

工程力学中的 近似解方法

第二版 翻译版

Approximate Solution Methods
in Engineering Mechanics  WILEY
(Second Edition)

[美] Arthur P. Boresi Ken P. Chong Sunil Saigal 著

薄理士

张建平

史高先

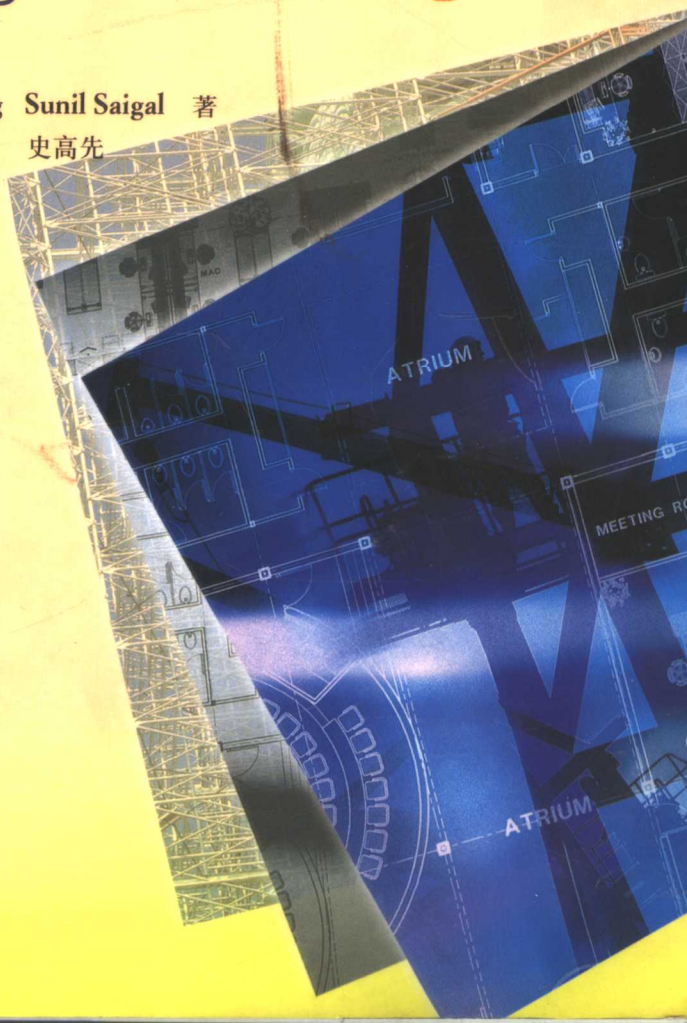
叶志明 杨 骁 朱怀亮 译

[英] L. - Y. Li 审校

李龙元



高等教育出版社



工程力学中的 近似解方法

第二版 翻译版

Approximate Solution Methods
in Engineering Mechanics  WILEY
(Second Edition)

[美] Arthur P. Boresi Ken P. Chong Sunil Saigal 著
薄理士 张建平 史高先

叶志明 杨 骁 朱怀亮 译

[英] L. - Y. Li 审校
李龙元



高等教育出版社

内容简介

本书由薄理士博士(美国怀俄明大学土木与建筑工程系、伊利诺伊大学理论与应用力学系教授)、张建平博士(美国国家科学基金会力学和材料工程部主任)和史高先博士(卡耐基·梅隆大学土木工程系教授)著,是前两位作者早期著作Elasticity in Engineering Mechanics (New York: Wiley, 2000)的后续本,2003年由Wiley出版公司出版。

本书讲述了深奥物理问题的近似求解方法,这些方法包括:加权残量法、有限差分法、有限元法、有限条/层/柱法、无网格分析法。

本书是广大机械工程、土木工程以及其他工程类专业学生、教师、科研人员的一本十分有价值的参考书,也可供其他工程技术人员使用。

Approximate solution methods in engineering mechanics/Arthur P. Boresi, Ken P. Chong, Sunil Saigal—2nd ed.

Copyright © 2003 by John Wiley & Sons, Inc.

All Rights Reserved. This translation published under license.

图书在版编目(CIP)数据

工程力学中的近似解方法:第2版/(美)薄理士(Boresi, A. P.), (美)张建平(Chong, K. P.), (美)史高先(Saigal, S)著;叶志明,杨骁,朱怀亮译. —北京:高等教育出版社, 2005.11

书名原文: Approximate Solution Methods in Engineering Mechanics

ISBN 7-04-017681-5

I. 工... II. ①薄...②张...③史...④叶...
⑤杨...⑥朱... III. 工程力学-近似计算-计算方法
IV. TB12

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第117535号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京四季青印刷厂		http://www.landaco.com.cn
开 本	787×960 1/16		
印 张	13	版 次	2005年11月第1版
字 数	240 000	印 次	2005年11月第1次印刷
插 页	2	定 价	29.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 17681-00

獻給

力学泰斗 钱伟长老师

及

计算力学同仁

张建平



○译者序

由美国怀俄明大学土木与建筑工程系、伊利诺伊大学理论与应用力学系教授薄理士博士,美国国家科学基金会力学和材料工程部主任张建平博士和卡耐基·梅隆大学土木工程系教授史高先博士著的《Approximate Solution Methods in Engineering Mechanics》的翻译版《工程力学中的近似解方法》即将出版发行。不同于其他类似的学术专著,《工程力学中的近似解方法》一书以浅显通俗的语言讲述了深奥物理问题的近似求解方法,这些方法包括了当前流行的计算机模型与方法。书中,作者还以大量最新的研究成果以及参考文献介绍了相关近似求解方法与原理,使得读者能够十分清晰地理解并应用这些方法。本书是广大机械工程、土木工程以及其他工程类专业学生、教师、科研人员以及工程技术人员的一本十分有价值的参考书。

本书作者之一张建平教授在固体力学、纳米材料力学、数值分析、结构力学、结构分析、智能结构与材料等领域做出了杰出的成就。1997年获美国土木工程学会终身成就奖,1999年被推荐为美国工程院院士,2003年成为全美14万土木工程学会会员中选出的9位名誉会员之一,张建平教授已为众多大学、科研机构和学术刊物竞相聘请,担任学术职务或获颁荣誉头衔。1974年以来,张建平教授对我国的科技发展以及中美间的科技交流不遗余力。他曾多次来华讲学,介绍国际上的最新成就和学术动态;几次访问中国国家自然科学基金会,交换科技资讯。他曾参加朱镕基总理访美茶会,并为朱丽兰部长做科技简报。张建平教授曾经代表美国自然科学基金会出资,多次支持在我国举办的国际会议。张建平教授与上海大学校长钱伟长院士一直有着非常好的关系,他对上海大学的学科建设和发展提出了很多建设性意见和建议。为了弘扬张建平教授不断探求真理的科学精神、热爱祖国的爱国情怀,表彰他在中美学术交流与合作等方面所做出的突出贡献,经国务院学位委员会批准,2004年5月6日上海大学举行隆重的授证仪式,钱伟长校长亲自授予张建平名誉博士学位。今

天, 我们怀着崇敬的心情, 有幸承担翻译了本书, 张建平教授还特地为本书的中文版题词。通过本专著在国内的发行, 张建平博士这份爱国、爱科学的情怀, 定会得到不断传承和光大, 影响年轻一代的科学工作者。

本书的序、第一章、第二章由叶志明译, 第三章、第四章由朱怀亮译, 第五章、第六章、第七章、作者索引、主题索引由杨骁译。全书由叶志明统稿, 译文稿的最后审校由英国阿司敦大学工程与应用科学学院的高级讲师李龙元博士(Dr. L. Y. Li, School of Engineering and Applied Sciences, Aston University, U.K.)完成。但由于译者的水平有限, 错误和缺点在所难免, 希望读者在阅读本书时批评指正。

译者

2005 年 3 月于上海大学

数字计算机的广泛使用对工程和科学有着意义深远的影响。一方面，它带来了巨大的收益。另一方面，由于使用者的经验不足和不适当的培训，它经常导致“垃圾输入、垃圾输出”以及“黑箱”综合病症。例如，使用计算机和适当的软件，可以模拟和分析复杂的物理系统和问题。但是，有效和精确地使用由计算机得到的数值结果需要相当的背景和高等工程知识，才能避免失误或盲目接受计算机结果。为避免这些缺陷，本书试图提供一些必备的背景和知识。特别地，本书讨论了用于物理问题求解中若干最普遍使用的近似方法。

对于一个工程问题的实用和成功求解，通常始于问题的精确物理模型和对所用假定的正确理解。然后这个物理模型被转化为一个数学模型或问题。这个数学问题的解通常又通过定义的近似数值方法而得到。除相对简单的情形外，数值方法的成功使用紧密地依赖于数字计算机的使用，根据问题的复杂性，会涉及微型计算机以至超级计算机。

本书介绍几种有效的近似(数值)方法，这些方法包括：

- 加权残量法
- 有限差分法
- 有限元法
- 有限条、层、柱法
- 无网格分析法

这些方法的数学公式是相当普通的。但是，本书中的应用主要涉及固体力学领域。本书还提供了大量的参考文献。

工作中的工程师和科学家将发现，本书是非常易读和有价值的。本书可作为参考书或教科书使用。本书是前两位作者早期著作 *Elasticity in Engineering Mechanics* (New York: Wiley, 2000) 的后续本。

Arthur P. Boresi , Ken P. Chong , Sunil Saigal

2003 年

○目 录

前言	I
第一章 工程中近似解方法的任务	1
1.1 引言	1
1.2 应用领域	2
1.3 未来的进展和趋势	2
参考文献	4
第二章 近似分析与加权残量法	9
2.1 引言	9
2.2 近似问题(试探函数、误差度量或范数)	10
2.3 加权残量法(常微分方程)	11
2.4 加权残量法(偏微分方程)	17
2.5 变分方法(瑞利-里茨法)	20
2.6 修正里茨法和 Trefftz 法	25
参考文献	29
第三章 有限差分法	32
3.1 简述与基本概念	32
3.2 均差与插值公式	33
3.3 导数的近似表示	42
3.4 二维调和方程、双调和方程与曲线边界问题	47
3.5 平面应力问题的有限差分近似	52
3.6 扭转问题	56
附录 3A 式(3.16)的推导	60
附录 3B 式(3.38)的推导	61
参考文献	62
第四章 有限元法	64
4.1 引言	64
4.2 平面弹性力学公式	66

4.3 双线性矩形单元	83
4.4 线性等参四边形单元	90
4.5 平面刚架单元	96
4.6 结束语	104
习题	108
参考文献	110
第五章 专门化方法	113
5.1 引言	113
5.2 有限条法	113
5.3 有限条法的公式	115
5.4 有限条法的例子	117
5.5 有限层法	118
5.6 有限柱法	120
5.7 FSM, FLM 和 FPM 法的应用和发展	122
参考文献	125
第六章 边界元法	130
6.1 引言	130
6.2 边界元法中的积分	132
6.3 弹性力学方程	134
6.4 基本解或开尔文解	134
6.5 边界元公式	136
6.6 位移和力的插值	138
6.7 单元贡献	140
6.8 边界单元矩阵的集成	142
6.9 刚体运动	143
6.10 边界元方程的求解	145
6.11 内部区域中点的位移	145
6.12 体力	146
6.13 特解法	146
6.14 应力和应变的计算	148
6.15 边界元法中的尖角问题	150
6.16 结束语	152
参考文献	153
第七章 无网格分析方法	158
7.1 引言	158

7.2 弹性力学方程	159
7.3 控制方程的弱形式	159
7.4 移动最小二乘近似	161
7.5 移动最小二乘近似的特征	164
7.6 移动最小二乘近似的权函数	165
7.7 离散无单元伽辽金公式	167
7.8 数值实现	172
7.9 边界条件的处理	173
7.10 其他无网格分析法	176
7.11 结束语	179
参考文献	180
作者索引	186
主题索引	192

第一章 工程中近似解方法的任务

1.1 引言

通常, 弹性力学问题的解需要给出物体(如计算机芯片、机械零件、结构单元或机械系统等)在给定激励(如外力等)下的响应。在工程中, 对响应的描述通常用数值结果的形式表示, 对设计者或工程师而言, 数值结果不能违背设计要求。这些设计要求可能要考虑确定性和概率性的概念(Thoft - Christensen 和 Baker, 1982; Wen, 1984; Yao, 1985)。在更广泛的意义上, 数值结果是对系统是否具有期望行为的预测。弹性力学问题的解可直接由数值过程(数值应力分析)得到或由一般解的形式(它通常要求进一步的数值计算)表达。

复杂工程问题的成功求解基于问题的精确物理模型。然而, 在求解时需要把物理模型转化为数学模型。通常, 数学模型的解通过定义的近似数值方法求得, 而这些数值方法的成功求解依赖于高速数字计算机。

有限差分法(FDM)(Mitchell 和 Griffiths, 1980; Tannehill 等, 1997)和有限元法(FEM)(Bathe, 1995; Hughes, 1987; Cook 等, 1989; Zienkiewicz 和 Taylor, 1989)是广泛应用的数值方法。由于在分析工程系统时通常将整个系统(物体)区域离散为有限网格(FDMs)或有限单元(FEMs), 所以这些方法被归类为区域方法。另一种有效的数值方法是边界元法(BEM)(Rizzo, 1967; Brebbia, 1978; Brebbia 和 Connor, 1989; Cruse, 1988)。由于各种原因, 在分析某些问题时, 这一方法较 FDM 和 FEM 具有独特的优势。特别地, 由于 BEM 仅需要对所感兴趣区域的边界进行离散, 所以被称为边界元法。

上面提及的三个方法以及其他大量的专门化方法提供了处理工程中复杂边界问题强有力的工具。在一些特殊情形中, 根据需要, 这些方法中的某一个较其他方法在得到问题解方面更加有效。例如, 在具有无限和半无限区域、应力集中、三维结构效应等特征的某类线性问题中, 使用 BEM 法将具有更大的优势(Beskos, 1989; Brebbia 和 Connor, 1989)。

第四种数值方法是有限条方法(FSM)以及相关的有限层方法(FLM)和有限柱方法(FPM)(Cheung, 1997), 由于在区域离散之前降低了问题的维数, 所以这种方法是介于区域方法(FDM 和 FEM)和边界方法(BEM)之间的一种方法。结

合若干方法优点的其他杂交方法亦已被提出。例如, Golley 和 Crice (1989), Golley 等(1987)和 Petrolito 等(1989)结合 FEM 和 BEM 研究了板的弯曲问题。

在本书中, 讨论了有限差分法(第三章)。有限元法(第四章)。有限条(有限层和有限柱)法(第五章)。边界元法(第六章)和无网格法(第七章)。而在第二章中, 讨论了近似分析方法的基础, 包括基于加权残数法(WRM)的边界解。各种近似方法(FDM, FEM, FSM, BEM 等)可表示为加权残量法公式的特殊形式, 可利用在工程师和数学家中普及的以 WRM 为基础的加权和近似概念研究这些方法。

1.2 应用领域

近似方法(Moin, 2001)通常应用于工程、数学和科学的所有领域。它在专门学科中的应用则已写进各类教科书之中, 例如弹性力学、塑性力学、多孔介质流、结构力学、流体力学、空气动力学等(Boresi 和 Chong, 2000; Lubliner, 1990; Tannehill 等, 1997; Holzer, 1985)。本书主要研究 WRM, FDM, FEM 和 FSM 等方法的公式以及这些方法的计算机实现的近期发展(Nelson, 1989), 并着重给出了固体力学领域中工程应用的参考文献。

1.3 未来的进展和趋势

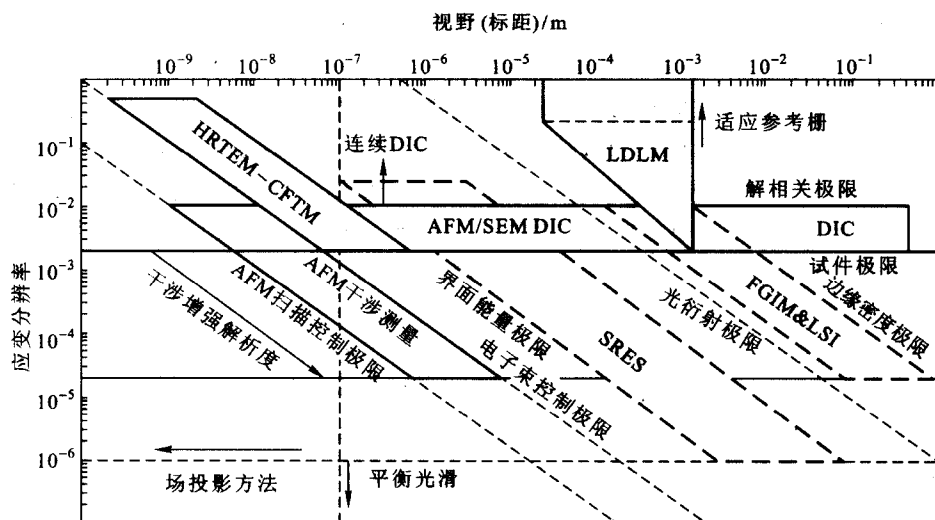
有关弹性力学理论在工程问题中应用的文献是固体力学技术文献的重要组成部分(Dvorak, 1999; Boresi 和 Chong, 2000; Chong 和 Davis, 1999)。当今文献中给出的大部分解答依赖于数值方法, 并需要借助高速数字计算机, 这种趋势在可预测的将来还将继续, 特别是随着微型计算机和工作站的广泛使用以及使用超级计算机可能性的增加(Londer, 1985; Fosdick, 1996)。例如, 有限元方法已应用于广泛的力学问题中, 如平面问题、板壳问题、一般三维问题, 包括线性和非线性行为、各向同性和各向异性材料。同时, 通过使用计算机, 工程师已经可以讨论大型工程系统的优化问题(Atrek 等, 1984; Zienkiewicz 和 Taylor, 1989; Kirsch, 1993), 例如航天飞机。另外, 在计算机辅助设计(CAD)、计算机辅助制造(CAM)(Ellis 和 Semenov, 1983)以及虚拟测试和模型模拟(Fosdick, 1996; Chong 等, 2002)等领域中计算机发挥着重要的作用。通过与数据库模型的相互协作(Garboczi 等, 2000), 计算方面的最新进展使得虚拟测试成为具有材料性质优化设计的有力工具。

有限元方法在解决大变形、碰撞、裂纹扩展、裂纹贯穿以及其他移动边界等问题时具有局限性。对这类问题, 无网格方法和粒子方法, 包括光滑粒子

法、无网格伽辽金法和分子动力学方法(Li 和 Liu, 2002)等方法十分有效。近来, 基于网格边界元法中的超奇异剩余法已经推广至无网格边界节点法, 该方法对有效解决众多问题具有很好的潜力(Chatani 等, 2001)。

过去工程师和材料科学家广泛涉及对给定材料的特征进行表征。而现在由于先进的计算技术以及材料科学的新发展, 研究者已经可以对具有所期望行为和性质的材料进行过程表征、设计和制造。使用纳米技术(Reed 和 Kirk, 1989; Timp, 1999; Siegel 等, 1999), 工程师和科学家还可在分子尺度上制造所设计的材料。

在微观力测量和应用方面也取得了巨大的进展(如 Bowen 等, 1998; Saif 和 MacDonald, 1996)。同时, 在测量仪器方面也取得了进展, 如原子力显微镜(AFM)、扫描电子显微镜(SEM)、高解析透射电子显微镜(HRTEM)和表面粗糙度演化分光镜(SRES)等。图 1.1 总结了 $10^{-9} \sim 10^0$ m 范围内各种仪器的标距和应变分辨率。目前艰巨任务之一是通过结构系统性能的中尺度和宏观尺度的长期行为模拟短期微观尺度的材料行为(图 1.2)。这就需要加速实验模拟各种所需的环境力和影响因素。并行计算中使用的超级计算机和/或工作站在如下两



HRTEM 高解析透射电子显微镜
CFTM 计算傅里叶变换波紋
AFM 原子力显微镜
SEM 电子扫描显微镜
SRES 表面粗糙度演化分光鏡

LDLM 大变形激光波紋
FGLM 精细光栅激光波紋
LSI 激光散斑干涉
DIC 数字影像相关

图 1.1 变形-测量技术图(经 Brown 大学纳米与微力实验室的 K.S.Kim 惠许)

个方面非常有用：(1)通过研究大量变量和未知量将微观行为映射到基础系统的行为来解决多尺度和尺度效应问题；(2)用短期实验结果的模拟或推断长期生命周期的行为。

材料		结构	基础结构	
纳米尺度级	微观尺度级	中尺度级	宏观尺度级	系统尺度级
10^{-9} m	10^{-6} m	10^{-3} m	10^{+0} m	10^{+3} m
分子尺度	微米尺度		米尺度	达到千米尺度
纳米力学	微尺度力学	中尺度力学	梁	桥梁系统
自装配	微结构	界面结构	柱	安全索
纳米制造	智能材料	复合材料	板	飞机

图 1.2 材料和结构中的尺度(引自 Borelli 和 Chong, 2000)

根据前美国国家科学基金会会员 Eugene Wong 的观点，现时代的卓越技术有：

- 微电子学：Moore 定律，在过去 30 年间，每 18 个月性能翻一番；无限的可测量性
- 信息技术：计算机技术和通信的结合
- 生物技术：生命的分子秘密

工程力学及其数值解构成了这些卓越技术的基础。

当今时代，计算机在用数值方法求解所有工程问题方面的应用空前发展 (Tannehill 等, 1997; Nelson, 1989; Beskos, 1989)。Belytschko (1989), Belytschko 等 (2000) 给出了有限元模型技术方面的主要进展。Wilson (1989) 概述了有限元系统解的数值方法。另外，在 1989 年结构学术会议 (Nelson, 1989) 上，广泛研讨了有关现代计算机应用于求解结构工程问题的各类主题。这些主题包括人工智能、并行处理、优化、基于知识的系统以及计算机辅助分析和设计等。Banerjee 和 Mukherjee (1998)、Cruse (1988) 和 Neskos (1998) 讨论了结构分析中边界元法的状况和发展趋势。最后，人们预计有关无网格法和杂交方法的未来工作在近似方法中将具有更加重要的作用 (Chong 等, 2002; Chati 等, 2001; Colley 和 Grice, 1989; Costabel 和 Stephan, 1988)。

参考文献

- Atrek, E., Gallagher, R. H., Ragsdell, K. M., and Zienkiewicz, O. C. (eds.) 1984. *New Directions in Optimal Structural Design*, Wiley, New York.
- Banerjee, P. K., and Mukherjee, S. 1998. *Developments in Boundary Element Methods*, E&FN Spon, London.

- Bathe, K.J. 1995. *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Belytschko, T. 1989. Major advances in finite element model technology, in *Proc. Sessions Related to Computer Utilization at Structures Congress '89*, Nelson, J.K., Jr. (ed.), American Society of Civil Engineers, Reston, VA, pp. 11 ~ 20.
- Belytschko, T., Liu, W.K., and Moran, B. 2000. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, Wiley, New York.
- Beskos, D.E. 1989. *Boundary Element Methods in Structural Analysis*, American Society of Civil Engineers, Reston, VA.
- Boresi, A.P., and Chong, K.P. 2000. *Elasticity in Engineering Mechanics*, Wiley, New York.
- Bowen, W.R., Hilal, N., Lovitt, R.W., and Wright, C.J. 1998. Direct measurement of the force of adhesion of a single biological cell using an atomic force microscope, *Colloids Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects*, **136**, 231 ~ 234.
- Brebbia, C.A. 1978. *The Boundary Element Method for Engineers*, Halsted Press, division of Wiley, New York.
- Brebbia, C.A., and Connor, J. J. (eds.) 1989. *Advances in Boundary Elements*, Springer-Verlag, New York.
- Chati, M.K., Paulino, G. H., and Mukherjee, S. 2001. The meshless standard and hypersingular boundary node methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **50**, 2233 ~ 2269.
- Cheung, Y.K., and Tham, L. G. 1997. *Finite Strip Method*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- Chong, K. P., and Davis, D. C. 1999. Engineering mechanics and materials research in the information technology age, *Mechanics*, **28** (7/8).
- Chong, K.P., Saigal, S., Thynell, S., and Morgan, H.S. (eds.) 2002. *Modeling and Simulation-Based Life-Cycle Engineering*, Spon, New York.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., and Plesha, M.E. 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., Wiley, New York.
- Costabel, M., and Stephan, E.P. 1988. Coupling of finite elements and boundary elements for transmission problems of elastic waves in R3, in *Advanced Boundary Element Methods*, Cruse, T. A. (ed.), Springer-Verlag, New York, pp. 117 ~ 124.
- Cruse, T. A. (ed.) 1988. *Advanced Boundary Element Methods*, Springer-Verlag, New York.

- Dvorak, G. J. (ed.) 1999. Research trends in solid mechanics, *Int. J. Solids Struct.*, **37** (1/2): special issues.
- Ellis, T.M.R., and Semenov, O.I. (eds.) 1983. *Advances in CAD/CAM*, North Holland, Amsterdam.
- Fosdick, L.D. (ed.) 1996. *An Introduction to High-Performance Scientific Computing*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Garboczi, E. J., Bentz, D. P., and Frohnsdorff, G. F. 2000. Knowledge-based systems and computational tools for concrete, *Concrete Int.*, **22** (12) 24 ~ 27.
- Golley, B.W., and Grice, W.A. 1989. Prismatic folded plate analysis using finite strip-elements, in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier North-Holland, Amsterdam.
- Golley, B.W., Grice, W.A., and Petrolito, J. 1987. Plate-bending analysis using finite strip-elements, *J. Struct. Eng.*, **113** (6).
- Holzer, S.M. 1985. *Computer Analysis of Structures*, Elsevier Science, New York.
- Kirsch, U. 1993. *Structural Optimization*, Springer-Verlag, New York.
- Li, S.F., and Liu, W.K. 2002. Meshfree and particle methods and their applications, *Appl. Mech. Rev.*, Sept. 2002.
- Londer, R. 1985. Access to supercomputers, *Mosaic*, **16** (3), 26 ~ 32.
- Lubliner, J. 1990. *Plasticity Theory*, Macmillan, New York.
- Moin, P. 2001. *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Nelson, J. K., Jr. (ed.) 1989. *Computer Utilization in Structural Engineering*, Proc. Structures Congress '89, American Society of Civil Engineers, Reston, VA.
- Petrolito, J., Grice, W.A., and Golley, B.W. 1989. Finite strip-elements for thick plate analysis, *J. Struct. Eng.*, **115** (6).
- Reed, M.A., and Kirk, W.P. (eds.) 1989. *Nanostructure Physics and Fabrication*, Academic Press, San Diego, CA.
- Rizzo, E.J. 1967. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, *Q. J. Appl. Math.*, **25**, 83 ~ 95.
- Saif M. T. A., and MacDonald, N. C. 1996. A milli-Newton micro loading device. *Sensors Actuators A*, **52**, 65 ~ 75.
- Siegel, R. W., Hu, E., and Roco, M. C. (eds.) 1999. *WTEC Panel Report on Nanostructure Science and Technology*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
- Tannehill, J.C., Anderson, D.A., and Pletcher, R.H. 1997. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2nd ed., Taylor & Francis, Philadelphia.

- Thoft-Christensen, P., and Baker, M. J. 1982. *Structural Reliability Theory and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin.
- Timp, G. (ed.) 1999. *Nanotechnology*, Springer-Vefiag, New York.
- Wen, Y. -K. (ed.). 1984. *Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, American Society of Civil Engineers, Reston, VA.
- Wilson, E. L. 1989. Numerical methods for solution of finite element systems, in *Proc. Sessions Related to Computer Utilization at Structures Congress '89*, Nelson, J. K., Jr. (ed.), American Society of Civil Engineers, Reston, VA, pp. 21 ~ 30.
- Yao, J. T. P. 1985. *Safety and Reliability of Existing Structures*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston.
- Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L. 1989. *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol. 1, *Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw-Hill, New York.
- Cheung, Y. K., Lo, S. H., and Leung, A. Y. T. 1996. *Finite Element Implementation*, Blackwell Science, Malden, MA.
- Brand, L. 1957. *Vector and Tensor Analysis*, Wiley, New York.
- Chong, K. P., Dewey, B. R., and Pell, K. M. 1989. *University Programs in Computer-Aided Engineering, Design, and Manufacturing*, American Society of Civil Engineers, Reston, VA.
- Danielson, D. A. 1997. *Vectors and Tensors in Engineering and Physics*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Dym, C. L., and Shames, I. H. 1973. *Solid Mechanics: A Variation Approach*, McGraw-Hill, New York.
- Edelen, D. G. B., and Kydoniefs, A. D. 1980. *An Introduction to Linear Algebra for Science and Engineering*, 2nd ed., Elsevier Science, New York.
- Eisele, J. A., and Mason, R. M. 1970. *Applied Matrix and Tensor Analysis*, Wiley-Interscience, New York.
- Gere, J. M., and Weaver, W. 1984. *Matrix Algebra for Engineers*, 2nd ed., Prindle, Weber, and Schmidt, Boston.
- Hughes, T. J. R. 1987. *The Finite Element Method*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Jeffreys, H. 1987. *Cartesian Tensors*, Cambridge University Press, New York.
- Kemmer, N. 1977. *Vector Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lur , A. I. 1964. *Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity*, Wiley-Interscience, New York.