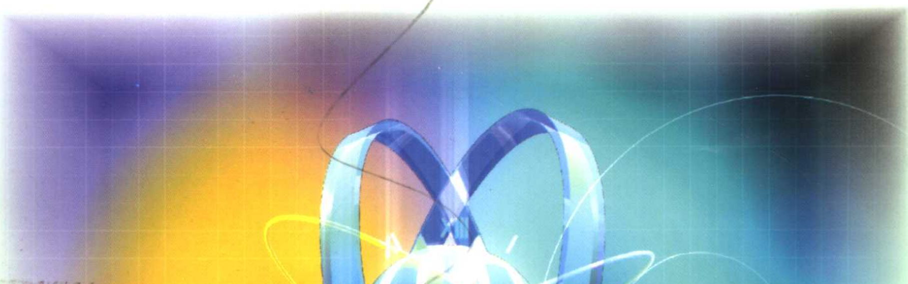
线性代数
精解及应用

Xianxing Daishu Jingjie Ji Yingyong

主　编　熊启才　曹吉利

副主编　朱世平　杨晨曦　周建设
　　　　杨立夫　李　哲　冯甄玲



重庆大学出版社

线性代数精解及应用

主　编　熊启才　曹吉利

副主编　朱世平　杨晨曦　周建设
　　　　杨立夫　李　哲　冯甄玲

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书根据全国高等院校线性代数教学大纲和研究生入学考试要求编写而成. 全书分为行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型,共6章. 每章由基本概念、基本性质、重要定理、解题方法和技巧所构成,最后列出模拟测试题,供读者自测. 本书所选择内容宽泛而经典,绝大部分是历年硕士研究生考题及解答,旨在为学习线性代数提供一本实用的教学参考书.

本书可供高等院校理、工、农、医、管理及相关专业学生使用,也可供科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数精解及应用/熊启才,曹吉利主编. —重庆:重庆大学出版社,2006. 4
ISBN 7-5624-3570-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①熊…②曹… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 155258 号

线性代数精解及应用

主 编 熊启才 曹吉利

副主编 朱世平 杨晨曦 周建设
杨立夫 李 哲 冯甄玲

责任编辑:曾显跃 版式设计:曾显跃
责任校对:任卓惠 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行
出版人:张鸽盛
社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内
邮编:400030
电话:(023) 65102378 65105781
传真:(023) 65103686 65105565
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)
全国新华书店经销
重庆华林天美印务有限公司印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:9.875 字数:265千
2006年4月第1版 2006年4月第1次印刷
印数:1—4 000
ISBN 7-5624-3570-7 定价:15.00元

前言

线性代数是一门重要的基础学科，它已广泛地应用于理论学习、生产管理、工程技术、科学研究等各个领域. 线性代数也是硕士研究生入学考试的必考课程之一，其重要位置是可想而知的. 该课程的特点是内容抽象，概念多，前后联系紧密，环环相扣，学生在初学或备考研究生复习时，可能会遇到许多困难，特别是在解题时有时感到一筹莫展. 本书的出版是为了帮助初学者或备考研究生的学生开阔解题思路，总结解题规律，提高应用能力.

本书根据全国高等院校线性代数教学大纲和研究生入学考试要求以及同济大学应用数学系编《线性代数》(第四版)教学内容编写而成.

全书分为行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型，共 6 章. 每章由基本概念、基本性

质、重要定理、解题方法和技巧所构成，部分题目还给出了多种解法，最后列出模拟题，供读者自测. 并对所有模拟测试题也给出了较详细的参考答案，附在全书之后供读者自测时参考. 本书所选择内容宽泛而经典，绝大部分是历年硕士研究生考题及解答，旨在为读者特别是志在考取硕士研究生的学生学习线性代数时，提供一本实用的教学参考书.

对于硕士研究生考试题标明了试题年份和试卷号，例如“2005(1)”表示2005年数学试卷一.

在本书编写中，我们参考了许多有关线性代数方面的资料和书籍，在此一并感谢. 由于时间仓促和水平所限，书中难免存在疏漏和不足之处，敬请读者和同行专家批评指正.

本书可供高等院校理、工、农、医、管理及相关专业学生使用，也可供科技工作者参考.

编　者

2005 年 10 月

目录

第 1 章　行列式 …………………… 1

1.1　知识点概要………… 1

1.2　典型题解析………… 5

1.3　模拟测试题 ……… 23

第 2 章　矩阵 ………………… 27

2.1　知识点概要 ……… 27

2.2　典型题解析 ……… 36

2.3　模拟测试题 ……… 81

第 3 章　向量组的线性相关性

…………………………… 84

3.1　知识点概要 ……… 84

3.2　典型题解析 ……… 91

3.3　模拟测试题 …… 138

第 4 章　线性方程组 ……… 141

4.1　知识点概要 …… 141

4.2　典型题解析 …… 146

4.3　模拟测试题 …… 198

第 5 章　矩阵的特征值和特征向量 ………… 202
5.1　知识点概要　…… 202
5.2　典型题解析　…… 206
5.3　模拟测试题　…… 241

第 6 章　二次型 …………… 244
6.1　知识点概要　…… 244
6.2　典型题解析　…… 249
6.3　模拟测试题　…… 272

模拟测试题精解 …………… 274
第 1 章　行列式 ……… 274
第 2 章　矩阵 ………… 278
第 3 章　向量组的线性相关性 ……… 283
第 4 章　线性方程组 … 291
第 5 章　矩阵的特征值和特征向量 …… 297
第 6 章　二次型 ……… 302

参考文献 …………………… 307

第 1 章 行列式

1.1 知识点概要

1.1.1 基本概念

定义 1.1 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

规定为所有形如 $(-1)^{\omega(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

项的代数和,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,$\omega(j_1j_2\cdots j_n)$是排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\omega(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

定义 1.2　由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式,称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,记为 $|\boldsymbol{A}|$.

定义 1.3　在 n 阶行列式中,将元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去,剩余的元素所构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij};而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式.

定义 1.4　在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,任取 k 行与 k 列($k\leqslant m,k\leqslant n$),位于这些行列交叉处的 k^2 个元素,按原来的次序组成的 k 阶行列式,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式.

1.1.2　基本性质

(1)行列式的性质

①行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}$$

②互换行列式的两行(列),行列式变号. 若行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

③行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式的外面. 换言之,用一个数乘行列式等于用此数乘行列式的某一行(列)的所有元素.

④行列式中如果有两行(列)的元素对应成比例,则此行列式等于零.

⑤若行列式的某一行(列)的元素都是两个数之和,则此行列式等于相应两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

⑥将行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

(2)行列式按行(列)展开

展开定理 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j.$$

(3)方阵的行列式的运算规律

①$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.

②$|k\boldsymbol{A}| = k^n |\boldsymbol{A}|$.

③$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \, |\boldsymbol{B}|$.

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵,k 为数.

1.1.3 相关性质

①
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上述两个行列式分别称为上(下)三角行列式.

②若 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,则
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|.$$

③范德蒙行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

④若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

⑤若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$,其中 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

⑥设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

⑦相似矩阵的行列式相等,即若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,且有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

1.2　典型题解析

1.2.1　**题型 1**　行列式的计算

例 1.1(1996(2))　四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

的值等于[　　].

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$.

(B) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$.

(C) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$.

(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$.

答:(D).

解析　将行列式按第 1 行展开,

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

再将等号右端两个行列式都按第 3 行展开,得

$$D = a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3).$$

例 1.2(1999(2))　记

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix},$$

则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为[　　].

(A) 1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

答:(B).

解析　计算行列式 $f(x)$,将 $f(x)$ 第 1 列的 -1 倍分别加到第 2,3,4 列上,得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}.$$

再将第 2 列加到第 4 列,得

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} \\ &= -x(-5x+5) \\ &= 5x(x-1). \end{aligned}$$

所以,$f(x)=0$,即 $5x(x-1)=0$ 有两个根.

例 1.3　计算 $n(n\geqslant2)$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

解 将第 $i(i=2,3,\cdots,n)$ 列的 $-\frac{1}{i}$ 倍加到第1列,得

$$\begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right).$$

例1.4 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}, b \neq a_i (i = 1,2,\cdots,n).$$

解 将第1行的 -1 倍加到其他各行上,得到

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b-a_1 & a_2-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a_1 & 0 & a_3-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}.$$

第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 列提取 a_i-b,得

$$D_n = \prod_{i=1}^{n}(a_i-b)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-b} & \frac{b}{a_2-b} & \frac{b}{a_3-b} & \cdots & \frac{b}{a_n-b} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

各列加到第1列,得

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{b}{a_j-b} & \dfrac{b}{a_2-b} & \dfrac{b}{a_3-b} & \cdots & \dfrac{b}{a_n-b}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b}{a_j-b}\right)\prod_{i=1}^{n}(a_i-b).$$

例 1.5 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix},\text{其中 } a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

解 第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 行提取公因子 a_i，再将各行都加到第 1 行，得

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & \cdots & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\\ \dfrac{1}{a_2} & 1+\dfrac{1}{a_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{1}{a_n} & \dfrac{1}{a_n} & \cdots & 1+\dfrac{1}{a_n}\end{vmatrix}.$$

第 1 行提取公因子 $1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}$，再将第 1 行的 $-\dfrac{1}{a_i}$ 倍加到第 i $(i=2,3,\cdots,n)$ 行，得

$$D_n=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

例 1.6 计算 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&0\\1&1&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$.

解 将第 2,3,…,n 行都加到第 1 行,并提出公因子 $n-1$,得

$$D_n=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&1&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

各行都减去第 1 行,得

$$D_n=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&-1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}(n-1).$$

例 1.7(1990(4)) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 10 阶单位矩阵, λ 为常数.

解 将 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$ 按第 1 列展开,得

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&\cdots&0&0\\0&-\lambda&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-\lambda&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$
= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 10^{10} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-\lambda)^{10} - 10^{10} = \lambda^{10} - 10^{10}.
$$

例 1.8(1996(4))　五阶行列式

$$
D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\qquad}.
$$

答:应填 $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

解析　将各列都加到第 1 列,得

$$
D_5 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} +
$$