CEDULUN GAIYAO

测度论概要

丁万鼎 著

安徽人民出版社

测度论概要

丁万鼎 著

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

测度论概要/丁万鼎著. —合肥：安徽人民出版社，2005

ISBN 7-212-02666-2

Ⅰ.测… Ⅱ.丁… Ⅲ.测度论 Ⅳ.0174.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 104458 号

测 度 论 概 要

丁万鼎 著

出版发行：安徽人民出版社
地　　址：安徽合肥市金寨路 381 号九州大厦　　邮编：230063
发 行 部：0551-2833066　　0551-2833099（传真）
组　　编：安徽师范大学编辑部　电话：0553-3883577　3883578
经　　销：新华书店
印　　制：安徽芜湖新华印务有限责任公司
开　　本：889×1194　　1/32　　印张：4　　字数：98 千
版　　次：2005 年 10 月第 1 版　　2005 年 10 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 7-212-02666-2/O·3
定　　价：15.00 元

前　　言

从应用上或数学自身的需要上，积分都是最有力的数学工具之一. 数学分析中建立的黎曼积分主要的可积函数类是连续函数. 实变函数论建立的勒贝格积分进一步扩展了积分的范围，所涉及的基本要素是：可测函数，勒贝格测度及积分方法. 勒贝格测度是长度、面积、体积等的自然推广和精确化；可测函数是适应积分方法和测度概念的连续函数类的扩充. 测度论建立更一般的测度和积分 (微分) 理论. 它是数学的一个重要分支，也是现代数学的重要基础之一. 特别要指出的是，严谨的概率论和数理统计理论是建立在测度论的基础上的. 此外测度论在其它数学也得到广泛的应用.

本书是在作者多年为概率统计专业研究生讲授的讲义基础上修订而成的. 测度论是一个相对成熟的理论，已经有专门著作，但作者在实际教学中发现，研究生有诸多数学公共基础课程和专业课程，难以在较短时间内全面掌握测度论专著中的理论知识. 而对概率统计专业的研究生，系统的测度论知识是必不可少的. 所以作者认为有必要精选测度论的内容，以较小的篇幅，重新构建测度论概要的结构，为研究生提供一本较为实用的测度论教材. 这就是本书的写作目的.

本书从方法论的角度来介绍测度论. 内容主要有：单调类定理，测度扩张定理，积分收敛定理，Fubini 定理，Radon-Nikodym 定理和 Prohorov 定理等. 作者试图以这几组定理为线索展开，力

求以较小的篇幅使读者对测度论有一个较全面的掌握，以满足他们进一步学习的基本需要．书中每章都配有适量的习题．习题是本书的重要的组成部分，其中某些习题实际上是测度论的重要结论，后续的内容需要引用这些结论．事实也表明，演算适量的习题是获取数学知识必不可少的学习过程．本书假定读者已经具备数学分析和实变函数的基本知识．

本书的写作和出版得到安徽人民出版社安徽师范大学编辑部、安徽师范大学科研处和安徽师范大学数学计算机科学学院的支持和帮助，孙国正教授、祝东进教授、汪荣明教授、郭明乐同志都阅读过本书的手稿并提出了许多有益的建议，束立生教授应邀担任本书的责任编辑，为本书的出版作了大量而细致的工作，作者对他们表示感谢．

目　录

I. 单调类定理

为建立测度，像函数一样，要知道它的定义域，即集类的性质；勒贝格积分的基本思想是按函数值相近来分割自变量的，比如定义函数 f 的积分为下面和的极限：

$$\mathcal{S} = \sum y_i m(\{x : y_i \le f(x) < y_{i+1}\})$$

这里，涉及集合 $\{x : y_i \le f(x) < y_{i+1}\}$ 的可测性，从而也是函数 f 的可测性质. 总之，要定义集类，函数的可测性以及如何确定集合或函数的可测性. 单调类定理就是验证集类为 $\sigma-$ 代数或函数关于 $\sigma-$ 代数可测性的一组定理.

1. **半代数** $\mathfrak{S}$, **代数** $\mathfrak{F}$, $\sigma-$ **代数** $\mathfrak{A}$

今后，总是假定 $\Omega \ne \emptyset$ 为基本空间，所涉及的集类均为其子集组成的类.

定义 (a) 称集类 $\mathfrak{S}$ 为半代数，如果它满足下列条件：

1) $\Omega, \emptyset \in \mathfrak{S}$;

2) 如果 $A, B \in \mathfrak{S}$, 则 $A \cap B \in \mathfrak{S}$;

3) 如果 $A \in \mathfrak{S}$, 则存在 n 及 $A_i \in \mathfrak{S}, i = 1, \cdots, n$ 使得 $A^c = \sum_{i=1}^n A_i$.

这里及今后，记号 $\sum$ 表示两两不交的集合的并.

(b) 称集类 $\mathfrak{F}$ 为代数，如果它满足下列条件:

1) $\Omega \in \mathfrak{F}$;

2) 如果 $A \in \mathfrak{F}$, 则 $A^c \in \mathfrak{F}$;

3) 如果 $A, B \in \mathfrak{F}$, 则 $A \cup B \in \mathfrak{F}$.

(c) 称集类 $\mathfrak{A}$ 为 $\sigma-$ 代数，如果它满足下列条件:

1) $\Omega \in \mathfrak{A}$;

2) 如果 $A \in \mathfrak{A}$, 则 $A^c \in \mathfrak{A}$;

3) 如果 $A_i \in \mathfrak{A}, i = 1, \cdots$, 则 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$.

根据定义，容易验证，代数对有限的集运算是封闭的； $\sigma-$ 代数对至多可列的集运算是封闭的.

一些例子:

最“粗”的 $\sigma-$ 代数 $\mathfrak{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$; 最“细”的 $\sigma-$ 代数 $\mathcal{S}(\Omega) = \{\Omega$ 的一切子集$\}$. 显然，对任意 $\sigma-$ 代数 $\mathfrak{A}$, 均有

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{S}(\Omega).$$

容易验证， $\forall A \subseteq \Omega, \mathfrak{A}_1 = \{A, A^c, \Omega, \emptyset\}$ 是 $\sigma-$ 代数；在 $R^1 = (-\infty, \infty)$ 中， $\mathfrak{S} = \{[a, b), (-\infty, b) : -\infty < a \leq b \leq \infty\}$ 是半代数.

定义 (续) (d) $\mathcal{S}$ **类及生成** $\mathcal{S}$ **类**: 设 $\mathcal{S}$ 为一组运算，如果集类 $\mathfrak{S}$ 关于 $\mathcal{S}-$ 运算封闭，则称其为 $\mathcal{S}$ 类；设 $\mathfrak{C}$ 为一集类，称包含 $\mathfrak{C}$ 的最小 $\mathcal{S}-$ 类为 $\mathfrak{C}$ 生成的 $\mathcal{S}$ 类，记为 $\mathcal{S}(\mathfrak{C})$.

显然， $\mathcal{S}(\Omega)$ 是 $\mathcal{S}$ 类，且 $\mathcal{S}(\Omega) \supseteq \mathfrak{C}$, 故 $\Xi = \{\mathfrak{S} : \mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{C}$且为 $\mathcal{S}$ 类$\} \neq \emptyset$, 于是 $\mathcal{S}(\mathfrak{C}) = \cap_{\mathfrak{S} \in \Xi} \mathfrak{S}$ 存在.

应用上述概念于代数， $\sigma-$ 代数，集类 $\mathfrak{C}$ 生成的代数， $\sigma-$

代数，分别记为 $\mathcal{F}(\mathfrak{C}),\sigma(\mathfrak{C})$. 在 R^1 中，由上述半代数 $\mathfrak{S}$ 生成的 $\sigma-$ 代数，称为 Borel $\sigma-$ 代数，记为 $\mathcal{B}^1=\sigma(\mathfrak{S})$.

2. **命题** 设 $\mathfrak{S}$ 为一半代数，则 $\mathfrak{S}$ 生成的代数 $\mathcal{F}(\mathfrak{S})\equiv\{A: A=\sum_{i=1}^n C_i, C_i\in\mathfrak{S}, i=1,\cdots,n,n\geq 1\}$.

这里及今后，用 $\equiv$ 表示定义式.

证 首先注意到，$\mathcal{F}(\mathfrak{S})$ 中，集的表达式不是唯一的，但是确定的，即不依赖于其表达式.

其次，由定义 (a) 的 1) 及 3) 知，定义 (b) 的 1), 2) 成立；如果 $A=\sum_{i=1}^n C_i, B=\sum_{j=1}^m D_j\in\mathcal{F}(\mathfrak{S})$, 则 $A\cap B=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m C_i\cap D_j\in\mathcal{F}(\mathfrak{S})$; 于是 $A\cup B=(A^c\cap B^c)^c\in\mathcal{F}(\mathfrak{S})$. 故 $\mathcal{F}(\mathfrak{S})$ 为代数.

定义 (续) (e) 称集类 $\mathfrak{M}$ 为单调类，如果它满足：

1) 如果 $A_n\in\mathfrak{M}, n=1,\cdots$, 且 $A_n\uparrow$, 则

$$\lim_n A_n\equiv\cup_{n=1}^\infty A_n\in\mathfrak{M};$$

2) 如果 $A_n\in\mathfrak{M}, n=1,\cdots$, 且 $A_n\downarrow$, 则

$$\lim_n A_n\equiv\cap_{n=1}^\infty A_n\in\mathfrak{M}.$$

3. **命题** 设 $\mathfrak{A}$ 为 $\sigma-$ 代数，则 $\mathfrak{A}$ 为单调类；如果 $\mathfrak{F}$ 既是代数，又是单调类，则 $\sigma(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}$.

证 第一结论显然. 为证第二结论，只要证 $\mathfrak{F}$ 为 $\sigma-$ 代数. 事实上，因为 $\mathfrak{F}$ 是代数，而当 $A_n\in\mathfrak{F}, n=1,\cdots$ 时，有 $B_n=\cup_{k=1}^n A_k\in\mathfrak{F}$, 则由 $\mathfrak{F}$ 又是单调类知， $B_n=\cup_{k=1}^n A_k\uparrow\cup_{k=1}^\infty A_n\in\mathfrak{F}$.

4. **单调类定理 (集合形式** I) 设 $\mathfrak{F}$ 为代数，则 $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})=\sigma(\mathfrak{F})$; 进而，如果单调类 $\mathfrak{M}\supseteq\mathfrak{F}$, 则 $\mathfrak{M}\supseteq\sigma(\mathfrak{F})$.

证 第二结论由第一结论直接推出. 由命题 3, 有 $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})\subseteq\sigma(\mathfrak{F})$;

要证 $\mathfrak{M}(\mathfrak{F}) \supseteq \sigma(\mathfrak{F})$, 只要证 $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$ 为代数. 注意到 $\Omega \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$, 为此只要证：如果 $A, B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$, 则有 $A \setminus B, B \setminus A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$. $\forall A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$, 令

$$\mathfrak{M}_A = \{B : B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F}), A \setminus B, B \setminus A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F})\}. \tag{1.1}$$

注意到 $\mathfrak{M}(\mathfrak{F})$ 为单调类，从而 $\mathfrak{M}_A$ 也为单调类. 当 $A \in \mathfrak{F}$ 时，因为 $\mathfrak{F}$ 为代数，所以 $\mathfrak{M}_A \supseteq \mathfrak{F}$. 故有 $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$.

$\forall B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$, 由上一段证明： $\forall A \in \mathfrak{F}, B \in \mathfrak{M}_A$. 由于 (1.1) 中， A, B 的作用是对称的，所以 $A \in \mathfrak{M}_B$, 即有 $\mathfrak{M}_B \supseteq \mathfrak{F}$. 再次由 $\mathfrak{M}_B$ 为单调类知， $\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}(\mathfrak{F})$.

如果将 $\sigma-$ 代数的定义 (c) 的 1), 2) 和 3) 分解为代数的定义 (b) 的 1), 2) 和 3) 及

3') 如果 $A_k \in \mathfrak{A}, k = 1, \cdots$, 且 $A_k \uparrow$, 则 $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$.

进一步将代数的定义 (b) 的 1), 2) 和 3) 分解为

1') $\Omega \in \mathfrak{F}$;

2') 对集的真差运算封闭，即，如果 $A, B \in \mathfrak{F}$, 且 $A \supseteq B$, 则 $A \setminus B \in \mathfrak{F}$;

3'') 对集的交运算封闭，即，如果 $A, B \in \mathfrak{F}$, 则 $A \cap B \in \mathfrak{F}$;

将条件 1'), 2') 3') 和 3'') 重新组合，则有下面的定义.

5. **定义** ($\pi-$ **系和** $\lambda-$ **系**) 设 Π, Λ 为两个集类.

如果 $\forall A, B \in \Pi$, 都有 $A \cap B \in \Pi$, 则称 Π 为 $\pi-$ 系;

如果

1) $\Omega \in \Lambda$;

2) 若 $A, B \in \Lambda$, 且 $A \subseteq B$, 则 $B \setminus A \in \Lambda$;

3) 若 $A_n \in \Lambda, n = 1, \cdots$, 且 $A_n \uparrow$, 则 $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Lambda$, 则称 Λ 为 $\lambda-$ 系.

注 由 $\lambda-$ 系的定义可知, 如果 $A \in \Lambda$, 则 $A^c \in \Lambda$; 且 $\lambda-$ 系也是单调类.

6. **命题** 如果 $\mathfrak{C}$ 既是 $\pi-$ 系又是 $\lambda-$ 系, 则 $\mathfrak{C}$ 是 $\sigma-$ 代数.

证 显然.

7. **单调类定理 (集合形式** II) 设 $\mathfrak{C}$ 为 $\pi-$ 系, 则 $\lambda(\mathfrak{C}) = \sigma(\mathfrak{C})$. 进而, 如果 $\mathfrak{A}$ 为 $\lambda-$ 系, 且 $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{C}$, 则 $\mathfrak{A} \supseteq \sigma(\mathfrak{C})$.

证 第二结论直接由第一结论推出, 故只要证第一结论. 显然有 $\sigma(\mathfrak{C}) \supset \lambda(\mathfrak{C})$; 为证 $\sigma(\mathfrak{C}) \subset \lambda(\mathfrak{C})$, 只要证 $\lambda(\mathfrak{C})$ 为 $\sigma-$ 代数, 根据命题 6, 只要证 $\lambda(\mathfrak{C})$ 为 $\pi-$ 系. 事实上, $\forall A \in \lambda(\mathfrak{C})$, 令

$$\mathfrak{A}_A = \{B \in \lambda(\mathfrak{C}) : A \cap B \in \lambda(\mathfrak{C})\}. \tag{1.2}$$

容易验证, $\mathfrak{A}_A$ 为 $\lambda-$ 系.

当 $A \in \mathfrak{C}$ 时, 因为 $\mathfrak{C}$ 为 $\pi-$ 系, 所以 $\mathfrak{A}_A \supset \mathfrak{C}$; 于是 $\mathfrak{A}_A = \lambda(\mathfrak{C})$; $\forall B \in \lambda(\mathfrak{C})$, 由于 (1.2) 中, A, B 的作用是对称的, 所以 $B \in \mathfrak{A}_A$ 对任意 $A \in \mathfrak{C}$ 成立; 于是 $\forall A \in \mathfrak{C}, A \in \mathfrak{A}_B$, 即 $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}_B$; 同样因为 $\mathfrak{A}_B$ 为 $\lambda-$ 系, 所以 $\mathfrak{A}_B = \lambda(\mathfrak{C})$.

定理 4 和 7 都是集合形式的单调类定理, 定理 4 是经典形式的单调类定理, 定理 7 是由 Dynkin 首先提出的. 单调类定理的一般用法是:

已知集类 $\mathfrak{C}$ 具有性质 s, 要证 $\sigma(\mathfrak{C})$ 也具有性质 s, 令

$$\Lambda = \{B : B\text{具有性质 } s\}.$$

已知 $\Lambda \supseteq \mathfrak{C}$, 按照单调类定理

1) 当 $\mathfrak{C}$ 为代数时, 只要证 Λ 为单调类;

2) 当 $\mathfrak{C}$ 为 $\pi-$ 系时，只要证 Λ 为 $\lambda-$ 系；

3) 当 $\mathfrak{C}$ 为任意集类时，要证 Λ 为 $\sigma-$ 代数.

乘积空间与乘积 $\sigma-$ 代数

8. **定义** (a) 二维乘积空间：设 $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i), i = 1, 2$ 为可测空间. 令

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2\},$$
$$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathfrak{A}_i, i = 1, 2\}),$$

这里，$\mathfrak{C} = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathfrak{A}_i, i = 1, 2\}$ 为 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 中的半代数；如果 $\mathfrak{C}_i, i = 1, 2$ 分别为 $\Omega_i, i = 1, 2$ 中的半代数，则 $\{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathfrak{C}_i, i = 1, 2\}$ 也是 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 中的半代数，当 $\sigma(\mathfrak{C}_i) = \mathfrak{A}_i, i = 1, 2$ 时，而且它生成的 $\sigma-$ 代数也是 $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

上述乘积空间及乘积 $\sigma-$ 代数概念可推广到任意有限维的情形.

(b) 设 $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i), i = 1, \cdots, n$ 为 n 个可测空间，则定义

$$\prod_{i=1}^{n} \Omega_i = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i, i = 1, \cdots, n\},$$
$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i = \sigma(\{A_1 \times \cdots A_n : A_i \in \mathfrak{A}_i, i = 1, \cdots, n\}).$$

特别地，当 $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) = \cdots = (\Omega_n, \mathfrak{A}_n) = (\Omega, \mathfrak{A})$ 时，记 $\Omega^n = \prod_{i=1}^{n} \Omega, \mathfrak{A}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{A}$. 比如，$n-$ 维 *Borel* $\sigma-$ 代数 $\mathcal{B}^n = (\mathcal{B}^1)^n$.

可测映射 (函数)

设 $(\Omega, \mathfrak{A}), (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ 为两个可测空间.

9. **定义** 映射 $f:\Omega\to\mathcal{X}$, 如果 $\forall B\in\mathcal{B}$, 有

$$f^{-1}(B)\equiv\{\omega: f(\omega)\in B\}\in\mathfrak{A}, \tag{1.3}$$

则称 f 为 $\mathfrak{A}-\mathcal{B}$ 可测映射; 当空间 $(X,\mathcal{B})$ 不需特别指明时, 称 f 为 $\mathfrak{A}$ 可测映射, 简记为 $f\in\mathfrak{A}$.

特别地, 当 $(\mathcal{X},\mathcal{B})=(R^1,\mathcal{B}^1)$ 时, f 为实值函数; 当 $(\mathcal{X},\mathcal{B})=(\bar{R}^1,\bar{\mathcal{B}}^1)$ 时, 称 f 为实函数. 其中 $\bar{R}^1=R^1\cup\{-\infty,+\infty\}$, $\bar{\mathcal{B}}^1$ 为 $\mathfrak{S}$ 在 $\bar{R}^1$ 中生成的 σ- 代数. 类似地定义 $(\bar{R}^n,\bar{\mathcal{B}}^n)$. 可测的实函数简称可测函数.

因为可测函数可取 $\pm\infty$ 为值, 所以要先规定 $\pm\infty$ 与有限数的运算规则: $\forall x\in R^1$,

$$(\pm\infty)\pm x=x+(\pm\infty)=x-(\mp\infty)=\pm\infty;$$
$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty;$$
$$x\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot x=\begin{cases}\pm\infty, & \text{如果 } 0<x\le\infty,\\ 0, & \text{如果 } x=0,\\ \mp\infty, & \text{如果 } -\infty\le x<0,\end{cases}$$

$\frac{x}{\pm\infty}=0.$

下列运算被认为无意义:

$$(\pm\infty)-(\pm\infty),\ (\pm\infty)+(\mp\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty},\ \frac{x}{0}.$$

由 (1.3), 可测映射 f 的逆映射 f^{-1} 是集合 $\mathcal{B}$ 到集合 $\mathfrak{A}$ 的映射.

10. **命题** 映射 f^{-1} 具有下列性质:

1) f^{-1} 与集运算可以交换, 比如 $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$;

2) 设 f 为可测映射，则 $f^{-1}(\mathcal{B}) \equiv \{f^{-1}(B): B \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathfrak{A}$ 为 $\mathfrak{A}$ 的子 $\sigma-$ 代数；可见 $f^{-1}(\mathcal{B})$ 是使得 f 可测的最小的 $\sigma-$ 代数；

3) $f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$.

证 由定义直接推出 1)；由 1) 直接推出 2). 往证 3). 由 2) 知，$f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C}))$ 为 $\sigma-$ 代数，故有 $f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C})) \supseteq \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$; 另一方面，令

$$\Lambda = \{C \subseteq \mathcal{X} : f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))\}.$$

显然 $\Lambda \supseteq \mathfrak{C}$. 易证 Λ 为一 σ 代数，所以 $\Lambda \supseteq \sigma(\mathfrak{C})$, 即有 $f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C}))$.

例 1 设 f 为可测空间 $(\Omega, \mathfrak{A})$ 到 $\bar{R}^1$ 的函数，如果 $\forall c \in R^1, \{\omega : f(\omega) \geq c\} \in \mathfrak{A}$, 则 f 为可测函数.

证 令 $\mathfrak{C} = \{[c, \infty] : c \in \bar{R}^1\}$, 则显然 $\mathfrak{C}$ 为 $\pi-$ 系，且 $\sigma(\mathfrak{C}) = \bar{\mathcal{B}}^1$, 于是有命题 10 的 3)

$$f^{-1}(\sigma(\mathfrak{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathfrak{C})) \subseteq \mathfrak{A}.$$

推论 1 如果下列条件之一成立：

(i) $\forall\, c \in \bar{R}^1,\ \{f < c\} \in \mathfrak{A}$;

(ii) $\forall\, c \in \bar{R}^1,\ \{f \leq c\} \in \mathfrak{A}$;

(iii) $\forall\, c \in \bar{R}^1,\ \{f > c\} \in \mathfrak{A}$,

则 f 为可测函数.

证 利用命题 10, 同例 1 的方法可得.

推论 2 设 $f, f_n, n \geq 1, g$ 均为 $(\Omega, \mathfrak{A})$ 上的可测函数，则 $f \pm g, fg, f/g$(有定义时), $|f|$ 及 $\inf_n f_n, \sup_n f_n, \inf\limits_n \sup\limits_{k \geq n} f_k, \sup\limits_n \inf\limits_{k \geq n} f_k$,

都是可测函数.

证 用 Q 表示有理数的集合. 容易验证, $\forall\, c, \{f+g<c\} = \cup_{r\in Q}\{f<r\}\cap\{g<c-r\}$, 由 $f,g\in\mathfrak{A}$, 知 $f+g\in\mathfrak{A}$; 又 $\forall\, c, \{\inf_n f_n<c\}=\cup_{n=1}^{\infty}\{f_n<c\}$, 可知 $\inf_n f_n\in\mathfrak{A}$. 其余情形的证明类似.

11. **命题 (复合函数的可测性)** 设 $(\Omega_i,\mathfrak{A}_i)$ 为可测空间, $i=1,2,3$. $f:\Omega_1\to\Omega_2$ 为 $\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2$ 可测, $g:\Omega_2\to\Omega_3$ 为 $\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_3$ 可测. 定义 $g\circ f(\omega)=g(f(\omega))$, 则 $g\circ f$ 为 $\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3$ 可测.

证 由命题 10 的 2)

$$(g\circ f)^{-1}(\mathfrak{A}_3)=f^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{A}_3))\subseteq f^{-1}(\mathfrak{A}_2)\subseteq\mathfrak{A}_1.$$

下面讨论可测函数的构造.

设 $f:(\Omega,\mathfrak{A})\to(\bar{R}^1,\bar{\mathcal{B}}^1)$ 为可测函数. 由 10 中推论 2 可证, $f^+=0\vee f\equiv\max\{0,f\}$, $f^-=0\vee(-f)$ 都是可测函数, 且 $f=f^+-f^-$.

12. **定义** (a) 设 $A\in\mathfrak{A}$, 令

$$\chi_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\notin A,\end{cases}$$

称其为 A 的示性函数;

(b) 设 $A_1,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个分划, 即 $A_i\in\mathfrak{A}, A_i\cap A_j=\emptyset, i\neq j, i,j=1,\cdots,n$, $\sum_{i=1}^n A_i=\Omega$, 及 $a_i\in\bar{R}^1, i=1,\cdots,n$, 则称

$$f(\cdot)=\sum_{k=1}^n a_k\chi_{A_k}(\cdot)$$

为简单函数;

(c) 设 $A_1, A_2, \cdots$ 为 Ω 的一个分划, $a_i \in \bar{R}^1, i = 1, 2, \cdots$, 则称

$$f(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{A_k}(\cdot)$$

为初等函数.

根据 10 中推论 2, 示性函数, 简单函数和初等函数都是可测函数.

13. **定理** (a) 可测函数是简单函数 (初等函数) 列的极限 (相应地, 一致收敛极限);

(b) 有界可测函数是简单函数列的一致极限;

(c) 非负可测函数是非负不降简单函数 (初等函数) 列的极限 (相应地, 一致极限).

证 设 f 为可测函数, 令

$$\begin{aligned} f_n = & -n\chi_{(f<-n)} \\ & + \sum_{k=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{(k/2^n \le f < (k+1)/2^n)} \\ & + n\chi_{(f \ge n)}; \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} g_n = & (-\infty)\chi_{(f=-\infty)} \\ & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} \chi_{(k/n \le f < (k+1)/n)} \\ & + (+\infty)\chi_{(f=+\infty)} \end{aligned}$$

显然 f_n, g_n 分别为简单函数和初等函数, 且 $n \to \infty, f_n \to f$, 而 $|f - g_n| < \frac{1}{n}$ 对一切 ω 一致地成立. 当为有界可测函数时, 对充分大的 n, 有 $|f - f_n| < 1/2^k$ 一致地成立.

类似地可证 (c).

可测函数的构造性定义 设 $f : \Omega \to \bar{R}^1$, 如果存在 $(\Omega, \mathfrak{A})$ 上的简单函数列 (初等函数列) $f_n, n \geq 1$ 使得 $f_n(\omega) \to f(\omega), n \to \infty, \omega \in \Omega$ (相应地, $f_n \to f, n \to \infty$ 一致地成立), 则称 f 为可测实函数.

根据定理 13 和 10 中的推论 2 可知, 上述定义与可测函数的定义 9 等价.

14. **函数形式的单调类定理** 设 $\mathcal{H}$ 是 $(\Omega, \mathfrak{A})$ 上的一些实值函数组成的线性空间, 且

(i) $1 \in \mathcal{H}$(1 表示恒为 1 的函数);

(ii) 若 $f_n \in \mathcal{H}, 0 \leq f_n \uparrow f, f$ 有限 (相应地, 有界), 则 $f \in \mathcal{H}$.

如果 $\mathcal{H}$ 包含 $\pi-$ 系 $\mathfrak{C}$ 中所有集的示性函数, 则 $\mathcal{H}$ 包含一切 $\sigma(\mathfrak{C})$ 可测实值 (相应地, 有界) 函数.

证 令

$$\Lambda = \{A \subseteq \Omega : \chi_A \in \mathcal{H}\}.$$

已知 $\Lambda \supseteq \mathfrak{C}$. 易证 Λ 为一 $\lambda-$ 系. 由集合形式的单调类定理知, $\Lambda \supseteq \sigma(\mathfrak{C})$; 因 $\mathcal{H}$ 为包含常数函数 1 的线性空间, 故 $\mathcal{H}$ 包含所有实值简单函数; 由 (ii) 及定理 13 知, $\mathcal{H}$ 包含一切非负 $\sigma(\mathfrak{C})-$ 可测实值 (相应地, 有界) 函数; 最后, $\sigma(\mathfrak{C})-$ 可测的实值 (相应地, 有界) 函数 $f = f^+ - f^-$, 而已证 $f^+, f^- \in \mathcal{H}$, 从而 $\mathcal{H}$ 包含 $\sigma(\mathfrak{C})-$ 可测的实值 (相应地, 有界) 函数.