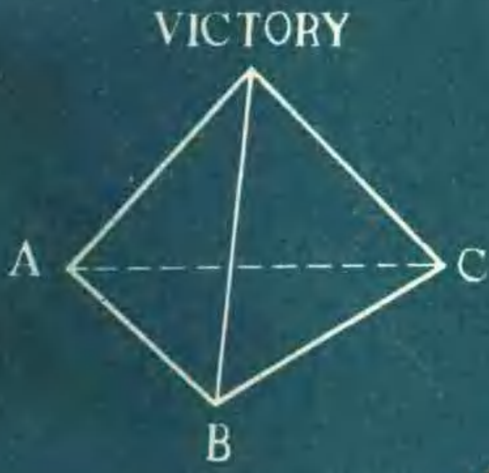
数学

题型综合训练

朱传陵　陆启明　主编



高中版

学苑出版社

数学题型综合训练（高中版）

主编：朱传陵　陆启明

学 苑 出 版 社

（京）新登字151号

数学题型综合训练（高中版）

朱传陵　陆启明　主编

学苑出版社出版
（北京市西城区成方街33号）
江苏省新华书店发行
南京三角洲电子科技公司激光照排中心
南京江宁彩色印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：7.25　字数：180千字
印数：0001—20000
1992年7月第1版　1992年7月第1次印刷

ISBN7—80060—0[illegible]1—O/G·19　　本册定价5.4元
（全套定价15元）

顾　　问　沈　超　马　明　单　境

主　　编　朱传陵　陆启明

编　　审　马　明

编委名单：（以姓氏笔划为序）

马　明　马　复　朱传陵

沈　超　李洪江　肖柏荣

单　境　杨文泰　陆启明

笪希文　陶维林

责任编辑　朱传陵　徐建军

目　录

序　言

学习数学总离不开解答各种习题。学生们通过解题的训练和考试，可以熟练地掌握和灵活地运用基本概念、定理、公式等，从而达到培养能力、开发智力、提高素质、增强适应性的教学目的。因此，怎样解题成了学生们学好数学的关键，也是个难题。很多学生常常被做作业、解习题压得透不过气来。平时尽管做了大量习题，但碰到考试、特别是高考往往成绩并不理想，当然原因是多方面的，但其中与学生解题的思路、方法、技巧有着很大的关系。

为了辅导高中学生学好数学这门主课，帮助他们科学地掌握解题应考的能力，江苏电视台和南京三角洲电子科技公司联合录制了《高中数学 ABC 教练法》电视教育系列节目，共30集，每集25分钟。

电视教育系列节目《高中数学 ABC 教练法》面向高中学生，突出介绍了选择题最优解法、填充题精选解法和解答题优选解法以及标准化考试分析和研究。江苏省和南京地区的一批优秀数学教师应邀担任电视主讲老师，其中有中学教育专家、特级教师、原南京师范大学附属中学副校长马明，南京师范大学数学系教授、全国优秀教师、曾在国际数学奥林匹克竞赛中任中国队领队兼主教练的单墫，江苏教育学院数学系副主任、副教授肖柏荣，南京师范大学数学系副教授李洪江，南京航空学院附属中学高级教师杨文泰，南京金陵中学高级教师笪希文，南京师范大学数学系讲师马复，南京师

范大学附属中学一级教师陶维林。中学数学教育专家、南京师范大学数学系教授沈超和马明、单墫担任电视节目的数学教学顾问。江苏电视台主任编辑，苏州大学数学系毕业生陆启明担任电视节目总编导。

《高中数学 ABC 教练法》电视教育系列节目在电视台试播之后，受到了广大高中学生和教师、家长的好评。他们普遍认为：该节目讲课内容精采，针对学生的实际情况，帮助他们熟悉和掌握各种题型的解题思路、方法和技巧，对学好高中数学，特别是复习应考十分有益。同时，也反映：收看电视节目时来不及记下讲课内容，有不少例题在参考教材上找不到，感到很遗憾。

为帮助观众在收看这套电视节目时，能较好地学习和消化讲课内容，我们组织电视讲课教师，根据讲课内容整理和编写了这本《数学题型综合训练研究》作为电视教育系列节目《高中数学 ABC 教练法》的配套教育用书。

本书邀请沈超、马明、单墫担任顾问，马明担任编审。他们在百忙之中，对本书的出版予以热忱的支持和指导，在此我们表示衷心感谢！

电视是现代化的大众传播媒介，将它与传统的课堂教学相结合，使之更好地为广大学生学好数学、提高教学质量服务，这是我们的心愿，也是一种尝试。但由于缺乏经验，又受时间和条件等限制，难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

第二集　化归思想

（一）

在解决数学问题的过程中，数学家往往不是对问题进行直接攻击，而是对问题进行变形、转化，直至把它化归为某个(些)已经解决的问题，或者容易解决的问题。匈牙利著名数学家 P·罗莎曾用“烧开水”这个比喻十分生动地剖析了化归思想的实质。她写道：“假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴，现在的任务是要烧水，你应当怎样去做？”正确的回答是：“在水壶中放上水，点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上”。接着，罗莎又提出第二个问题：“假设所有的条件都不变，只是水壶中已有了足够的水，这时你应该怎样去做？”对此，人们往往回答说：“点燃煤气，再把壶放到煤气灶上。”罗莎认为这并不是最好的回答，因为“只有物理学家才这样做，而数学家则会倒去壶中的水，并且声称我已经把后一问题化归成先前的问题了。”而对前一问题，已做了正确回答。

“把水倒掉”，这是多么简洁的回答，比喻有点夸张，但表明了数学家思考与解决问题的一个特点，与其它应用科学家相比，数学家最善于使用化归思想。

（二）

化归的实质是不断变更问题。就问题的组成来说，有时是变更问题的条件，有时是变更问题的结论，有时则是将整个问题进行变更，变更为一个与原命题等价的命题。

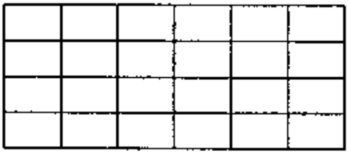
例 1　(鸡兔同笼问题)笼中有鸡和兔,共有脚 140,头 50。求鸡兔各多少?

分析　每只鸡有两只脚,每只兔有 4 只脚,这是问题中不言而喻的已知成份。

对问题中的已知成份(条件)进行变更:“一声令下”,要求每只鸡悬起一只脚(呈金鸡独立状),又要求每只兔悬起两只脚(呈玉兔拜月状)。那么,笼中仍有头 50,而脚只剩 70,并且,这时鸡的头数与足数相等,而兔的足数与头数不等——有一头兔,就多出一只脚。现在有头 50,有足 70,这说明有兔 20 头,有鸡 30 头。

以上是从变更已知成份来寻找化归方法的。而有时则是从变更未知成份来寻找化归方法的。

例 2　18 瓶牛奶分放在 $4\times6=24$ 个方格内(如图,每格只能放一瓶),在数牛奶瓶时要求横数的瓶数为偶数,竖数的瓶数也为偶数,这件事能办到吗?



分析　不妨试一下(请用铅笔在小方格内打上试放记号)可能累试不成——瓶太多了,很难照顾全面。

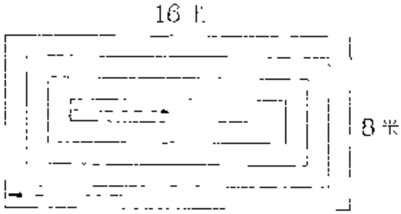
能否“倒过来”想?去变更问题的未知成份——在 $4\times6=24$ 方格内打上 $24-18=6$ 个不放瓶的记号,要求横数为偶数,竖数也为偶数,那么,没有记号的位置便是应该放置奶瓶的位置了。

只考虑 6 个记号,这当然容易很多。最后你会发现,这件事不仅能办到,而且有多种放置方法。

有时,还可以对整个问题进行变更——变更为一个与之

等价的命题。

例 3 下图是一个长 16 米，宽 8 米的长方形园地，其中充满了 1 米宽的小路。如果你沿着小路的中心，从内部出发，走完这条小路，要走多远？



分析 运用化归思想时，难在“把水倒掉”。

能想起“把水倒掉”，问题就化归为容易解决的问题了。

联想很重要。

你看过排球赛吗？当场外服务员用很宽很宽的拖把为运动员清除场地的汗水时，服务员每走 1 米，被清除的场地面积很容易计算。设想，拖把宽 1 米，你用这种拖把去清除园地的地面时，你每走 1 米，被清除的地面恰为 1 平方米。而园地的面积等于 128 平方米，……。

这时，思维被“接通”了，象电似地，一瞬间被“接通”了。

你可以“理直气壮”地说，走完这条小路要走 128 米(转弯处的正方形边长 1 米，路径呈 L 形，长度也是 1 米)，因为，你已把原问题化归为一个与之等价的问题：求长 16 米，宽 8 米的长方形的面积数(以平方米为单位面积)。

再看一个变更整个问题的例子。

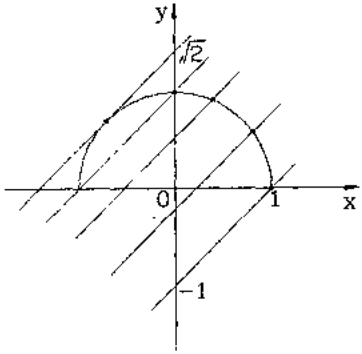
例 4 求 P 的取值范围，使方程

$$X+P=\sqrt{1-X^2}$$

有唯一解。

分析 如将方程两边平方，则要考虑方程同解性的破坏状况，这将给解题带来很大困难。如果将原题变更为：“求 P

的取值范围，使得直线 $Y=X+P$ 与半圆 $Y=\sqrt{1-X^2}$ 有唯一交点，”则困难就大为减少。



由此立得

$$P=\sqrt{2}\text{ 或 }-1<P\leqslant 1$$

（三）

用化归思想去处理递推数列的通项，可收到明显的效果。

例 5 （等比差数列）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=a$，$n\geqslant 2$ 时，$a_n=qa_{n-1}+d$（q、d 为常数，且 $q\neq 0$），求该数列的通项 a_n。（《代数》第二册复习参考题二第 17 题）

分析 若 $q=1$，则该数列是等差数列，其通项 $a_n=a_1+(n-1)d$；若 $d=0$，则该数列是等比数列，其通项 $a_n=aq^{n-1}$。因此，余下工作是在 $q\neq 1$，$d\neq 0$ 的条件下求 a_n。

$$a_n=qa_{n-1}+d\ (d\neq 1,q\neq 1,q\neq 0) \qquad ①$$

是一个递推数列，其首项 $a_1=a$ 可化归为

$$\begin{cases} a_n+\dfrac{d}{q-1}=q(a_{n-1}+\dfrac{d}{q-1}) \\ a_1+\dfrac{d}{q-1}=a+\dfrac{d}{q-1} \end{cases} \qquad ②$$

这是一个等比数列 $\begin{cases} b_n=qb_{n-1} \\ b_1=a+\dfrac{d}{q-1} \end{cases}$

其通项 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=(a+\dfrac{d}{q-1})q^{n-1}$

故有 $a_n+\frac{d}{q-1}=(a+\frac{d}{q-1})q^{n-1}$

$$a_n=aq^{n-1}+\frac{d(q^{n-1}-1)}{q-1}$$

问题虽获解决，但①是怎样化归为等比数列②的？

可以这样去设想：是否存在一个常数 λ，使得①式变形为

$$a_n+\lambda=q(a_{n-1}+\lambda) \qquad ③$$

展开③，得

$$a_n=qa_{n-1}+(q\lambda-\lambda) \quad (q\neq 1)$$

与①比较，立得 $\lambda=\frac{d}{q-1}$， 代入③便得②

例 6 $a_1=7$， $a_{n+1}=5a_n+2\cdot 3^{n+1}-4$， 求数列$\{a_n\}$的通项 a_n。

分析 由递推公式

$$a_{n+1}=5a_n+2\cdot 3^{n+1}-4 \qquad ①$$

的结构特征，要想将①化归为等比数列 $b_{n+1}=qb_n$，其中的 q 似应等于 5，且 b_{n+1}的结构拟为 $b_{n+1}=a_{n+1}+\lambda\cdot 3^{n+1}+\mu$，其中的 λ 和 μ 为待定的常数。

解 $a_{n+1}=5a_n+2\cdot 3^{n+1}-4 \qquad ①$

令 $a_{n+1}+\lambda\cdot 3^{n+1}+\mu=5(a_n+\lambda\cdot 3^n+\mu) \qquad ②$

展开②，与①比较，得 $\lambda=3$， $\mu=-1$，

代入①，得

$$a_{n+1}+3^{n+2}-1=5(a_n+3^{n+1}-1)$$

于此可见，数列$\{a_n+3^{n+1}-1\}$是首项为 $a_1+3^{1+1}-1=7+9-1=15$，公比为 5 的等比数列，于是得

$$a_n+3^{n+1}-1=15\cdot 5^{n-1}$$

即
$$a_n=3\cdot 5^n-3^{n+1}+1$$

例 7 （1982 年全国高考附加题）已知数列 $a_1,a_2\cdots,a_n,\cdots$ 和数列 $b_1,b_2,\cdots b_n\cdots$，其中 $a_1=p,b_1=q,a_n=pa_{n-1},b_n=qa_{n-1}+rb_{n-1}$，$(n\geqslant2$，$p$、$q$、$r$ 是已知常数，且 $q\neq0,p>r>0)$，试用 p、q、r、n 表示 b_n。

解 由 $\begin{cases}a_1=p\\a_n=pa_{n-1}\end{cases}$ 得 $a_{n-1}=p^{n-1}$

由 $\begin{cases}a_{n-1}=p^{n-1}\\b_n=qa_{n-1}+rb_{n-1}\quad(n\geqslant2)\end{cases}$

得 $b_n=rb_{n-1}+qp^{n-1}\quad(b_1=q)$

参考“例 6”解法，立得

$$b_n=\frac{q}{p-r}(p^n-r^n)\quad(n\in N)$$

例 8 （魔针问题）设有甲、乙、丙三根针，在甲针上插有从小到大的几个圆环，最大的一片在最下层（呈塔形），现在要将这些圆环插到乙针上去，而一次仅能移动一环，且在每次移动过程中不能将大环置于小环之上，丙针可作辅助用。设把甲针上的 n 片圆环全部移到乙针所需的最少次数为 a_n，试求：

(1)a_1,a_2,a_3；

(2)a_n。

解 (1)当甲针上只有一片圆环时，只需移动一次，就可以将它移到乙针，所以 $a_1=1$。

当甲针上有两片圆环时，必须利用丙针作过渡，即先将第一片移到丙针上，再将第二片移到乙针上，最后将丙针上的小圆环移到乙针上。这样，甲针上的两片圆环就移到乙针上，并且小片压在大片上，因此 $a_2=3$。

当甲针上有三片圆环时，由于必须一片一片地移，大的又不许压在小的上面，所以，想要移动甲针上最底下的一片圆

环，就必须将上面两片小的先移到丙针上过渡(这需要 $a_2=3$ 次)，这样一来，就可以将最大的第三片从甲针上移到乙针上(又是 1 次)。最后，再将丙针上的两片通过甲针过渡到乙针上(又要 $a_2=3$ 次)所以一共要 7 次，即 $a_3=2a_2+1=7$

(2)仿照以上解题过程，当有

$$a_n=2a_{n-1}+1 \qquad (a_1=1)$$

或

$$a_n+1=2(a_{n-1}+1) \qquad (a_1+1=2)$$

$\{a_n+1\}$是等比数列，公比$=2$，首项$=a_1+1=2$。

故有 $a_n+1=a_1\cdot r^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

所以 $a_n=2^n-1$

“魔针问题”又叫做“世界末日问题”。

印度有一个古老的传说：相传在佛教圣地贝那勒斯的一个寺庙里有一块黄铜板，板上插着三根宝石针，第一根上套着 64 片大小不等的金片，大的在下面，小的在上面。传说这是神在创世时留在那里的。不论白天黑夜，寺内都有一个僧人按照上面说的法则移动金片。神预言，当这 64 片金片都移到一个针上时，世界末日就来临了。

根据上面的计算，$a_{64}=2^{64}-1$，当“世界末日”来临时，金片将被移动过 $2^{64}-1$ 次，如果移动一次需要一秒钟，那末，$(2^{64}-1)$秒≈58 万亿年。现代科学家估计，太阳系的寿命不过 200 亿年，58 万亿年大大超过 200 亿年，因此，当这 64 片金片都移到另一个针上时，“世界末日”早就来临了。不过，“人定胜天”，即使地球毁灭时，也并不意味着“世界末日”来临，人类必将以自己的聪明才智战胜自然，求得生存和发展。

(马　明)

(一)选择题最优化解法介绍