初中数学选择题700例

山西人民出版社

初中数学选择题700例

赵 南 平 编

山 西 人 民 出 版 社

初中数学选择题700例

赵南平 编

责任编辑 徐亚东

*

山西人民出版社出版 （太原并州北路十一号）

山西省新华书店发行 山西省七二五厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：7.25 字数：152 千字

1986年3月第1版 1986年3月山西第1次印刷

印数：1—53,500册

*

书号：7088·1379 定价：1.00元

前　言

数学选择题应用于考试和教学中，在我国还是最近几年的事。到目前为止，专门探讨数学选择题的解法的文章为数也不多。本书在这方面作了尝试，其意图是想向读者介绍数学选择题的解法，特别是一些与常规题解法不同的特殊解法。如果没有掌握这些特殊解法，那么解起数学选择题来虽然答案也许是正确的，但却须花费许多时间。象美国每年举行一次的中学生数学竞赛，要在90分钟内解完30道选择题，没有一定的速度那是不行的。从本人实践来看，当你开始解数学选择题时，首先要判断使用哪一种解题方法最好，这是很关键的一步，因为方法得当，可收事半功倍之效；其次才是数学知识的正确运用。从这一点上来说，解数学选择题有它特殊的地方。编写本书的另一意图是想通过这些选择题的解法使读者既在“双基”上能有所收获，又在解题能力上能有所提高。因此本人在选择例题时遵循的原则是：例题要具有典型性、广泛性、代表性，例题的知识覆盖面要广。对每种解法，都注意从代数、平面几何、三角、解析几何中各选出一些典型范例来加以介绍，对有的范例还针对学生可能出现的错误选择作了“误选分析”，目的是想提醒学生注意解题中常犯的错误，以便更好地掌握“双基”。对有的范例还

作了解题规律和解题方法的小结，目的是提高学生的解题能力。在选择例题时，还尽量注意使这些例题中所用的知识是初中数学中的重要内容，所用的解题方法是初中生所应掌握的常用方法（如平面几何中常见的添加辅助线的方法等），并注意出现用配方法、换元法、反证法、待定系数法等来解题的题目。另外，还适当介绍一些课本上所没有，但作为初中生又必须掌握且能掌握的数学知识，如数学竞赛中经常会遇到的数的整除问题、质数概念、奇偶性等，对这类题目，在题号前都打了“*”号。

本书还编进了近600道的练习题（练习A要求较基本，练习B在要求上略有提高），这些练习题是按代数、平面几何、三角，解析几何选择题来分类的，而不象例题那样按解法分类，其目的在于使读者通过练习能切实掌握选择题的各种解法。为便于学生核对，对练习题在书末均给出了答案和解法提示，有的也给出“误选分析”。本书末还给出五套的自我检查题，可用于检查学习的效果。

在编写过程中，李有权、詹振照两位老师都提供了许多有用的资料，并协助做了许多具体的工作，在此表示衷心的感谢。由于时间仓促，且限于水平，错误和不妥之处在所难免，望读者多加批评指正。

编者　于1984年7月

目　录

第一章　选择题的作用和特点

近年来，由于电脑的普遍使用，数学选择题作为一种新颖的题型，已逐渐出现于日常的教学和考试（特别是规模较大的考试，如招生入学考试）中。它与常规的“求解题”和“求证题”相比，具有“多”（考查内容多、知识覆盖面广）、“快”（答卷快，阅卷快）、“好”（评分标准统一，差错少，便于分析错误）、“省”（答卷省时，阅卷省时省人）等优点。它对学生的解题速度、解题能力提出了更高的要求，它更有利于培养学生灵活运用基本知识与基本技能的能力以及迅速、准确地选择、判断的能力，更有利于培养学生思维的灵活性、敏捷性等良好的思维品质。

从长远来看，在实际工作中，也要求对众多的方案及各种可能性做出恰当的处理，这就需要当机立断的选择判断能力，而现在的许多学生往往只是埋头于运算，苦心推证，缺乏自我检验和判断是非、摒弃谬误的能力。数学选择题突出地体现了对这种能力的训练或考核。正因为如此，数学选择题已被世界许多国家所采用。

当然，选择题作为命题形式的一种也有它的缺点，且有些题目也不宜采用选择题的形式。

第二章　选择题的结构及类型

选择题既具有常规题的一般结构，又有它自身的特殊结构。它可分为命题和答案（称为选择支）两大部分。答案部分是一般常规题所没有的，但在选择题中却有着重要的作用。拟题者常根据学生在答题时最常见的错误精心设计出几个似是而非的答案供选择。当学生掌握概念不牢固时，常易于被所提供的某个错误答案所迷惑而堕入陷阱。因此在答题时要充分注意选择答案的暗示作用。

数学选择题，从大的方面来分有两种类型：第一种类型是给出的几个供选择的答案中有且只有一个是正确的；第二种类型是给出的答案中不止一个是正确的，这种命题更加灵活，牵涉面更广。做选择题时先要分清类型。由于目前出现的大多是第一种类型的选择题，因此本书也只研究第一种类型的选择题的解法，这点请读者注意。

第三章 解答选择题的常用方法

许多学生由于不熟悉选择题的结构与特点，未掌握解答选择题的常用方法（特别是特殊解法），因而出现较多的失误或花费较多的解题时间。

数学选择题与常规试题的不同点是：一是给出了几个答案供选择；二是解答时不必写出解题过程；三是答错了要倒扣分（这可使那些企图投机而乱猜作答者不能得到任何好处，从而能较真实地反映考生的水平）。因此，选择题的解法也有与常规题的解法不尽相同的地方。在解选择题时一定要周密地思考，敏捷地分析，仔细地运算，要在鱼目混珠的答案中，不为假象所迷惑，不以错觉当结论，防止凭“大概是”、“可能是”去乱猜填。

解答第一种类型的数学选择题常用的有以下几种方法：（1）直接求解对照法；（2）剔除法；（3）特殊值判断法；（4）验证法；（5）观测分析法；（6）图象法。除第一种方法与常规题解法一样外，从第二种方法开始均属特殊解法。对这些特殊解法，读者更要引起注意，因为掌握了这些特殊解法，就可以大大提高解题速度和少犯错误。

与常规题有多种解法一样，一道选择题也往往不只一种

解法，我们要学会从不同的角度去观察分析它，通过不同的途径，运用不同的方法并从中选择最优解法予以解决。一般来说，可以用特殊解法来解的选择题也都可以用直接求解对照法来解。在本书中，为节省篇幅，有的范例的直接解法就不再给出。

最后，我们强调，为了对选择题作出迅速准确的判断，在解答时应该注意题目的特点，充分利用选择支所提供的信息，注意排除各种答案可能造成的干扰，灵活地运用各种方法，也可以将几种方法结合起来使用。

第一节　直接求解对照法

从题目给定的条件出发，直接进行计算或推理得到题目要求的结果（即将选择题作为通常的求解题来解），然后与题目所给的供选择的答案进行对照，从中选择正确的答案，这种解法称直接求解对照法。这是最常用的解法。

如果我们在解题中途产生错误，所求得的结果竟与供选择的答案全不相同，这时就可以肯定自己的解题出了毛病，应重新检查。但是，可能由于有所疏忽而得出错误的答案，而这个答案又恰是供选择的答案之一，这样你就陷入命题者所设置的“陷阱”了。

例1　a为何值时，分式$\dfrac{\sqrt{(-a^2)^2-4}}{\sqrt{a^2-3a-8}}$的值为0？

（a）2；　　　　（b）±2；

（c）－2；　　　（d）以上答案均不对。

解： ∵　$\sqrt{(-a^2)^2-4}=|-a^2|-4=a^2-4$，

解$a^2-4=0$得$a=\pm 2$。

但当$a=2$时，$a^2-3a-8=4-6-8<0$，所以$\sqrt{a^2-3a-8}$无意义；当$a=-2$时，$a^2-3a-8=4+6-8>0$，分式有意义。可见应选（c）。

误选分析：（1）算术根概念不清的同学易得$\sqrt{(-a^2)^2}-4=-a^2-4$，由于$-a^2-4=-(a^2+4)<0$，于是选择答案（d）；（2）解$a^2-4=0$时，有的同学得到$a=2$，于是会选择答案（a）；（3）由$a^2-4=0$得$a=\pm 2$后，有的同学不去检查分母是否有意义，于是会选择答案（b）。

例2　（北京市83年初三竞赛题）若$x=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$，则x的值一定是

（a）$\frac{1}{2}$；　（b）-1；　（c）$\frac{1}{2}$或-1；

（d）$\frac{3}{2}$；　（e）以上答案都不对。

解：　当$a+b+c\neq 0$时，

$$x=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{b+c+c+a+a+b}=\frac{1}{2}，$$

当$a+b+c=0$时，$\because$　$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$，$\therefore$　$x=-1$。因此应选（c）

误选分析：在等比定理$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{e}{f}=\frac{a+c+\cdots+e}{b+d+\cdots+f}$

中，须保证各分母不得为0，因此本题从 $x=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}$ $=\frac{c}{a+b}$ 而推得 $x=\frac{a+b+c}{b+c+c+a+a+b}=\frac{1}{2}$ 时，须保证 $2(a+b+c)\neq 0$。对等比定理成立的条件没有引起充分注意的学生很容易得到 $x=\frac{1}{2}$，而漏了 $x=-1$，因而错误地选择了（a）。

例3　若a、b、c均不为0。则

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$$ 的值是

（a）0；　　　　　　　　（b）-4，0，4；

（c）-4，-2，0，2，4；

（d）-4，-2，2，4；　　（e）这些都不对。

解： $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 中的每一项只能取±1。若 $\frac{abc}{|abc|}=1$，则a、b、c三数中或一个为正数，或三个均为正数：若一个为正数，则原式值为0；若三个均为正数，则原式值为4。同上，若 $\frac{|abc|}{abc}=-1$，则原式值为0或-4。

∴ 应选（b）。

例4　如果n是整数，那么 $N=\frac{1}{8}[1-(-1)^n]\cdot(n^2-1)$ 的值

（a）一定是0；　（b）一定是偶数；

（c）是整数但不一定是偶数；（d）不一定是整数。

解：当n是偶数时，$N=0$。

当n是奇数时，设$n=2k+1$，则$N=\frac{1}{8}\times 2\times 2k\times(2k+2)=k(k+1)$。

$\because$ $k(k+1)$一定能被2整除，$\therefore$ N一定是偶数。因此应选（b）。

注：1．在解决有关整数的问题时，常将整数分为奇数和偶数来讨论，这种解题方法应用很广，我们称之为**“奇偶分析法”**。特别是当题目的条件或结论中出现某数是奇数或偶数时，一般都可用“奇偶分析法”来解题。如：“如果方程$ax^2+bx+c=0$的两个根，一个是奇数，另一个是偶数，且a、b、c都是整数。求证：对于任何整数x，都有ax^2+bx是偶数”。

2．在数的整除问题中常用到如下的几个重要结论（证明略）：（1）任意二个连续整数的积一定能被2整除；（2）任意三个连续整数的积一定能被$3\times 2=6$整除；（3）任意k个连续整数的积一定能被$k(k-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$整除。

例5 若$(3x-1)^7=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+\cdots+a_6x+a_7$，那么$\sum_{i=0}^{7}a_i$等于

（a）0；（b）1；（c）64；（d）−64；（e）128。

解：这里记号“Σ”表示“求和”的意思。本题中$\sum_{i=0}^{7}a_i=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6+a_7$即求右边多项式中各项系数之和。易见，若令$x=1$，右边即为$\sum_{i=0}^{7}a_i$。因此它等于

$(3\times 1-1)^7=2^7=128$。可见应选（e）。

例6 若一代销店今后进货价便宜8%，而销售价保持不变，那么它的利润（按进货价而定）可由目前的x%增加到（x+10）%，则x%是

（a）12%；　（b）15%；　（c）25%；

（d）50%；　（e）75%。

解：设原来进货价为a（元），销售价为b（元），则原利润为

$$(b-a)/a=x\% \qquad (1)$$

∵ 今后的进货价为$(1-8\%)\cdot a$（元），而销售价仍为b（元），∴ 今后的利润为

$$\frac{b-(1-8\%)a}{(1-8\%)a}=(x+10)\% \qquad (2)$$

由（1）得$b-a=x\%\cdot a$，代入（2）得

$$\frac{x\%\cdot a+8\%\cdot a}{92\%\cdot a}=(x+10)\%，解得x=15。$$

可见应选（B）。

例7 （福建省83年初中数学竞赛题）已知方程$(2\sqrt{3}+\sqrt{2})x^2+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x-(\sqrt{2}-2\sqrt{3})=0$，那么(a)这方程的两个实根之和为$-\frac{1}{5}(4+\sqrt{6})$，积为$\frac{1}{5}(7-2\sqrt{6})$；　（b）这方程的两个实根之和为$\frac{1}{5}(4+\sqrt{6})$，积为$\frac{1}{5}(2\sqrt{6}-7)$；　（c）这方程的两个实根之和为$-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$，积为$2\sqrt{3}-\sqrt{2}$；　（d）以上答案都不对。

解： ∵ $\triangle = 2^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - 4(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot$
$\cdot(2\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 4(2\sqrt{6}-5) < 0$，

∴ 原方程没有实数根。因此应选（d）。

误选分析： 本题极易为选择答案中和积表达式的“伪装”所诱惑。根的判别式概念不强的同学一看到这题目，会马上应用韦达定理，并由 $-\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} = -\frac{1}{5}(4+\sqrt{6})$，$\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{5}(7-2\sqrt{6})$ 就以为正确的答案是（a）。其实，对于韦达定理来说，“实根”两字本是多余的，而选择答案中却偏要写出，这正是选择答案所提供的信息，因而就值得引起警惕了。况且最后还有一个否定的答案（d），由此更可以得到暗示，因此应从根的判别式入手而得正确答案是（d）。

例 8 若 x_1、x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$（k为实数）的两个实根，则 $u=x_1^2+x_2^2$ 的最大值是

（a）19；（b）18；（c）$5\frac{5}{9}$；（d）不存在。

解： ∵ x_1、x_2 是原方程的两个实根，

∴ $\triangle = (k-2)^2-4(k^2+3k+5) \geqslant 0$，

即 $-4 \leqslant k \leqslant -\frac{4}{3}$。

又 $u = x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$
$= (k-2)^2 - 2(k^2+3k+5)$
$= -(k+5)^2+19$。

这个二次函数的值在$-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$的范围内随着k的增大反而减少（图3.1.1），因而当$k=-4$时，$x_1^2+x_2^2$有最大值，最大值为$-(-4+5)^2+19=18$。

可见应选择（b）。

误选分析：本题如不注意k的取值范围，就会错误地以为当$k=-5$时，$x_1^2+x_2^2=19$为最大值，因而选择了（a）。

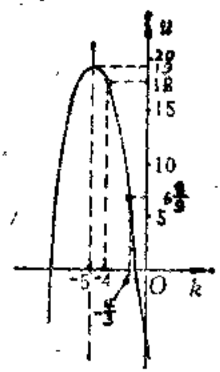

图 3.1.1

注：1．本题所用的"**配方法**"是数学中常用的一种方法，它在因式分解、解一元二次方程、求二次函数极值以及解析几何中求圆心坐标和半径等方面都有着重要的应用；

2．在求二次函数$y=ax^2+bx+c$的最大（小）值时，应特别注意自变量x的取值范围。

（1）当x可以取一切实数时：

若$a>0$，则y在顶点处取最小值，无最大值；

若$a<0$，则y在顶点处取最大值，无最小值。

（2）当$m\leqslant x\leqslant n$时（$m<n$），

若$m\leqslant -\frac{b}{2a}\leqslant n$，且$a>0$，则y在顶点处取最小值，比较$x=m$和$x=n$时y值的大小，取大的y值作为最大值（图3.1.2）。

若$m\leqslant -\frac{b}{2a}\leqslant n$，且$a<0$，则y在顶点处取最大值，比较$x=m$和$x=n$时y值的大小，取小的y值作最小值（图3.1.3）。