内部刊物
注意保存

中國科学技术大学达校五周年纪念

科学論文集

1963.9.

中國科學技術大學建校五周年紀念

科学論文集

1963.9.

科 学 论 文 集

中国科学技术大学科学論文集編輯委員会編

中 国 科 学 技 术 大 学 印 刷 厂 印 刷

1963年9月第一次印刷　　开本：787×1092 1/16
字数：957,840　　印数：0001—1,575
印張：38 1/2　　插頁：2頁

发 刊 詞

郭 沫 若

中国科学技术大学建校五周年了。

在党領导下，进行社会主义建設，要把祖国建設成为农业現代化、工业現代化、国防現代化、科学技术現代化的社会主义強国，这是我們的历史使命。

科学技术現代化尤其是四个現代化中的关鍵問題。为国家多多培养出科学人才，多多貢献出科学成果，这是本校建校的根本任务。

建校五年，我們第一次初步培养出了一批科学人才，今后还将源源不断地增加人才的数量，并提高人才的质量。质量的提高是包含着已畢业的同学們的不断努力，提高自己的学术水平和业务水平而言。

为了紀念校庆，教师們和同学們决定編輯出版"科学論文集"，收集教师們与同学們的科学論著以为紀念。

这为本校开辟出了一个"百家爭鳴，百花齐放"的园地，确实是出成果的一个好办法。不仅可以促进本校科研工作的开展，活跃本校的学术空气；并通过相互观摩、交流經驗，更可以不断地提高教学质量和学术水平。

旣出人才，又出成果，两者是互相联带的。成果的数量和质量也希望不断地增加和提高。

同一科系对同一問題提出不同的看法，这是一种爭鳴。不同科系本着社会主义竞賽的精神，爭出成果，这也是一种爭鳴。这后一种爭鳴，事实上也就是百花齐放。

不同科系的竞賽是应当欢迎的，不同意見的爭論也是应当欢迎的。在科学技术崗位上，爭社会主义之鳴，放社会主义之花，断然可以保証提高我們的学术水平，乃至教学质量。

我們祘迈出了万里长征第一步。我們要不断努力，不断前进，踏破任何艰險的途徑，攀登上科学高峯并不断創造科学高峯，逐步完成并开拓我們的历史使命。

1963年12月10日

目　　錄

有限与无穷 离散与連續*

——数学相长体会之一

（为紀念中国科学技术大学建校五周年而作）

华罗庚　王　元

（一）

这是我們教低年級数学基础課的一些体会，似乎是看出了些問題，但由于作者的水平限制，对数学的了解是片面的，并且更沒有哲学修养能从若干感性知識中概括出理性論断来。所以写这样一篇提供素材的文章，希望聚沙成塔，集腋成裘，以备沙里淘金者的参考。

数学中有两大类的問題：一类是离散性質的，一类是連續性質的。在我們一生学习的过程中，开始于数数——一、二、三、四、五、……。这完全是离散性質的东西。算术、代数都是处理离散性質問題的学科。整个中学阶段所学的数学可以說都不是突出利用“連續性”与“无穷性”的学科。直綫上的点显示出連續性質，但突出地重用“連續”确始于微积分。在描繪一瞬間的速度，或一瞬間的量的变化，我們重用了“連續”性与“无穷”。这就是初等数学与高等数学的分界。但如果从“初等”“高等”这些字样，或我們学习的次序，就断定“連續性的数学”比“离散性的数学”更优越了或更能解决問題了，那就不尽然了。本文的目的在于着重地談談离散性的重要。但必須指出，我們不是說連續性次重要些，而是說必須两者妥善結合。一切从实际出发，看需要而决定。不能强調一面而忽略一面，但有一点似乎可以向初学者建議的，在学連續性数学之前，先打好所对应的离散性数学的基础。因为絕大部份連續性的結果往往以离散性的結果做背景的，或者是离散性問題的极限。但并不是說，我們不应当把学习的时間或精力在連續性数学上多化一些。

先看看客观事实，如果本来就是离散的，那就不必人为地引进連續性（但并不排斥，虽然离散，但多到无法处理的时候，也势所必致地用連續方法来处理的可能性，如沙的流动）。在資本主义国家里有些經济学者，用微分方程来处理經济学上的問題，我們对經济学一窍不通，不能有所批判，但有一点可以肯定，他們所根据的数据是离散——或者实質上不可能連續化的。如：农业生产量不能分为每瞬間几何？它是季度性生产，連分月份都不可能，枉論其他。用連續方法来处理离散問題，对头否？但他們有这样的答辯：用上了微分方程就有定性理論，利用它易于看出发展趋势。岂其然哉！实質上，利用差分方程或矩陣乘方的性質照

---

* 感謝中国科学院裴丽生副院长的鼓励。他建議我們把教学体会不要仅仅写在数学著作[1]或教材[2]中，把一些与其它兄弟学科可能有关的东西，写出来互相交流，因此才写了这样一篇內容蕪杂的文章，敬求兄弟学科及本学科同志們的指教。

样可以看到趋势。并且还容易些，还浅显些。但是在大学課程中沒有包括进去而已，或原則上有之，但未象微分方程那样多方强調而已。在（三）中还将指出連續化的不可能性，硬用較深的数学殊无謂也。深入浅出是功夫，浅入深出是浪費。

我們有这样的不成熟的看法，先学些矩陣知識，差分方程，再学微分方程，則旣可以学得处理“离散”問題的方法，取其极限，往往又可以得出微分方程的結果。

以上所講就是說明，离散問題用离散方法来处理为妥的論点。現在进一步說明：連續問題中的离散处理方法。

首先的問題是数据取得的問題。能不能取得无穷精密的数据？不能，即使准到十位百位，用十位百位小数表达出来的数据所成的集体仍然是离散的，而不是連續的。（并且有时过分的精密度是完全不必要的）。再則取数据的次数也必然是有限的，离散的。

其次看計算工具，近代的数字电子計算机本質上是离散的。它的特点是根据有限位数据进行有限次运算，算出有限个有限位的解答来。一切有限，仍然是离散的。

最后所能拿出来的結果（或客观的要求也是如此）当然也是离散的。这是一个从离散到离散的过程。数学家們通常的想法是从离散数据用插入法或回归法得函数，得微分方程，微分方程直接解不出来，再将微分方程差分化变为代数方程（离散），然后得出离散性的解答来。其过程中，經过插入法有誤差，經过差分法又有誤差，变成代数問題以后的求解誤差就不提了。因而提出了以下的課題：能不能从离散直接到离散。这样避免了經过函数逼近的誤差，避免了經过微分方程差分求解的誤差。如果可能，則方法初等化了！而結果反而可能更精密了！我們水平限制不敢多所論列，但主观上謬認为这是一个値得尝試的方向。申声一下，重視离散性方法的同时，我們决不能忽視連續性方法。解析数論就是一門用連續性方法处理离散問題而获得重要成果的分支。連續性的考虑往往会看到一些离散性所不易看到的問題。

以下罗列一些例子，这些例子是从教基础課得来的。选择的标准当然也就是基础課或略高一些的水平。并且都是选取了与其他学科的科学工作者有共同兴趣的問題。各节之間的关系也是不太大的。例如：常用富利哀級数的同志不妨看看第四节。

再重复一句，这是拋砖引玉性質的文章。多举出些具体的感性材料，有可能为将来的教学改革或理論認識創造条件。虛心求教，敬請指正。

（二）对象是連續的，但我們只能了解到其有限个数据——算体积，算面积

在学了微积分之后，我們常常有这样的喜悅：任何曲綫的长度，任何曲面的面积及任何物体的体积都可以用积分方法来处理了。这种喜悅是应当有的，也是可以理解的。但是以为这就已經可以解决問題了，那就錯了。深入一想，我們所学过的方法都有一个共同的要求：就是要求有表示曲綫，曲面的公式：也就是在实际中，有沒有这样的表达公式？例如說：在估計矿藏儲量时，有沒有一个表示这矿体周界的解析公式。又如在估計山坡面积时，有沒有一个 $z=f(x, y)$ 表示这曲面的公式。在实际情况中是沒有的。一来由于我們不可能对每一点都进行实测，二来由于即使对矿体測了很多点，但也是不能够求出曲面的表达式来的，即使拼拼凑凑找出个公式，但在求积分的时候，依然是积不出来（找原函数）的时候多，而能够积成初等函数的时候少——少得很。因而矿体和山坡虽然是連續分布的，但是我們还是必

須用离散的方法才能（近似）估出体积及面积。

但这并不是說微积分上求面积体积的公式沒有用了，这儿是說，必須看看怎样才能用得上，并且将发現，理論是有用的，它能給我們提供具体的綫索，并帮我們判断各种方法的优劣性及进一步改善这些方法。

还是举一个例子吧：在估計山坡面积时，有两套方法：一套是地理学家的方法，称为 Волков 法，另一套是矿藏几何学家的方法，称为 Бауман 法。以下我們把它們介紹一下，再比优劣。

假定地图上以 Δh 为高程差画出等高綫，并假定有一制高点及等高綫成圈（其他情况很容易由此被推导出来）。假定由制高点 (l_n) 向外一圈一圈地画等高綫 (l_{n-1})，(l_{n-2})，…，(l_0)．取 (l_0) 的高度为 O，(l_n) 的高度为 h．(l_i) 与 (l_{i+1}) 之間的面积用 B_i 表示（即投影的面积）*。

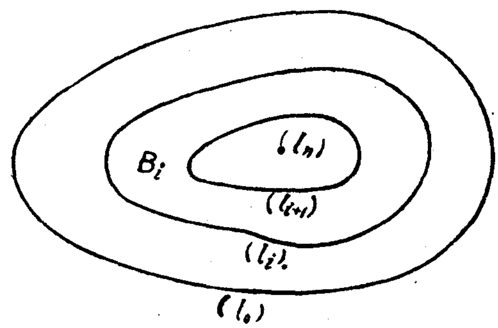

图　1

1．Бауман 方法。

a）$C_i=\frac{1}{2}(l_i+l_{i+1})\Delta h$（中間直立隔板的面积）；

b）$\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2+C_i^2}$ 就是所求的斜面积的近似值。

2．Волков 方法。

a）$l=\sum_{i=0}^{n-1}l_i$ 为等高綫的总长度。$B=\sum_{i=0}^{n-1}B_i$ 为总投影面积。由

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta h\cdot l}{B}$$

得出平均傾角 α；

b）$B\sec\alpha=\sqrt{B^2+(\Delta h\cdot l)^2}$ 就是所求的斜面积的近似值。

这两个方法那一个更好一些？这些方法所给出的結果在怎样的程度上迫近斜面积？又当等高綫的分布趋向无限精密时，这些方法所給出的結果是什么？是否就是眞的面积？下面我們将回答这些問題。

以制高点为中心引进极坐标。命高度是 z 的等高綫方程是

$$\rho=\rho(z,\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

（假定 $\rho(z,\theta)$ 适当地光滑）。命 $z_i=\frac{h}{n}i$，$\Delta h=\frac{h}{n}$．則 (l_i) 所圍繞的面积等于

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(z_i,\theta)d\theta.$$

* 等高綫 (l_i) 的长度用 l_i 表示。

(l_i) 的长度等于

$$l_i=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z_i,\theta)+\left(\frac{\partial\rho(z_i,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

于是由中值公式得

$$B_i=-\int_0^{2\pi}\rho(z'_i,\theta)\frac{\partial\rho(z'_i,\theta)}{\partial z'_i}d\theta\Delta h$$

及

$$C_i=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2(z''_i,\theta)+\left(\frac{2\rho(z''_i,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}\,d\theta\Delta h,$$

其中 $z_i\leqslant z'_i$，$z''_i\leqslant z_{i+1}$. 因此当 $\Delta h\to 0$ 时，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2+C_i^2}$ 趋近于

$$\text{Ба}=\int_0^h\sqrt{\left(\int_0^{2\pi}\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}d\theta\right)^2+\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}d\theta\right)^2}\,dz.$$

这便是当 $\Delta h\to 0$ 时，用 Бауман 方法算出的斜面积所趋近的值。而 $\sqrt{\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}B_i\right)^2+\left(\Delta h\sum\limits_{i=0}^{n-1}l_i\right)^2}$ 的极限

$$\text{Во}=\sqrt{\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}dz\right)^2+\left(\int_0^h dz\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}d\theta\right)^2}$$

便是 Волков 方法算出的斜面积所趋近的值。

习知曲面的面积 S 为

$$S=\int_0^h\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}\,d\theta\,dz.$$

引入一个复值函数

$$f(z,\theta)=-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}+i\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2},$$

则

$$S=\int_0^h\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|\,d\theta\,dz.$$

$$\text{Ба}=\int_0^h\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)d\theta\right|dz,$$

$$\text{Во}=\left|\int_0^h\int_0^{2\pi}f(z,\theta)\,d\theta\,dz\right|.$$

由此可見

$$\text{Во}\leqslant\text{Ба}\leqslant S.$$

結論：(i) Бауман 方法比 Волков 方法精密些，(ii) 所求出的結果比眞正的結果常常偏低一些。

除此而外，不难討論 $\text{Во}=S$ 及 $\text{Ба}=S$ 的情况。我們还可以給出由这些方法所产生的誤差的估計，并指出产生誤差的原因及避免誤差的方法。关于这些請参看 [1]，[2]。

附記 1. 本节所用的积分是可以避免的。

（三）无法連續化——非負方陣

如产量，如能量，如概率都不能是負数。在宇宙綫的簇射过程中，在运筹学及概率論的若干問題中，往往出現非負元素的方陣，即某些物态的多寡經过某段时間之后的变化情况可以用非負方陣表达之。更具体些說，例如有甲乙丙三种物件各有 a, b, c 单位。但是經过一段时間 t 之后，甲类物質变为 ap_{11}, ap_{12}, ap_{13} 单位的甲乙丙三类物質，而乙类物質变为 bp_{21}, bp_{22}, bp_{23} 单位的甲乙丙三类物質，丙类物質变为 cp_{31}, cp_{32}, cp_{33} 单位的甲乙丙三类物質。即經过时間 t 后，甲乙丙物質的数量各为

$$ap_{11}+bp_{21}+cp_{31},$$
$$ap_{12}+bp_{22}+cp_{32},$$
$$ap_{13}+bp_{23}+cp_{33}$$

个单位。由于物質不能变負，所以 $p_{ij}\geqslant 0$. 这方陣

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

称为变化方陣。如果原始物質的数量用矢量 $v=(a, b, c)$ 表之，則經过时間 t 后，其数量将为

$$vP.$$

如果仍然照这样的关系变化，則經过 $2t$ 时間将得

$$vP^2.$$

經过 nt 时間則为

$$vP^n.$$

当 n 增加时，我們可以看出发展趋势。

为了易于了解起見，我們回到单一的情况。設原来的数量是 c，經过单位时間后变为 cq，經过 n 个单位时間得 cq^n，經过半个单位时間可以設想，它的数量是 $cq^{1/2}$（注意問題就在这儿了！），一般地講，可以設想在时間 t 的时候，它的数量是 $f(t)=cq^t$，它的微分表达式是

$$\frac{df}{dt}=(\log q)f,\quad f(0)=c.$$

也就是說 $f(t)=cq^t$ 是微分方程唯一的解。

对于单一的現象，这方法虽有在理論上不妥当的地方，即在时間 $1/2$ 是否是 $q^{1/2}$ 倍。但是在应用的时候并不出現困难，其主要原因是一个正数可以任意开方，也就是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{q^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}=\log q$$

是实的，存在的。这个規律可以描述为量的增加率与时間成比例。因此可能事实上虽然 $q^{1/2}$ 不定义，但我們理想地設想它存在，并不会发生什么矛盾。

如果有人希望把这一規律推广到多个現象的时候，那就势所必致地要求，求方陣 P 的平方根；求方陣 P 的任意次方根。是否有非負方陣的平方等于 P？如果沒有，則用微分处理是

不可能的、举个例子：沒有非負方陣的平方等于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其理由是极簡单的，如果

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $a^2+bc=0$，由 a, b, c 的非負性質得 $a=0$ 及 b 或 $c=0$．这是不可能的。換言之，如果方陣 P 不是“无穷可分的”，也就是沒有实方陣 Q 使 $P=e^Q$，則不可能用微分方法来处理。在研究綫性弹性系統微振动的顫动性質的时候，所对应的方陣的特征根全是正的，而且是不同的，因而 Q 是存在的。但在經济現象中，有波浪式前进，螺旋式上升的現象，这說明它所对应的方陣不可能全部是正根，而可能有負根或复根存在，如果出現負根即就无法保証“无穷可分”性。因而用微分方程的理論来籠統地处理經济現象是欲巧反拙的。

在物理現象及概率現象中，当运用微分方程来处理这种現象的时候，旣要考慮能不能，又要考慮要不要，如果并不能証明“无穷可分”时，用差分方程保险些。在証明了“无穷可分”时，也可能用差分方程更簡单些，不一定要用微分方程。

这儿再說些題外之言，完成演变所需要的时間是否有“单位”存在？即短于这个时間，不能完成某种演变。在这样的情况下，“差分”法比“微分”法更能表达客观現象。在这种現象中，时間变为“离散”。但基本单位是多长？如果多种不同单位現象的混合，情况又如何？在数学上反映出来更有可度約与不可度約的情况。因而类似数論中 Diophantine 逼近的現象出現了，但确是远更复杂的問題。

附記 1．关于非負方陣的一些性質：

定理 1．如果

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant q,\ a_{ij} \geqslant 0,\ j=1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

則方陣 $A=(a_{ij})$ 的特征根的絕对値都 $\leqslant q$．

这定理的証明是很簡单的。由特征根 λ 的定义，有非全为零的 $x_1, \cdots, x_n$ 使

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=\lambda x_i.$$

因此

$$|\lambda||x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|$$

所以

$$|\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)|x_j| \leqslant q\sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

即得所証。

这一性質在以后要用，所以給予証明，实質上，非負方陣的若干性質与特征，似乎都有它的經济学（或其他用得到它的学科）上的重要意义。例如，非負方陣有一个最大正特征根，这似乎可以用来作为一个經济体系的发展速度的标志，而对应于这特征根有一非負元素的特征矢量，这特征矢量似乎反应了各种产品之間，或产品与劳动之間的正确等价关系，如

果有复虛数的特征根存在，則反映了可能若干部門間会出現螺旋式上升，波浪式前进的情况。

不仅如此，还可以提供“应当改进那些系数（如每吨鋼的煤耗系数）可能使我們的經济系統增长最快”的綫索。因而决定应当改进的关鍵性的环节。当然这样的建議只能作为参考，而更重要的是人的作用。在这里所講的只不过是在政治掛帅的条件下，这些研究才有可能作为参考的价值。

（四）多算了反而吃亏——实用調和分析

在广泛的应用中，我們經常要把一个函数 $f(x)$ 展开成为 Fourier 級数，即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \tag{1}$$

这儿

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx. \tag{2}$$

有时用等价的复数形式的 Fourier 級数

$$f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{inx}, \qquad C_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx. \tag{3}$$

如果 $f(x)$ 是由实驗得来的，有时仅测得有限个数据，根据这有限个数据，怎样求出漸近的 Fourier 級数来呢？有时 $f(x)$ 即使有解析表达式，但积分 (2)，(3) 的原函数无法获得，因而必須进行数值积分，对于这两种情况，一般都用以下的方法来处理。

假定在 $[0, 2\pi]$ 中給了 $n(=2n'+1)$ 个点的函数值

$$y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right), \qquad 0 \leqslant l \leqslant n-1.$$

而用

$$a_m \sim a'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos\frac{2\pi\, lm}{n},$$

及

$$b_m \sim b'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin\frac{2\pi\, lm}{n}$$

来近似計算 a_m 与 b_m. 也許会出現这样的錯覚，少取几个数据，利用現代計算工具多算几項 a'_m，b'_m，則

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{N} (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx) \tag{4}$$

会更精确地逼近于 $f(x)$。这是不对的，如果仅給了 n 个数据，即用 n 个点的函数值来近似計算 a_m 与 b_m. 过多的計算不但不能增加精确度，反而会增大誤差，甚至于变成荒謬的結論。其理由是 $a'_m = a'_{n+m}$，$b'_m = b'_{n+m}(m=1, 2, \cdots)$，所以級数

$$\frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx) \tag{5}$$

是发散的。因而一直算下去,所得出的結果将大大偏离于原来所給的函数 $f(x)$(特别当 $f(x)$ 是有一定光滑的函数，例如連續，可微商等）。我們可以証明最好是算到 n 项，多算則浪費精力，造成更大的誤差，少算則沒有充分利用数据。

用初等指数和的方法来处理这一問題，方法是离散性的，并且亦易于計算。先从复数形式的 Fourier 級数講起：假定在区間 $[-\pi,\pi]$ 中給了函数 $f(x)$ 的 $n(=2n'+1)$ 个数据

$$y_l=f\left(\frac{2\pi l}{n}\right),\qquad l=0,\pm1,\cdots,\pm n'. \tag{6}$$

利用公式

$$\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}e^{2\pi i\ lm/n}=\begin{cases}0, & 若\ n\nmid m,\\ 1, & 若\ n\mid m.\end{cases} \tag{7}$$

可以从

$$y_l=\sum_{m=-n'}^{n'}C'_m e^{2\pi i\ lm/n},\quad |l|\leqslant n' \tag{8}$$

定出 C'_m 来。定 C'_m 的方法是：以 $e^{-2\pi i lq/n}$ 乘（8）式，并对 l 求和，由（7）得出

$$\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\,e^{2\pi i\,lq/n}=\sum_{m=-n'}^{n'}C'_m\sum_{l=-n'}^{n'}e^{2\pi i(m-q)l/n}=nC'_q. \tag{9}$$

因此建議我們用

$$S_n(x)=\sum_{m=-n'}^{n'}C'_m e^{imx},\qquad C'_m=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\,e^{-2\pi i\ lm/n} \tag{10}$$

来逼近 $f(x)$。我們現在来估計 $S_n(x)$ 与 $f(x)$ 的誤差。

定理 1. 假定 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 中有 $r(\geqslant 2)$ 阶連續微商，而且是以 2π 为周期的函数，并且假定

$$|f^{(r)}(x)|<C,$$

則

$$|f(x)-S_n(x)|<\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{11}$$

証： 已知

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m e^{imx},\quad C_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-imx}dx. \tag{12}$$

分部积分 r 次得

$$C_m=\frac{1}{2\pi(im)^r}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(x)e^{-imx}dx.$$

立刻推得

$$|C_m|\leqslant\frac{C}{|m|^r}.$$

因此

$$\left|f(x)-\sum_{m=-n'}^{n'}C_m e^{imx}\right|\leqslant 2\sum_{m=n'+1}^{\infty}\frac{C}{|m|^r}\leqslant 2C\int_{n'}^{\infty}\frac{dx}{x^r}=\frac{2C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{13}$$

当 $|m|\leqslant n'$ 时，

$$C_m-C'_m=C_m-\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi i l m/n}=C_m-\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}e^{-2\pi i l m/n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}C_q e^{2\pi i q l/n}=$$

$$=C_m-\frac{1}{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}C_q\sum_{l=-n'}^{n'}e^{2\pi i(q-m)l/n}=C_m-\sum_{\substack{q=-\infty\\ q\equiv m(\mathrm{mod}\,n)}}^{\infty}C_q,$$

因此
$$|C_m-C'_m|\leqslant\sum_{t=-\infty}^{\infty}{}'|C_{m+nt}|,$$

这儿 Σ' 表示和号中除去 $t=0$ 一项。因此

$$\left|\sum_{m=-n'}^{n'}(C_m-C'_m)e^{imx}\right|\leqslant\sum_{m=-n'}^{n'}\sum_{t=-\infty}^{\infty}{}'|C_{m+nt}|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=-n'}^{n'}\sum_{t=-\infty}^{\infty}{}'\frac{C}{|m+nt|^r}\leqslant 2C\sum_{l=n'+1}^{\infty}\frac{1}{l^r}\leqslant\frac{2C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{14}$$

（任一整数 l 可以唯一地表成为 $nt+m$（$|m|\leqslant n'$）的形式，但 $t\neq 0$，这表达除去 $|l|\leqslant n'$ 以外的所有整数，故得所云）。

因此由（12），（13），（14）得

$$|f(x)-S_n(x)|<\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}.$$

在实际計算的时候，$S_n(x)$ 还可以表达得更簡单些。

$$S_n(x)=\sum_{m=-n'}^{n'}C_m'e^{imx}=\frac{1}{n}\sum_{m=-n'}^{n'}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi i l m/n}e^{imx}=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\sum_{m=-n'}^{n'}e^{i(x-2\pi l/n)m}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\frac{\sin\left(n'+\frac{1}{2}\right)(x-2\pi l/n)}{\sin\frac{1}{2}(x-2\pi l/n)}=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\frac{\sin\left(\frac{1}{2}nx-\pi l\right)}{\sin\frac{1}{2}(x-2\pi l/n)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}nx}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}\frac{(-1)^l y_l}{\sin\frac{1}{2}(x-2\pi l/n)}. \tag{15}$$

附記1. 如果分点

$$0\leqslant x_1<\cdots<x_n<2\pi$$

不是均匀的，则可以由联立方程

$$\begin{cases}\dfrac{a'_0}{2}+\displaystyle\sum_{m=1}^{n'}(a'_m\cos mx_i+b'_m\sin mx_i)=y_i\ (1\leqslant i\leqslant n),\\ \dfrac{a'_0}{2}+\displaystyle\sum_{m=1}^{n'}(a'_m\cos mx+b'_m\sin mx)=y(x)\end{cases}$$

消去 a'_0，a'_m，b'_m 而得出 y 与 $y_1,\cdots,y_n$ 的关系。