21世纪高等院校计算机科学与工程系列教材

北京希望电子出版社 总策划

邵秀丽 王孝喜 编著
王家廞 审校

离散数学

科学出版社
www.sciencep.com

北京希望电子出版社　总策划

邵秀丽　王孝喜　编　著
王家廞　审　校

离散数学

科学出版社
www.sciencep.com

内容简介

本书作为离散数学的基本教材，在把握关键问题的同时，通过精选的大量实例深入浅出地介绍了命题逻辑、谓词逻辑、集合及其运算、二元关系、函数、代数结构、格和布尔代数、图论、树、Petri 网和运输网络以及计数方法和分类原理等与计算机科学密切相关的前沿课题，既着重于各部分内容之间的紧密联系，又深入探讨各部分内容的概念、理论、算法和实际应用，内容叙述严谨，推演详尽。各章配有大量的习题为读者迅速掌握有关知识提供了有效的帮助。

本书内容丰富、全面、具体、通俗易懂，结构清晰、注重实用。它既适合于计算机和相关专业的本科生和研究生，又可作为工程技术人员的参考书。

需要本书或技术支持的读者，请与北京中关村 083 信箱（邮编：100080）发行部联系，电话：010-82702660　82702658　62978181（总机）转 103 或 238　传真：010-82702698　E-mail：tbd@bhp.com.cn

图书在版编目（CIP）数据

离散数学／邵秀丽，王孝喜编著．—北京：科学出版社，2005.3

21 世纪高等院校计算机科学与工程系列教材

ISBN 7-03-014649-2

Ⅰ．离…　Ⅱ．①邵…②王…　Ⅲ．离散数学—高等学校—教材　Ⅳ．0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 122606 号

责任编辑：曾　华　　／责任校对：张　衫

责任印刷：媛　明　　／封面设计：梁运丽

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码 100717

http://www.sciencep.com

北京市媛明印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2005 年 3 月第 一 版　开本：787×1092 1/16

2005 年 3 月第一次印刷　印张：22 1/4

印数：1—3 000 册　字数：511 千字

定价：36.00 元

21世纪高等院校计算机教材编委会名单

（排名不分先后）

总　　序

21 世纪挑战与机遇并存，没有足够的知识储备必将被时代所抛弃。中国 IT 教育产业竞争日趋激烈，用户需求凸现个性，行业发展更需要理性。未来五年 IT 行业将以每年18 %的速度连续增长，这将引发 IT 产业新的发展高潮。实现信息产业大国的目标，应该依赖教育，要圆信息产业强国的梦想，依然要寄托于教育，IT 教育事业任重道远，其产业也正面临着机遇与挑战。

我国的计算机教学长久以来一直重原理、轻应用。高等院校的计算机教学机制和教材对计算机本身的认识都存在误区。要改革高校计算机教学，教材改革是重要方面，用计算机教材的改革促进基础教育的改革势在必行。

一本好书，是人生前进的阶梯；一套好教材，就是教学成功的保证。为缓解计算机技术飞速发展与计算机教材滞后落伍的矛盾，我们通过调查多所院校的师生，并多次研讨，根据读者认识规律，开创出一种全新的方式，打破过去介绍原理——理论推导——举例说明的模式，增加实用操作性，通过上机实验与课上内容结合来增强可读性，用通俗易懂的语言和例子说明复杂的概念。

本套教材的特点一是“精”，精选教学内容；二是“新”，捕捉最新资讯；三是“特”，配备电子课件，力争达到基础性、先进性、全面性、典型性和可操作性的最大统一。

为保证教材质量，我们同时聘请了一批学术水平较高的知名专家、教授作为本套教材的主审和编委。全套教材包括必修课教材 20 多种，选修课教材和学习配套用书 10 余种，基本上涵盖了目前高等院校（含高等职业技术学院、高等专科学校、成人高等学校）计算机科学与技术专业所必修或选修的内容。各种教材编写时既注意到内容上的连贯性，又保证了教学上的相对独立性。

本套教材在内容的组织上，大胆汲取当今计算机领域最新技术，摒弃了传统教材中陈旧过时的内容。这些变化在各本教材中都得到了不同程度的体现。本套教材编写时既参照了教育部有关计算机科学与技术专业的教学要求，又参考了“程序员考试大纲”和“全国计算机水平等级考试大纲”的内容，因此既适合作为高等学校计算机科学与技术专业教材，也可作为计算机等级考试学习用书。

考虑到各校教学特点和计算机设备条件，我们本着“学以致用”的理念，在本套教材编写中自始至终贯彻“由浅入深，理论联系实际”的原则，以阐明要义为主，辅之以必要的例题、习题和上机实习，能够使学生尽快领悟和掌握。

在本套教材编写过程中，作者们付出了艰辛的劳动，教材编委会的各位专家、教授进行了认真的审定和悉心的指导。书中参考、借鉴了国内外同类教材和专著，在此一并表示感谢。

我们希望更多的优秀教师参与到教材建设中来，真诚希望广大教师、学生与读者朋友在使用本丛书过程中提出宝贵意见和建议。

若有投稿或建议，请发至本丛书出版者电子邮件：textbook@bhp.com.cn

21 世纪高等院校计算机教材编委会

前　　言

离散数学是计算机及相关专业的重要数学基础之一，它是以离散型变量、离散数量关系和离散数学结构模型为研究对象，以研究离散型变量的结构和相互间的关系为主要目标的一门学科，内容包括数理逻辑、抽象代数、古典概率、组合学、图论、集合论、数论、自动机和形式语言、可计算性和可判定性、离散几何等。

18 世纪以前，数学基本上是研究离散对象的数量和空间关系的科学，但天文学、物理学的发展，如牛顿三大力学定律等的研究，极大地推动了连续数学的发展。在这段时期内，除了抽象代数外，属于离散数学范围的组合学（包括图论）、数理逻辑等一直处于相对停滞状态。但自从 20 世纪 30 年代起，随着图灵提出计算机的理论模型图灵机，并随着电子计算机的迅猛发展，离散数学又重新焕发了青春。

由于电子计算机只能处理离散的或离散化了的数量关系，因此，无论计算机科学本身，还是与计算机科学及其应用密切相关的现代科学研究领域，都面临着如何对离散结构建立相应的数学模型以及将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化等问题。于是离散数学的地位不断攀升，成为了近代数学的一个重要分支。

本书作为离散数学的基本教材，力求把握关键问题并通过精选的大量实例深入浅出地介绍与计算机科学密切相关的前沿课题，既着重于各部分内容之间的紧密联系，又深入探讨各部分内容的概念、理论、算法和实际应用。本书介绍的概念、理论和方法大量地应用在数字电路、编译原理、数据结构、操作系统、数据库系统、算法的分析与设计、人工智能、计算机网络等专业课程中。通过本课程的学习，既可为学生具备扎实的专业理论功底打下坚实的基础，又着重培养学生严谨、规范的科学态度，提高抽象概括能力、逻辑思维能力、归纳构造能力。各章配有大量的习题，为读者迅速掌握有关知识提供有效的帮助。

本书可作为计算机和相关专业的本科生和研究生的教科书，又可作为工程技术人员的参考书。

本书参考了大量有关的文献，文献作者们严谨的科学态度、一丝不苟的求索精神和他们渊博的知识，都使我们在成书过程中获益匪浅，在此我们向有关作者表示诚挚的感谢。

全书共分为 11 章，包括：命题逻辑、谓词逻辑、集合及其运算、二元关系、函数的概念、代数结构、格和布尔代数、图论、树、Petri 网、计数方法和分类原理等。

本书的第 3、4、5、6、7 章和第 11 章主要由王孝喜编写，第 1、2、8、9、10 章主要由邵秀丽编写；此外，马广惠、张玲、刘春华等同志也都对此书有很大的贡献。全书都经过王孝喜、邵秀丽共同讨论并修改完稿。

本书内容一直在南开大学作为教材，但由于作者经验所限，难免会有疏漏和错误之处，恳请读者特别是同行专家给予批评和指正。

作者

于南开大学

目　　录

第 1 章　命 题 逻 辑

1.1　引　　言

逻辑学是一门研究思维形式及思维规律的学科，由于对其研究的方法不同，可分为辨证逻辑、形式逻辑、数理逻辑等.

辨证逻辑是以辨证法认识论的世界观为基础的逻辑学；形式逻辑是对思维形式结构和规律进行研究；数理逻辑是在传统的形式逻辑和数学的基础上发展起来的，以推理为研究对象，用数学方法研究推理中前提和结论之间的形式关系的学科. 数学方法就是建立一套形式符号系统对具体的事物进行抽象，因此，数理逻辑又称为符号逻辑.

数理逻辑的发展

17 世纪，来布尼兹（德）提出了“仿数学”的方法，发展了逻辑的思想，但由于社会条件等原因，直至半个世纪后才得以迅速发展.

1937 年，Godel 给出了“完全性定理的证明”，完善了数理逻辑基础，建立了逻辑演算，到目前已有了公理集合论、证明论、模型论和递归论 4 个分支，作为计算机科学中不可缺少的基础理论之一.

何谓数理逻辑？它是以推理为研究对象，用数学方法研究推理中前提和结论之间的形式关系的科学. 所谓推理就是由一个或几个判断推出一个新的判断的思维形式.

在计算机研究中，数理逻辑是计算机科学的基础，为机器证明、自动程序设计、计算机辅助设计等计算机的应用和理论研究提供了必要的理论基础，熟练掌握将现实生活中的条件转化成逻辑公式，并能作适当的推理，这对程序设计等课程是极有用处的. 本章将介绍数理逻辑中最基本的内容：命题逻辑.

由于逻辑是研究推理的，着重于语句之间的关系，尤其着重于推理过程是否正确，而不是研究某个特定的语句是否正确. 例如，考虑下列语句：

（1）所有计算机专家都会操作计算机；

（2）任何会操作计算机的人都是文学家；

（3）因此，所有的计算机专家都是文学家.

如果单独确定这些语句中的某一句是否正确，逻辑上没有问题. 但是，如果（1）、（2）为真，则可以逻辑推导出“因此，所有的计算机专家都是文学家”也为真.

1.2　命题与命题联结词

逻辑是解决推理方法的学科，中心是推理，其基本要素就是命题，所以称为命题逻辑. 命题是命题逻辑的研究对象，因此，学习命题逻辑前，首先要明确什么是命题及其表示符号和构成要素.

1.2.1 命题的概念

将日常生活中的陈述句符号化为命题，逻辑中的公式是在今后的程序编写等课程中应用数理逻辑知识的重要基础. 但就数理逻辑这门课程本身而言，我们只关心公式之间的关系，而不关心公式所具体指代的命题.

一般地，表达肯定或否定判断的语句，在形式逻辑中均称为命题. 因此，只有确定真假值的陈述句才有可能是命题. 而作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值，真值只能取两个值：真或假. 真值为真的命题称之为真命题，真值为假的命题称之为假命题. 真命题表达的判断正确，假命题表达的判断错误. 任何命题的真值都是惟一的. 判断给定句子是否为命题，应该分两步：首先判定它是否为陈述句，其次判断它是否有惟一的真值.

下面的语句中，判断哪些是命题，哪些不是命题，如果是命题请判断其真假.

（1）能整除 7 的素数只有 1 和 7 本身.

（2）雪是黑的.

（3）对于每一个正整数 n，都存在一个大于 n 的素数.

（4）在宇宙中，地球是惟一有生命的星球.

（5）她多漂亮呀！

语句（1）是具有真值的肯定判断. 对于一个大于 1 的整数 n，如果它只能被 1 和 n 本身整除，则称之为素数. 语句（1）是说 7 是素数的另一种方法. 语句（2）是具有假值的肯定判断，由于雪是白的，因此此判断是错的. 语句（3）是真的，它是存在无穷素数系列的另一种说法，注意命题中的一个不是仅有一个的意思. 语句（4）是真或假之一（但不是既真又假），不过现在没有人知道其是真还是假，但该问题是有真值的，即其真值肯定惟一. 语句（5）既不是真，也不是假（它是感叹句）.

定义 1.2.1 表示真或假的（但不是既真又假）陈述句是命题.

上述语句（1）～（4）是命题，而语句（5）则不是.

命题必须为陈述句，不能为疑问句、祈使句、感叹句等，例如，

下述句子为命题.

（1）3 是有理数.

（2）8 小于 10.

（3）2 是素数.

下列句子不是命题.

（1）这个小男孩多勇敢啊！

（2）乌鸦是黑色的吗？

（3）请把门开一开！

下列句子不能判断其真值为真还是为假，所以不是命题.

（1）$x+y>10$

（2）我正在撒谎.

能判断真假，并不意味着现在就能确定其是真还是假，只要它具有能够惟一确定的真值. 此外，至于一个陈述句能否分辨真假，与人们是否知道它的真假是两回事情. 例如，下

述陈述句都是命题.

（1）明天晚上下雪.

（2）地球外的星球上存在生物.

（3）明天上午，小李去商场购物.

（4）哥德巴赫猜想是正确的.

对于上述这些句子，虽然不能马上分辨真假，但是句子本身确实有真值的，只要调查一下或者到时验证一下就可以了.

例 1.2.1　判断下列句子是否为命题.

（1）数 1/3 是个自然数.

（2）3 是奇数.

（3）$3-x=5$.

（4）月球上有冰.

（5）2006 年十月一日是晴天.

（6）你大二了吗？

（7）请不要吸烟！

（8）明天多美好呀！

（9）我正在说假话.

（10）如果明天天气好，我就去公园散步.

解　本题的几个句子中，（6）是疑问句，（7）是祈使句，（8）是感叹句，因而这 3 个句子都不是命题. 其他 6 个句子都是陈述句，其中（3）是陈述句，但其真假随 x 的变化而变化，根据 x 的不同取值情况它可真可假，即无惟一的真值，因而（3）不是命题. 至于语句（9）既不是真，也不是假（无法判断）. 假设其真值为真，即“我正在说假话”为真，则说明这个讲话人说的话是假的，也就表示这个讲话人“正在说真话”，则由此推出（9）的真值应为假；反之，若（9）的真值为假，即“我正在说假话”为假，也就是“我正在说假话”，则又推出（9）的真值应为真. 于是（9）既不为真又不为假，因此（9）不是命题. 像（9）这样由真推出假，又由假推出真的陈述句称为悖论（或者称为“自指谓”语句），即自相矛盾的句子（从真假两个方面都会引出自相矛盾的结论）. 凡是悖论都不是命题. 一般来说，命题是一个陈述语句（而不是悖伦的句子）.

经过分析，（1），（2），（4），（5），（10）都是命题. （1）为假命题，（2）为真命题. 虽然现在还不能知道（4），（5）的真值情况，但它们的真值是客观存在的，而且是惟一的，将来某时刻总会知道（4）的真值，到 2006 年十月一日时（5）的真值就真相大白了. （10）是复合命题.

应该注意，一个陈述句能否分辨真假，和人们是否早已知道它的真假值，是不同的. 例如对于命题“李宏去过上海”，有可能我们不能分辨其真假，但该句子肯定是有真值的，只要调查一下李宏本人就清楚其真假了，所以命题“李宏去过上海”的真值是确定的.

因此，判断一个句子是否是命题，从语法上就是看它是否是陈述句，但这里说的陈述句不包括“悖论”的语句.

1.2.2 命题标识符和命题分类

称日常生活中使用的语言为自然语言. 若用自然语言表达，陈述真理和规则，不够确切. 在数理逻辑中，一般使用大写英文字母 A，B，…，R，S，…，Z 等表示命题. 例如，

P：天津有一条美丽的津河.

A：张宏是三好生.

定义 1.2.2 表示命题的符号称为命题标识符，如上例中的 P，A.

如果一个命题标识符是表示确定值的命题，就称之为命题常量；如果用命题标识符来表示任意命题，就称之为命题变元. 因为命题变元可以表示任意命题，所以它无确定的真值，因此命题变元不是命题. 当命题变元 P 表示特定命题时，P 就有了确定的真值，也即对 P 进行了真值指派. 当命题变元表示原子命题时，称该变元为原子变元.

命题有两种类型，第 1 种类型是不能分解为更简单的陈述句的原子命题；第 2 种类型是由命题和联结词构成的命题，称为复合命题. 构成复合命题的可以是原子命题，也可以是另一个复合命题.

定义 1.2.3 只包含一个主语、谓语的陈述句称为原子命题.

定义 1.2.4 由联结词和原子命题复合而成的新命题称为复合命题.

例 1.2.2 复合命题 P：我去逛商场，或者我去打篮球.

其中的原子命题有“我去逛商场”和“我去打篮球”，联结词是“或者”；复合命题的真值的“真”或者“假”，与原子命题的真值和联结词有关. 例如对于该例，如果“我去逛商场”和“我去打篮球”有一个为真，则复合命题 P 为真，否则为假.

例 1.2.3 下列命题

P：2 是素数或者 3 是素数；

Q：如果 2 是素数，则 3 也是素数；

R：2 是素数当且仅当 3 也是素数.

例题中的 P，Q，R 都是复合命题，它们是通过诸如“或”、“如果……，则……”等连词联结而成的. 一个复合命题的真值不仅与构成复合命题的命题的真值有关，而且也与所用联结词有关. 下面将会给出几个基本的联结词.

1.2.3 命题联结词

在命题逻辑中，一般命题都是复合命题. 而复合命题都是由联结词和原子命题构成，其中联结词是构成复合命题的关键. 联结词是自然语言中各种连词的逻辑抽象. 下面先介绍 5 个常用的联结词.

1. 否定词 $\neg$

例 1.2.4 “$\sqrt{2}$ 不是有理数”是“$\sqrt{2}$ 是有理数”的否定.

定义 1.2.5 设 P 是命题，“$\neg P$”（P 的否定）称为 P 的否定命题，读作非 P，符号“$\neg$”为否定联结词，是一个一元运算符，相当于自然语言中的“非”、“不”、“没有”等，并规定 $\neg P$ 为真当且仅当 P 为假.

真值情况由表 1-1 定义.

表 1-1

P	$\neg P$
T	F
F	T

例 1.2.5　设 P：今天天气好；则$\neg P$：今天天气不好.

设 P：$5+2>1$；则$\neg P$：$5+2\leqslant 1$；在此情形下，P 为真，$\neg P$ 为假.

设 P："Today is Friday" 则$\neg P$ 为："Today is not Friday. "

设 Q：这些都是学生. 则$\neg Q$ 为：这些不都是学生.

2. 合取式和合取联结词

定义 1.2.6　设 P，Q 都为任意命题，$P\wedge Q$ 称为 P 和 Q 的合取复合命题. 读作"P 且 Q"，符号"∧"称作合取联结词.

联结词"∧"，对应自然语言中的"与"、"并且"、"既…又…"、"不但…而且…"、"虽然…但是…"等的逻辑抽象.

复合命题 $P\wedge Q$ 的值由 P 和 Q 的真值来确定，如表 1-2 所示，当且仅当 P 与 Q 同时为真时，$P\wedge Q$ 为真；在其他情况下，$P\wedge Q$ 的真值都为假.

表 1-2

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例 1.2.6　设 P：今天下雨，Q：明天下雨，则它们的合取可以解释为下面几种情况，但表示的含义是一样的.

$P\wedge Q$：今天下雨而且明天下雨；

$P\wedge Q$：今天和明天都下雨；

$P\wedge Q$：这两天都下雨；

显然，只有当"今天下雨"和"明天下雨"都为真时，它们的合取 $P\wedge Q$ 才是真的.

例 1.2.7　设 P：今天离散数学课有人迟到，Q：$3+2>4$.

则 $Q\wedge P$：今天离散数学课有人迟到且 $3+2>4$.

说明：

（1）合取的概念和自然语言中"与"的意义相同，但并不等同. 例如，"P 表示：现在下雪，Q 表示：$3<5$"；则 $P\wedge Q$ 表示：现在下雪并且 $3<5$.

此时的 $P\wedge Q$ 就是用逻辑联结词联结了两个日常生活中内容上无关的命题. 在自然语

言中，因为本题目中的 P 与 Q 没有内在的联系，所以命题 $P \wedge Q$ 没有意义；但在数理逻辑中，它仍可成为一个新命题，而且其值依赖于 P，Q 的真值.

例 1.2.8 P：4 是偶数. Q：3 是素数. 则：$P \wedge Q$：4 是偶数且 3 是素数. 其真值为 1.

（2）联结词“$\wedge$”具有对称性，即 $P \wedge Q$ 与 $Q \wedge P$ 的真值相同.

（3）“$\wedge$”可以把两个互为否定的命题联结在一起，其值永为假. 例如，$3>5 \wedge 3<5$.

（4）“$\wedge$”可将若干个命题联结在一起.

例 1.2.9 $3>5 \wedge 5<8 \wedge$ 今天上机实习 $\wedge$ 现在下雪.

（5）“$\wedge$”是一个二元运算符. 因此 $P \wedge \wedge Q$ 是错误的符号串.

3. 析取式和析取联结词

定义 1.2.7 设 P 和 Q 都为任意命题，$P \vee Q$ 称为 P 和 Q 的析取复合命题. 读作“P 或 Q”，或读作“P 和 Q 的析取”，其中的“$\vee$”称作析取联结词. $P \vee Q$ 的真值由表 1-3 确定. 当且仅当 P、Q 的值全为假时，$P \wedge Q$ 的值为假；否则，P 和 Q 中至少有一个为真，则 $P \vee Q$ 为真.

表 1-3

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

自然语言中的“或”既可能具有相容性，也可能具有排斥性. 命题逻辑中只采用了“或”的相容性. 即析取 $P \vee Q$ 中的或是可兼或. 对于语言中的不可兼或，也称异或，在数理逻辑中作为特殊联结词.

例 1.2.10 设 P：今天下雨，Q：明天下雨；则 $Q \vee P$：今天下雨或者明天下雨.

例 1.2.11 设 P：今天离散数学课有人迟到，Q：$3+2>4$；则 $Q \vee P$：今天离散数学课有人迟到或者 $3+2>4$.

说明：

（1）联结词“$\vee$”表示自然语言中的“或”、“或者”的逻辑抽象，但不等同于自然语言中的“或”的意义！（汉语中的“或”可表示“排斥或”或可表示“可兼或”），析取复合命题中的“$\vee$”只表示“可兼或”！例如下面的两个例子表示“排斥或”.

例 1.2.12 张三明天要么去北京，要么去上海.

解释：张三不可能又去北京，又去上海，所以不能用 $\vee$ 表示.

例 1.2.13 今天晚上张三或者在家看电视，或者去剧场看电影.

由于，张三不能又在家看电视，又去剧场看电影，所以这里的“或”属于排斥或，不能用“$\vee$”表示. 以后会介绍用另一联结词“异或”来表示这种情况.

例 1.2.14 “去书店需要走 10 分钟或 8 分钟”的“或”表示近似数，不能用 $\vee$ 表示.

（2）例如下面的两个例子表示“可兼或”，可以用 $P \vee Q$ 表示.

例 1.2.15　$a>9$ 或者 $b<7$.

解　设 P：$a>9$，Q：$b<7$，则原命题符号化为：$P \vee Q$.

例 1.2.16　我通过了英语考试，或我没有通过数学考试.

解　设 P：我通过了英语考试，Q：我没有通过数学考试，

则原命题符号化为：$P \vee Q$.

（3）“$\vee$”的真值情况的判断.

例 1.2.17　若 P：今天上机实习，Q：明天上机实习. 则 $P \vee Q$：今天或者明天上机实习.

解　设本题默认主语为我们.

可见，当 P，Q 都为假时，$P \vee Q$ 才为假，否则为真.

（4）“$\vee$”可以将若干毫无内在联系的命题可以用析取联结词联为一个新的命题.

例 1.2.18　P：现在下雪，Q：$3<5$.

则：$P \vee Q$：现在下雪或者 $3<5$.

（5）联结词“$\vee$”具有对称性，即 $P \vee Q$ 与 $Q \vee P$ 真值相同.

（6）“$\vee$”可将毫无联系的若干个命题联结在一起.

例 1.2.19　$9>5 \vee 5<8 \vee$ 今天上机实习 $\vee$ 现在下雪.

（7）“$\vee$”是一个二元运算符.

4. 条件式和条件联结词

定义 1.2.8　设 P 和 Q 都为任意命题，$P \to Q$ 称为 P 和 Q 的条件式复合命题，读作“如果 P，则 Q”或者“若 P 则 Q”. 其中：称 P 为“$P \to Q$”的前件或前提，Q 称为“$P \to Q$”的后件或者结论. “$\to$”称作条件联结词. “$P \to Q$”的真值由 P、Q 的真值表确定. 当 P 为真（T），Q 为假（F）时，$P \to Q$ 为假（F）；否则为真（T），如表 1-4 所示.

表 1-4

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

联结词“$\to$”不具有对称性（即 $P \to Q$ 与 $Q \to P$ 不等价），对应自然语言中的“如果…，则…”等逻辑抽象. 在自然语言中，“如果…”与“那么…”之间常常有因果联系，否则就没有意义，但对条件命题 $P \to Q$ 来说，只要 P，Q 能够分别确定其真值，$P \to Q$ 就是命题. 而且在命题逻辑中，当前题 P 为 F 时，一定会有 $P \to Q$ 的真值为 T，这种情况被称为命题逻辑中的“善意推断”.

下面说明一下该联结词的使用注意的事项：

（1）对应自然语言中的“如果…则…”、“如果…那么…”，如果 P，Q 能分别确定其真值，则 $P\to Q$ 是命题.

例 1.2.20 令 P：$1>2$，Q：$4<8$，讨论 $P\to Q$ 和 $Q\to P$ 的真值情况.

则 P 为假，Q 为真，因此 $P\to Q$ 为真，而 $Q\to P$ 为假.

（2）$\to$是二元关系；

（3）真值情况的判断：

例 1.2.21 设 P：$2+2=5$，Q：李三是英国国王. 则分析 $P\to Q$ 的真值情况.

解 $P\to Q$ 是 T（$\because$ P 是 F）.

例 1.2.22 分析命题：“如果李四是北京人，则李四是中国人”的真值情况.

解 设 P 表示：李四是北京人；Q 表示：李四是中国人.

按照 P 与 Q 的不同取值，共分 4 种情况进行原命题的真值情况的讨论如下：

（1）如果“李四是北京人，李四是中国人”皆为真.

即：P 为真，Q 为真，则 $P\to Q$ 为真.

（2）如果“李四是北京人，李四不是中国人”皆为真，显然 $P\to Q$ 为假.

即：若 P 为真，$\neg Q$ 为真，则 Q 为假，故 $P\to Q$ 为假.

（3）如果“李四不是北京人，李四是中国人”皆为真，（注：中文理解可能为真）.

即：若 P 为假，Q 为真，则 $P\to Q$ 为真.

（4）如果“李四不是北京人，李四不是中国人”皆为真（注：中文理解可能为真）.

即：若 P 为假，Q 为假，则 $P\to Q$ 为真.

在自然语言中，条件命题的假设和结论一般是有关的；但在逻辑中，条件命题的假设和结论并不需要和同一个主题有关. 例如，在逻辑中，允许下面的命题成立.

如果 $5<3$，则李四是美国总统.

由于，命题逻辑只关心命题的形式和命题之间的相互关系，而不是主题本身（事实上，由于上面的命题的前提为假，所以命题为真. 可见一个条件为真的命题和一个结论为真的条件命题是不同的概念）.

例 1.2.23 将各条件命题符号化.

（1）如 $1<2$，则 $3<6$.

解 设 P：$1<2$，Q：$3<6$.

则上述语句可描述为符号形式：$P\to Q$，由于 P，Q 都为真，所以原语句为真，即 $P\to Q$ 为真.

（2）仅当你走，我留下.

解 设 P：仅当你走，Q：我留下.

则上述语句符号化为：$P\to Q$.

例 1.2.24 符号化下列命题：

（1）只要天下雨，我就回家.

（2）只有天下雨，我才回家.

（3）除非天下雨，否则我不回家.

（4）仅当天下雨，我才回家.