子体振盪的初步研究	王宝城、王淑霞	299
玻璃棉的吸声性質	呂如榆、莫中廉	306
隧道二級管触发振盪綫路的研究	夏培肃、韓承德	310
磁心存儲器驱动电流源的可靠性設計及其稳定性	伍福宁、董泽溥	321
并联多通道运算放大器的分析和設計	屈宗明、王念祖	336
人造卫星方位控制系统执行机构的一种方案—慣性論	譚昌元	348
磁带机环状写头的設計	刘鏡周	359
用在对称二自由度进动陀螺上的环状阻尼—平衡器的 分析	孙树勳、张春华	370
平面和空間低付四桿机构的类型綜合	曹繼賢	381
层流扩散火焰的研究	俞書勤	389
醛在烴气相氧化中的作用	郭迺齡	404
TTA—TBP 协同萃取 Sm^{3+} , Yb^{3+} 机理的某些探討	江研因、张廷翰	424
用二甲酚橙作鎳的分光光度測定	洪水皆、张孝松	428
用二甲酚橙作鈷的分光光度測定	洪水皆、任凭德	436
氣仿——多联苯体系的能量轉移	林念芸、张庆波、毛信玉	443

磷乙硅氧型单体的合成及水解縮聚·····	楊玉崑、毕先同、王葆仁	447
酸与胺存在下己内醯胺聚合反应的研究·····	于天义、王有槐	457
含乙烯基的聚硅氧烷树脂制备及聚合·····	黃志鐘、蔣大智	463
某些 B—三烷基—N—三对溴苯基硼氮六圓的 合成·····	佟振合、黃惠安、蔣丽金、曾繁杰	470
用界面縮聚法合成同型共聚醯胺的一些有关問題·····	张云崗、楊承淑、王葆仁	477
聚对苯二甲酸对苯二酚酯·····	王葆仁、宝淨生、陈传福	484
甲基丙烯酸-2,4,6-三氯苯酯的合成与聚合及共聚合 的研究·····	崔松鶴、郑平	490
地壳的元素丰度及其区域特征·····	黎彤、饒紀龙	495
綠柱石中碱金属含量的測定·····	赵貴文、易祖华、潘克进	507
中国某区气成热液鉍矿的某些地球化学特征·····	李秉伦	513
金属鉍作为吸气剂在氩分析器上的应用探討·····	陈道公	521
內蒙三岔口地区变質岩的变質相及其变質时代·····	陈江峯	526
褐釩矿的某些物理性質研究·····	郭其梯	538
四水四硼酸鉀晶体空間群的測定·····	张乃爛	546
纖鈉鉄矾的晶胞常数和空間群·····	雷番立	549
同位素地球化学的任务·····	姜传武	551
电子显微鏡在矿物研究上应用的概况·····	章振根、郭师曾	554
干叶綠体膜的热致发光現象·····	孙紋琦、陈云俊	557
电子順磁共振在生物学中的应用···	忻文娟、姚敏仁、章正廉、李欽、华庆新、紀极英	560
小白鼠体溫調节的研究·····	郑竺英、汪云九、顧凡及、蔣錫昌、朱斌	579
果蝇 (<i>Drosophila melanogaster</i>) 胸长和翅长的相关·····	楊紀珂、张錦珠、賈志斌	586
果蝇在 44°C 下死亡率分布和胸长的分布·····	楊紀珂、賈志斌、张錦珠	590
电子順磁共振样品溫度的控制·····	李兴国、董力、王大輝	595
綠叶色素膜的光导性·····	夏发生、憚勤、黃婉治	605

有限与无穷 离散与連續*

——教学相长体会之一

(为紀念中国科学技术大学建校五周年而作)

华罗庚 王 元

(一)

这是我們教低年級数学基础課的一些体会，似乎是看出了些問題，但由于作者的水平限制，对数学的了解是片面的，并且更沒有哲学修养能从若干感性知識中概括出理性論断来。所以写这样一篇提供素材的文章，希望聚沙成塔，集腋成裘，以备沙里淘金者的参考。

数学中有两大类的問題：一类是离散性質的，一类是連續性質的。在我們一生学习的过程中，开始于数数——一、二、三、四、五、……。这完全是离散性質的东西。算术、代数都是处理离散性質問題的学科。整个中学阶段所学的数学可以說都不是突出利用“連續性”与“无穷性”的学科。直綫上的点显示出連續性質，但突出地重用“連續”确始于微积分。在描繪一瞬間的速度，或一瞬間的量的变化，我們重用了“連續”性与“无穷”。这就是初等数学与高等数学的分界。但如果从“初等”“高等”这些字样，或我們学习的次序，就断定“連續性的数学”比“离散性的数学”更优越了或更能解決問題了，那就不尽然了。本文的目的在于着重地談談离散性的重要。但必須指出，我們不是說連續性次要些，而是說必須两者妥善結合。一切从实际出发，看需要而决定。不能強調一面而忽略一面，但有一点似乎可以向初学者建議的，在学連續性数学之前，先打好所对应的离散性数学的基础。因为絕大部份連續性的結果往往以离散性的結果做背景的，或者是离散性問題的极限。但并不是說，我們不应当把学习的时间或精力在連續性数学上多化一些。

先看看客觀事实，如果本来就是离散的，那就不必人为地引进連續性（但并不排斥，虽然离散，但多到无法处理的时候，也势所必致地用連續方法来处理的可能性，如沙的流动）。在資本主义国家里有些經濟学者，用微分方程来处理經濟学上的問題，我們对經濟学一窍不通，不能有所批判，但有一点可以肯定，他們所根据的数据是离散——或者實質上不可能連續化的。如：农业生产量不能分为每瞬間几何？它是季度性生产，連分月份都不可能，枉論其他。用連續方法来处理离散問題，对头否？但他們有这样的答辯：用上了微分方程就有定性理論，利用它易于看出发展趋势。岂其然哉！實質上，利用差分方程或矩陣乘方的性質照

* 感謝中国科学院裴丽生副院长的鼓励。他建議我們把教学体会不要仅仅写在数学著作[1]或教材[2]中，把一些与其它兄弟学科可能有关的东西，写出来互相交流，因此才写了这样一篇内容燕杂的文章，敬求兄弟学科及本学科同志們的指教。

样可以看到趋势。并且还容易些，还浅显些。但是在大学課程中沒有包括进去而已，或原則上有之，但未象微分方程那样多方強調而已。在（三）中还将指出連續化的不可能性，硬用較深的数学殊无謂也。深入浅出是功夫，浅入深出是浪費。

我們有这样的不成熟的看法，先学些矩陣知識，差分方程，再学微分方程，則既可以学得处理“离散”問題的方法，取其极限，往往又可以得出微分方程的結果。

以上所講就是說明，离散問題用离散方法来处理为妥的論点。現在进一步說明：連續問題中的离散处理方法。

首先的問題是数据取得的問題。能不能取得无穷精密的数据？不能，即使准到十位百位，用十位百位小数表达出来的数据所成的集体仍然是离散的，而不是連續的。（并且有时过分的精密度是完全不必要的）。再則取数据的次数也必然是有限的，离散的。

其次看計算工具，近代的数字电子计算机本質上是离散的。它的特点是根据有限位数据进行有限次运算，算出有限个有限位的解答来。一切有限，仍然是离散的。

最后所能拿出来的結果（或客观的要求也是如此）当然也是离散的。这是一个从离散到离散的过程。数学家們通常的想法是从离散数据用插入法或回归法得函数，得微分方程，微分方程直接解不出来，再将微分方程差分化变为代数方程（离散），然后得出离散性的解答来。其过程中，經過插入法有誤差，經過差分法又有誤差，变成代数問題以后的求解誤差就不提了。因而提出了以下的課題：能不能从离散直接到离散。这样避免了經過函数逼近的誤差，避免了經過微分方程差分求解的誤差。如果可能，則方法初等化了！而結果反而可能更精密了！我們水平限制不敢多所論列，但主观上認为这是一个值得嘗試的方向。申声一下，重視离散性方法的同时，我們决不能忽視連續性方法。解析数論就是一門用連續性方法处理离散問題而获得重要成果的分支。連續性的考虑往往会看到一些离散性所不易看到的問題。

以下罗列一些例子，这些例子是从教基础課得来的。选择的标准当然也就是基础課或略高一些的水平。并且都是选取了与其他学科的科学工作者有共同兴趣的課題。各节之間的关系也是不太大的。例如：常用富利哀級数的同志不妨看看第四节。

再重复一句，这是抛砖引玉性質的文章。多举出些具体的感性材料，有可能为将来的教学改革或理論認識創造条件。虛心求教，敬請指正。

（二）对象是連續的，但我們只能了解到其有限个数据——算体积，算面积

在学了微积分之后，我們常常有这样的喜悦：任何曲綫的长度，任何曲面的面积及任何物体的体积都可以用积分方法来处理了。这种喜悦是应当有的，也是可以理解的。但是以为这就已經可以解决問題了，那就錯了。深入一想，我們所学过的方法都有一个共同的要求：就是要求有表示曲綫，曲面的公式：也就是在实际中，有沒有这样的表达公式？例如說：在估計矿藏儲量时，有沒有一个表示这矿体周界的解析公式。又如在估計山坡面积时，有沒有一个 $z=f(x, y)$ 表示这曲面的公式。在实际情况中是沒有的。一来由于我們不可能对每一点都进行实测，二来由于即使对矿体测了很多点，但也是不能够求出曲面的表达式来的，即使拼拼凑凑找出个公式，但在求积分的时候，依然是积不出来（找原函数）的时候多，而能够积成初等函数的时候少——少得很。因而矿体和山坡虽然是連續分布的，但是我們还是必

須用离散的方法才能(近似)估出体积及面积。

但这并不是說微积分上求面积体积的公式沒有用了,这儿是說,必須看看怎样才能用得上,并且将发现,理論是有用的,它能給我們提供具体的綫索,并帮我們判断各种方法的优劣性及进一步改善这些方法。

还是举一个例子吧:在估計山坡面积时,有两套方法:一套是地理学家的方法,称为 Волков 法,另一套是矿藏几何学家的方法,称为 Бауман 法。以下我們把它們介紹一下,再比优劣。

假定地图上以 Δh 为高程差画出等高綫,并假定有一制高点及等高綫成圈(其他情况很容易由此被推导出来)。假定由制高点 (l_n) 向外一圈一圈地画等高綫 $(l_{n-1}), (l_{n-2}), \dots, (l_0)$ 。取 (l_0) 的高度为 0, (l_n) 的高度为 h 。 (l_i) 与 (l_{i+1}) 之間 的面积用 B_i 表示(即投影的面积)*。

1. Бауман 方法。

$$a) C_i = \frac{1}{2}(l_i + l_{i+1})\Delta h \text{ (中間直立隔板}$$

的面积);

$$b) \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + C_i^2} \text{ 就是所求的斜面积的近似值。}$$

2. Волков 方法。

$$a) l = \sum_{i=0}^{n-1} l_i \text{ 为等高綫的总长度。 } B = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \text{ 为总投影面积。由}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta h \cdot l}{B}$$

得出平均傾角 α ;

$$b) B \sec \alpha = \sqrt{B^2 + (\Delta h \cdot l)^2} \text{ 就是所求的斜面积的近似值。}$$

这两个方法那一个更好一些? 这些方法所給出的結果在怎样的程度上逼近斜面积? 又当等高綫的分布趋向无限精密时, 这些方法所給出的結果是什么? 是否就是真的面积? 下面我們将回答这些問題。

以制高点为中心引进极坐标。命高度是 z 的等高綫方程是

$$\rho = \rho(z, \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(假定 $\rho(z, \theta)$ 适当地光滑)。命 $z_i = \frac{h}{n}i$, $\Delta h = \frac{h}{n}$ 。則 (l_i) 所圍繞的面积等于

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(z_i, \theta) d\theta.$$

* 等高綫 (l_i) 的长度用 l_i 表示。

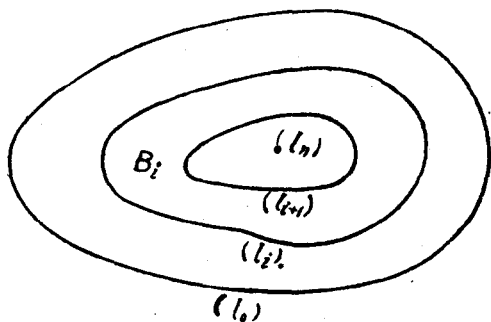


图 1

(l_i) 的长度等于

$$l_i = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i, \theta) + \left(\frac{\partial \rho(z_i, \theta)}{\partial \theta}\right)^2} d\theta.$$

于是由中值公式得

$$B_i = - \int_0^{2\pi} \rho(z'_i, \theta) \frac{\partial \rho(z'_i, \theta)}{\partial z'_i} d\theta \Delta h$$

及

$$C_i = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z''_i, \theta) + \left(\frac{\partial \rho(z''_i, \theta)}{\partial \theta}\right)^2} d\theta \Delta h,$$

其中 $z_i \leq z'_i$, $z'_i \leq z_{i+1}$. 因此当 $\Delta h \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 趋近于

$$B_a = \int_0^h \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} d\theta\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} dz.$$

这便是当 $\Delta h \rightarrow 0$ 时, 用 Бауман 方法算出的斜面积所趋近的值。而 $\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i\right)^2 + \left(\Delta h \sum_{i=0}^{n-1} l_i\right)^2}$ 的极限

$$B_0 = \sqrt{\left(\int_0^h d\theta \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} dz\right)^2 + \left(\int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2}.$$

便是 Волков 方法算出的斜面积所趋近的值。

习知曲面的面积 S 为

$$S = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2} d\theta dz.$$

引入一个复值函数

$$f(z, \theta) = -\rho \frac{\partial \rho}{\partial z} + i \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2},$$

则

$$S = \int_0^h \int_0^{2\pi} |f(z, \theta)| d\theta dz.$$

$$B_a = \int_0^h \left| \int_0^{2\pi} f(z, \theta) d\theta \right| dz,$$

$$B_0 = \left| \int_0^h \int_0^{2\pi} f(z, \theta) d\theta dz \right|.$$

由此可见

$$B_0 \leq B_a \leq S.$$

结论: (i) Бауман 方法比 Волков 方法精密些, (ii) 所求出的结果比真正的结果常常偏低一些。

除此而外, 不难讨论 $B_0 = S$ 及 $B_a = S$ 的情况。我们还可以给出由这些方法所产生的误差的估计, 并指出产生误差的原因及避免误差的方法。关于这些请参看 [1], [2]。

附记 1. 本节所用的积分是可以避免的。

(三) 无法连续化——非负方阵

如产量, 如能量, 如概率都不能是负数。在宇宙线的簇射过程中, 在运筹学及概率论的若干问题中, 往往出现非负元素的方阵, 即某些物态的多寡经过某段时间之后的变化情况可以用非负方阵表达之。更具体些说, 例如有甲乙丙三种物件各有 a, b, c 单位。但是经过一段时间 t 之后, 甲类物质变为 $ap_{11}, ap_{12}, ap_{13}$ 单位的甲乙丙三类物质, 而乙类物质变为 $bp_{21}, bp_{22}, bp_{23}$ 单位的甲乙丙三类物质, 丙类物质变为 $cp_{31}, cp_{32}, cp_{33}$ 单位的甲乙丙三类物质。即经过时间 t 后, 甲乙丙物质的数量各为

$$ap_{11} + bp_{21} + cp_{31},$$

$$ap_{12} + bp_{22} + cp_{32},$$

$$ap_{13} + bp_{23} + cp_{33}$$

个单位。由于物质不能变负, 所以 $p_{ij} \geq 0$ 。这方阵

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

称为变化方阵。如果原始物质的数量用矢量 $v = (a, b, c)$ 表之, 则经过时间 t 后, 其数量将为

$$vP.$$

如果仍然照这样的关系变化, 则经过 $2t$ 时间将得

$$vP^2.$$

经过 nt 时间则为

$$vP^n.$$

当 n 增加时, 我们可以看出发展趋势。

为了易于了解起见, 我们回到单一的情况。设原来的数量是 c , 经过单位时间后变为 cq , 经过 n 个单位时间得 cq^n , 经过半个单位时间可以设想, 它的数量是 $cq^{1/2}$ (注意问题就在这儿!), 一般地讲, 可以设想在时间 t 的时候, 它的数量是 $f(t) = cq^t$, 它的微分表达式是

$$\frac{df}{dt} = (\log q)f, \quad f(0) = c.$$

也就是说 $f(t) = cq^t$ 是微分方程唯一的解。

对于单一的现象, 这方法虽有在理论上不妥当的地方, 即在时间 $1/2$ 是否是 $q^{1/2}$ 倍。但是在应用的时候并不出现困难, 其主要原因是个正数可以任意开方, 也就是

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q^\epsilon - 1}{\epsilon} = \log q$$

是实的, 存在的。这个规律可以描述为量的增加率与时间成比例。因此可能事实上虽然 $q^{1/2}$ 不定义, 但我们理想地设想它存在, 并不会发生什么矛盾。

如果有人希望把这一规律推广到多个现象的时候, 那就势必致地要求, 求方阵 P 的平方根; 求方阵 P 的任意次方根。是否有非负方阵的平方等于 P ? 如果没有, 则用微分处理是

不可能的、举个例子：没有非负方阵的平方等于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其理由是极简单的，如果

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $a^2 + bc = 0$ ，由 a, b, c 的非负性质得 $a = 0$ 及 b 或 $c = 0$ 。这是不可能的。换言之，如果方阵 P 不是“无穷可分的”，也就是没有实方阵 Q 使 $P = e^Q$ ，则不可能用微分方法来处理。在研究线性弹性系统微振动的颤动性质的时候，所对应的方阵的特征根全是正的，而且是不同的，因而 Q 是存在的。但在经济现象中，有波浪式前进，螺旋式上升的现象，这说明它所对应的方阵不可能全部是正根，而可能有负根或复根存在，如果出现负根即就无法保证“无穷可分”性。因而用微分方程的理论来笼统地处理经济现象是欲巧反拙的。

在物理现象及概率现象中，当运用微分方程来处理这种现象的时候，既要考虑能不能，又要考虑要不要，如果并不能证明“无穷可分”时，用差分方程保险些。在证明了“无穷可分”时，也可能用差分方程更简单些，不一定要用微分方程。

这儿再说些题外之言，完成演变所需要的时间是否有“单位”存在？即短于这个时间，不能完成某种演变。在这样的情况下，“差分”法比“微分”法更能表达客观现象。在这种现象中，时间变为“离散”。但基本单位是多长？如果多种不同单位现象的混合，情况又如何？在数学上反映出来更有可度约与不可度约的情况。因而类似数论中 Diophantine 逼近的现象出现了，但确是远更复杂的问题。

附记 1. 关于非负方阵的一些性质：

定理 1. 如果

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq q, \quad a_{ij} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

则方阵 $A = (a_{ij})$ 的特征根的绝对值都 $\leq q$ 。

这定理的证明是很简单的。由特征根 λ 的定义，有非全为零的 x_1, \dots, x_n 使

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i.$$

因此

$$|\lambda| |x_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_j|$$

所以

$$|\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) |x_j| \leq q \sum_{j=1}^n |x_j|$$

即得所证。

这一性质在以后要用，所以给予证明，实质上，非负方阵的若干性质与特征，似乎都有它的经济学（或其他用得到它的学科）上的重要意义。例如，非负方阵有一个最大正特征根，这似乎可以用来作为一个经济体系的发展速度的标志，而对应于这特征根有一非负元素的特征矢量，这特征矢量似乎反应了各种产品之间，或产品与劳动之间的正确等价关系，如

果有复虚数的特征根存在，则反映了可能若干部门间会出现螺旋式上升，波浪式前进的情况。

不仅如此，还可以提供“应当改进那些系数（如每吨钢的煤耗系数）可能使我们的经济系统增长最快”的线索。因而决定应当改进的关键性的环节。当然这样的建议只能作为参考，而更重要的是人的作用。在这里所讲的只不过是政治挂帅的条件下，这些研究才有可能作为参考的价值。

(四) 多算了反而吃亏——实用调和分析

在广泛的应用中，我们经常要把一个函数 $f(x)$ 展开成为 Fourier 级数，即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \quad (1)$$

这儿
$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx. \quad (2)$$

有时用等价的复数形式的 Fourier 级数

$$f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx}, \quad C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} \, dx. \quad (3)$$

如果 $f(x)$ 是由实验得来的，有时仅测得有限个数据，根据这有限个数据，怎样求出渐近的 Fourier 级数来呢？有时 $f(x)$ 即使有解析表达式，但积分 (2)，(3) 的原函数无法获得，因而必须进行数值积分，对于这两种情况，一般都用以下的方法来处理。

假定在 $[0, 2\pi]$ 中给了 $n (= 2n' + 1)$ 个点的函数值

$$y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right), \quad 0 \leq l \leq n-1.$$

而用

$$a_m \sim a'_m = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos \frac{2\pi lm}{n},$$

及

$$b_m \sim b'_m = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin \frac{2\pi lm}{n}$$

来近似计算 a_m 与 b_m 。也许会出现这样的错觉，少取几个数据，利用现代计算工具多算几项 a'_m , b'_m ，则

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^N (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx) \quad (4)$$

会更精确地逼近于 $f(x)$ 。这是不对的，如果仅给了 n 个数据，即用 n 个点的函数值来近似计算 a_m 与 b_m 。过多的计算不但不能增加精确度，反而会增大误差，甚至于变成荒谬的结论。其理由是 $a'_m = a'_{n+m}$, $b'_m = b'_{n+m}$ ($m = 1, 2, \dots$)，所以级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx) \quad (5)$$

是发散的。因而一直算下去,所得出的結果将大大偏离于原来所給的函数 $f(x)$ (特別当 $f(x)$ 是有一定光滑的函数,例如連續,可微商等)。我們可以証明最好是算到 n 項,多算則浪費精力,造成更大的誤差,少算則沒有充分利用数据。

用初等指数和的方法来处理这一問題,方法是离散性的,并且亦易于計算。先从复数形式的 Fourier 級数講起:假定在区間 $[-\pi, \pi]$ 中給了函数 $f(x)$ 的 $n(=2n'+1)$ 个数据

$$y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right), \quad l=0, \pm 1, \dots, \pm n'. \quad (6)$$

利用公式
$$\frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i l m/n} = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \nmid m, \\ 1, & \text{若 } n | m. \end{cases} \quad (7)$$

可以从
$$y_l = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{2\pi i l m/n}, \quad |l| \leq n' \quad (8)$$

定出 C'_m 来。定 C'_m 的方法是:以 $e^{-2\pi i l q/n}$ 乘 (8) 式,并对 l 求和,由 (7) 得出

$$\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{2\pi i l q/n} = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m \sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i (m-q)l/n} = n C'_q. \quad (9)$$

因此建議我們用

$$S_n(x) = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx}, \quad C'_m = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \quad (10)$$

来逼近 $f(x)$ 。我們現在来估計 $S_n(x)$ 与 $f(x)$ 的誤差。

定理 1. 假定 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 中有 $r(\geq 2)$ 阶連續微商,而且是以 2π 为周期的函数,并且假定

$$|f^{(r)}(x)| < C,$$

則
$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{4C}{(r-1)n^{r-1}}. \quad (11)$$

証: 已知

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx}, \quad C_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx. \quad (12)$$

分部积分 r 次得

$$C_m = \frac{1}{2\pi(i m)^r} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x) e^{-imx} dx.$$

立刻推得

$$|C_m| \leq \frac{C}{|m|^r}.$$

因此
$$|f(x) - \sum_{m=-n'}^{n'} C_m e^{imx}| \leq 2 \sum_{m=n'+1}^{\infty} \frac{C}{|m|^r} \leq 2C \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^r} = \frac{2C}{(r-1)n^{r-1}}. \quad (13)$$

当 $|m| \leq n'$ 时,

$$\begin{aligned} C_m - C'_m &= C_m - \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} = C_m - \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} e^{-2\pi i l m/n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q e^{2\pi i q l/n} = \\ &= C_m - \frac{1}{n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q \sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i (q-m)l/n} = C_m - \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \equiv m \pmod{n}}}^{\infty} C_q, \end{aligned}$$

因此 $|C_m - C'_m| \leq \sum'_{t=-\infty}^{\infty} |C_{m+nt}|$,

这儿 Σ' 表示和号中除去 $t=0$ 一项。因此

$$\begin{aligned} \left| \sum'_{m=-n'}^{n'} (C_m - C'_m) e^{imx} \right| &\leq \sum'_{m=-n'}^{n'} \sum'_{t=-\infty}^{\infty} |C_{m+nt}| \leq \\ &\leq \sum'_{m=-n'}^{n'} \sum'_{t=-\infty}^{\infty} \frac{C}{|m+nt|^r} \leq 2C \sum'_{l=n'+1}^{\infty} \frac{1}{l^r} \leq \frac{2C}{(r-1)n'^{r-1}}. \end{aligned} \quad (14)$$

(任一整数 l 可以唯一地表示为 $nt + m$ ($|m| \leq n'$) 的形式, 但 $t \neq 0$, 这表达除去 $|l| \leq n'$ 以外的所有整数, 故得所云)。

因此由 (12), (13), (14) 得

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}.$$

在实际计算的时候, $S_n(x)$ 还可以表达得更简单些。

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum'_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx} = \frac{1}{n} \sum'_{m=-n'}^{n'} \sum'_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} e^{imx} = \frac{1}{n} \sum'_{l=-n'}^{n'} y_l \sum'_{m=-n'}^{n'} e^{i(x-2\pi l/n)m} \\ &= \frac{1}{n} \sum'_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(n' + \frac{1}{2}\right)(x-2\pi l/n)}{\sin \frac{1}{2}(x-2\pi l/n)} = \frac{1}{n} \sum'_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(\frac{1}{2}nx - \pi l\right)}{\sin \frac{1}{2}(x-2\pi l/n)} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}nx}{n} \sum'_{l=-n'}^{n'} \frac{(-1)^l y_l}{\sin \frac{1}{2}(x-2\pi l/n)}. \end{aligned} \quad (15)$$

附配 1. 如果分点

$$0 \leq x_1 < \dots < x_n < 2\pi$$

不是均匀的, 则可以由联立方程

$$\begin{cases} \frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{n'} (a'_m \cos mx_i + b'_m \sin mx_i) = y_i \quad (1 \leq i \leq n), \\ \frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{n'} (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx) = y(x) \end{cases}$$

消去 a'_0, a'_m, b'_m 而得出 y 与 y_1, \dots, y_n 的关系。