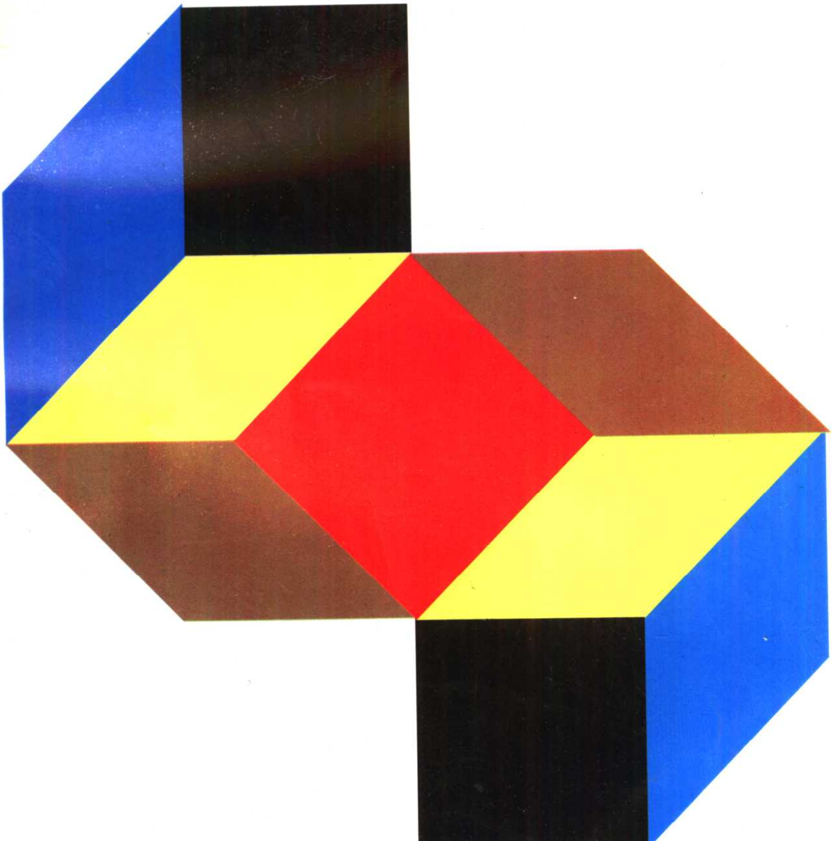
数学小丛书
智慧之花
(5)

登山·赝币·红绿灯

丁石孙　主编



北京大学出版社

数学小丛书——智慧之花

（5）

登山·赝币·红绿灯

丁石孙　主编

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

登山·赝币·红绿灯/丁石孙主编.--北京:北京大学出版社,1997.10

(数学小丛书——智慧之花;5)

ISBN 7-301-03404-0

Ⅰ. 登… Ⅱ. 丁… Ⅲ. 数学-普及读物 Ⅳ. 01-49

书　　名：登山·赝币·红绿灯

著作责任者：丁石孙　主编

责 任 编 辑：王　艳

标 准 书 号：ISBN 7-301-03404-0/O·394

出　版　者：北京大学出版社

地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

电　　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032

排　印　者：北京大学印刷厂

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

787mm×1092mm　32 开本　7.75 印张　170 千字

1997 年 10 月第一版　1997 年 10 月第一次印刷

印　　　数：0 001—3 000 册

定　　　价：10.50 元

写在前面的话

在一个人所受的基础教育中，数学一直是占着一个特殊地位的，它占用的时间可以说是最多的. 也许因为这已是历史上长期以来形成的事实，所以很少有人去作说明，即使有的学生并不喜欢数学，也鼓不起勇气去问个为什么.

数学由于其特殊的形式，给人的印象常常是：一批口诀，一堆公式以及一串定理，但它们在解决生活及其他学科的问题时又是很有用的，于是多数人就硬着头皮按老师教的学下去. 这样的理解至多对了一半，因为数学还有另一个方面的重要作用，这就是通过对数学知识的介绍，对数学问题的解决，教会人们一种重要的分析问题，解决问题的思想方法. 简单地讲，数学要教会人如何进行逻辑推理，如何进行正确的抽象思维，如何在纷繁的事物中抓住主要的联系，并如何使用明确的概念，等等.

要正确发挥数学课程的教育功能，除去需要教师与学生的积极努力以外，也还需要找到适当的辅助材料和恰当的方法. 我们选编这套《数学小丛书——智慧之花》就是为了从这个方面为数学老师（主要是中学的老师）和大学生提供一点帮助，有一部分也可以用作中学生的课外读物.

我们并不认为目前的数学教学大纲的内容太少，太浅，因而要增加或加深教学内容. 我们更不想给学生增加习题量以应付考试. 恰恰相反，我们认为再向这个方向发展将会造成极大的危害. 通过我们选择的这些小文章，我们希望能帮助读者

对数学有更全面的了解,使大家发现数学不只是“定义、定理、公式、证明”的刻板叙述,而是生动活泼、引人入胜的思维训练. 在这里,读者可以看到如何对各种各样的问题进行精细的分析,又如何逐步把复杂的问题理出头绪,最后给出清晰的答案. 总之,我们希望通过千姿百态的分析与讨论帮助读者了解什么是大家应该从数学学习中学到的思想方法.

我们的目标是这样,但能否达到还有待于实践的检验. 读者读过这些书之后的印象与收获将作出评判. 我们希望大家多提批评意见,帮助我们不断改进我们的工作.

丁石孙

1989 年 2 月

出 版 说 明

现代数学，这个最令人惊叹的智力创造，已经使人类心灵的眼光越过无限的时间，使人类心灵的手延伸到了无边无际的空间.

——N. M. Butler

数学方法渗透进并支配着一切自然科学的“理论”分支. 在现代经验科学中，它已越来越成为衡量成就的主要标准.

——J. von Neumann

参与开发一般智力——不是为了今后某一职业的特定需要，应看成是数学教育的基本目标.

——F. Reidt

别把数学想像得那么困难和艰涩，并认为它排斥常识，数学仅仅是常识的一种微妙的形式.

——L. Kelvin

这些著名学者的话表达了我们出版《数学小丛书——智慧之花》的想法和努力的目标.

本丛书的主要对象是：中学数学教师、数学各专业的低年级大学生、部分高中学生以及数学爱好者. 所选内容力求生动、有趣，在开始阶段以翻译为主，一年 2～3 册.

我们希望本丛书能为活跃与推动中学与大学低年级的数学教学、提高中学教师和大学生的数学素质、更好地沟通中学数学与大学数学以及普及数学知识，做一点有益的工作.

我们水平有限，希望大家多提意见，为了让我们的小花开放得绚丽多姿而共同努力！

《数学小丛书——智慧之花》编委会

1989 年 2 月

目　　录

锁、钥匙和投票表决①

Donald　McCarthy

下列组合问题出现在 A. M. Yaglom 和 I. M. Yaglom 的名著《具有初等解法的挑战性数学问题》[4]中，并且是组合学的主要教材之一，C. L. liu 的《组合学引论》[1]中的一例.

> 在秘密发射场工作的 11 位科学家组成一组，他们的资料要锁在保险柜中. 只有该组的多数人在场时，保险柜才能打开. 因此保险柜上锁着许多把不同的锁，每位科学家持有这些锁的一些钥匙. 问总共应需要多少把不同的锁，以及每位科学家要有多少把不同的钥匙.

这个趣味问题的答案是总共需要 462 把锁，以及每位科学家必须要有 252 把钥匙. 这两个数字的含义是 $462=\binom{11}{5}$ 和 $252=\binom{10}{5}$. 该问题的解法出现在[4]中. 它的一般提法是："若有 n 位科学家，并且要求至少有 m 位科学家同时在场时，保险柜才能打开. 那么保险柜上锁的最小数是 $\binom{n}{m-1}$，以及每位科学家持有钥匙的最小数是 $\binom{n-1}{m-1}$. 这也就表明，这种保险柜的装钥系统是不实用的，因为即使当 n 和 m 都不太大时，为打开保险柜所用的时间也要一整天."

---

① 编译自"Locks, Keys and Majority Voting", *Mathematics Magazine* Vol. **52**, No. **3**, May 1979.

在以前的一个班级上，当我讲完这个漂亮的结果时，当场就遭到一位学生的反对. 他说他确信，一定有办法用较少的锁来办到这件事. 虽然他最初的反对只是基于某些主观臆断，然而他所说的竟然是对的！为了使锁的数目减少，曾产生过几种精巧安排锁的设计方案，但都失败了. 可是这种追求终于导致了更为简单的和令人意想不到的关于这个问题的解答，它的答案竟然只需要很少的锁和钥匙. 在讲解这个“实用的”解答之前，我觉得有必要讲一下“不实用的”解答的美妙的推理过程，然后再运用一个实例来让我们理解这其中的缘故. 最后指出，我们的讲法比[1]和[4]的讲法更少形式化.

假定有 n 位科学家组成的小组，至少要有 m 位科学家同时在场时才能打开保险柜(为了去掉毫无意义的情况，我们假定 $1\leqslant m\leqslant n$.). 设 L 是所需的最少的锁数，并设 K 是每位科学家持有的最少的钥匙数. 我们要证明的是 $L=\binom{n}{m-1}$ 和 $K=\binom{n-1}{m-1}$.

设 $\mathscr{L}$ 是符合规定条件的锁的集合，并设 $\mathscr{C}$ 代表 n 位科学家之集 S 中所有 $(m-1)$ 位科学家的子集组成的集合. 我们先证明 $L\geqslant\binom{n}{m-1}$. 假如可以建立从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{L}$ 上的一一的函数 f，这就表明 $|\mathscr{L}|\geqslant|\mathscr{C}|=\binom{n}{m-1}$①. 这个函数 f 可用如下方式获得. 设 $A\in\mathscr{C}$，由于 $|A|<m$，则必定存在一把锁不能被集 A 中的任何人打开. 我们把这把锁取成 $f(A)$. 这就定义了从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{L}$ 上的函数 f. 现在证明 f 是一一的. 设 $A,B\in\mathscr{C}$，

① $|\cdot|$表示集合中元素的个数.

且 $A\neq B$，我们来证 $f(A)\neq f(B)$. 因为 $A\neq B$，$A\cup B$ 就真的包含 A，所以 $|A\cup B|\geqslant m$. 于是保险柜被集 $A\cup B$ 中的人打开. 因为 A 中没有人能打开锁 $f(A)$，于是有一位 $s\in B$，使得 s 能打开锁 $f(A)$，但 s 不能打开锁 $f(B)$，所以 $f(A)\neq f(B)$，即这两把锁不同. 这就完成了 $L\geqslant\binom{n}{m-1}$ 的证明.

下面证明 $K\geqslant\binom{n-1}{m-1}$. 当然，这里需要假定没有一把是"万能"钥匙. 更明确地说，就是每一把钥匙只能打开一把锁. 对于每一位科学家 $s\in S$，设 $\mathscr{K}(s)$ 是成员 s 持有的所有钥匙的集合，而 $\mathscr{C}(s)$ 是集 S 中不含成员 s 的所有 $m-1$ 个人的子集的集合. 像前面那样，只要证明从 $\mathscr{C}(s)$ 到 $\mathscr{K}(s)$ 上存在一一的函数 g 就足够了，于是就获得 $|\mathscr{K}(s)|\geqslant|\mathscr{C}(s)|=\binom{n-1}{m-1}$. 如果 $A\in\mathscr{C}(s)$，那么 $|A\cup\{s\}|=m$，所以保险柜能被 $A\cup\{s\}$ 打开. 这就推知 s 一定持有一把能打开锁 $f(A)$ 的钥匙. 设 $g(A)$ 是这把钥匙. 这就定义了从 $\mathscr{C}(s)$ 到 $\mathscr{K}(s)$ 的函数 g，且容易看出函数 g 是一一的（如果 $g(A)=g(B)$，即这把钥匙能同时打开锁 $f(A)$ 和 $f(B)$，于是推出 $f(A)=f(B)$，所以 $A=B$.）.

到此为止，我们已经证明了 $L\geqslant\binom{n}{m-1}$ 和 $K\geqslant\binom{n-1}{m-1}$. 为了看清等式成立，只需要给出让 $|\mathscr{C}|=\binom{n}{m-1}$ 和 $|\mathscr{K}(s)|=\binom{n-1}{m-1}$ 的锁与钥匙的明确选配的方法即可. 这是很容易做到的. 对于每一个 $A\in\mathscr{C}$，分配给保险柜上一把锁 $L(A)$，并让 S 中 A 的补集的每位成员带有一把能够打开锁 $L(A)$ 的钥匙. 设 $\mathscr{L}$ 就是由这样的锁组成的集合，即对每个 $A\in\mathscr{C}$，对应

着一把锁. 注意到，锁 $L(A)$ 不能被科学家集 B 打开的充分必要条件是 $B\subseteq A$. 由于这个条件要求 $|B|<m$. 我们看出要想使集 B 能打开 $\mathscr{L}$ 中所有的锁，就必须要有 $|B|\geqslant m$. 还可以看到 $\mathscr{L}$ 同集 $\mathscr{C}$ 是一一对应的. 于是我们就给出了让 $|\mathscr{L}|=\binom{n}{m-1}$ 的锁之集的一种安排方式，同时应注意到，对于 $A\in\mathscr{C}(s)$ 的每位科学家来说，都会得到打开锁 A 的钥匙. 所以对每位 $s\in S$，都有 $|\mathscr{K}(s)|=\binom{n-1}{m-1}$. 这就完成了让最小值 K 与 L 实现的证明.

现在给出一种满足问题所要求的条件的安装锁与分派钥匙的方法的实例. 该例总共只要 n 把锁，以及每位科学家手中只要持有一把钥匙即可. 当 $m<n$ 时，这一结果显然与上一段所证明的结果不同，而产生这种不同的准确理由，在看完例子的讲解之后，就会自然明白了.

为了清楚起见，我们要把该例描绘成一个具体的物理方法. 现在把保险柜的门看成一个用大插销关闭着的门. 如果你能让插销向左边滑动至少 m 英寸后，柜门就可以自由地打开，否则柜门就不能打开. 这时安装锁的方式不再是直接把锁挂在保险柜门的钉锦上，而是把锁安放在插销的滑轨上，用这些锁挡住插销，使插销不能向左滑动. 注意，当把一锁打开后，该锁就能从滑轨上取下来；还要注意，当一把锁在滑轨上锁上后，它不能从滑轨上取下来，但却能在滑轨上任意左右滑动. 现在让每把锁的宽度恰为 1 英寸，于是我们知道，当打开 k 把锁，并把它们从滑轨上取下来后，插销就可以向左滑动 k 英寸. 一旦至少有 m 把锁打开，并从滑轨上取下来，插销就至少能向左滑动 m 英寸，于是保险柜的门就能打开. 这样一来，滑

轨上只要安放 n 把锁，而每位科学家只要有能打开一把锁的钥匙(当然每把钥匙只能开一把锁)，问题就解决了. 这种安放锁的方法说明，$L=n$，$K=1$.

这两个数字比上面定理所说的 $L=\binom{n}{m-1}$ 和 $K=\binom{n-1}{m-1}$ 要少得多. 我们自然会问产生这两种答案的根本原因是什么？或者，前面的证明有什么不对头的地方？

这个答案就是，在前面的证明中，正如上述例子所揭示出的那样，我们用到了原始问题所没有的一个隐蔽性假定. 这个隐蔽性假定就是：*要想打开保险柜就必须打开每一把锁. 这个假定正是用来证明函数 f 和 g 是一一对应的关键所在.* 如果在原始问题上增加了这个隐蔽性条件(当然，在整个问题的讨论中总是假定一把钥匙开一把锁)，那么早先的值 $L=\binom{n}{m-1}$ 和 $K=\binom{n-1}{m-1}$ 就是正确的，而去掉这个隐蔽性条件后，新的值 $L=n$ 和 $K=1$ 就是正确的.

一旦揭示出"不实用"定理与"实用"例子之间的不同的理由后，一切都变得自然而简单了. 虽然如此，在课堂上讲解这个例子会向学生们更加深刻地阐明：在原始问题或数学模型上附加隐蔽性条件会使问题发生根本性的不同. 从另一个角度看，就是承认数学的想法与"真实"情况的实际要求之间存在着潜在的不同. 这种揭示的另一个价值在于，使人们认识到力图消除在理论与实用之间的此种不同常常会导致更加深入的数学研究和开辟更广泛的应用范围.

譬如，让我们来考虑滑动插销解法的另一种执行方式. 我们不再使用带有锁的滑动插销，而是希望给保险柜安装一个"智能"门，即是用一台简单计算机控制的门. n 位科学家的每

位只须持有一把能够旋转一个开关的钥匙. n 个开关的位置由计算机监视. 一旦至少有 m 个开关旋转到正确的位置时，计算机的控制程序就让保险柜打开门(作为一种挑战，读者可以自行研究计算机的实施方案，或是为此目的设计出适用的电网络.). 这种实施方案还可以促使人们把原有问题做进一步的延伸，并引导出新的应用. 例如，为了省去科学家为摸出钥匙所花费的时间，让我们设想采用“投票”表决的方法来决定是否打开保险柜. 我们约定：科学家在场，就意味着他投赞成票，不在场就意味他投反对票，如果至少有 m 个人投赞成票，保险柜就能打开，否则保险柜就不能打开. 从这个观点出发，锁和钥匙都成了记录投票状况的机器. 于是原来的锁和钥匙的问题就转化为更加抽象的**投票表决问题**.

假定总共有 n 个人，让他们从 k 种事物 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 之中通过投票表决方式做出选择. 当 $k=2$ 时，我们可以把这时的投票表决描绘成用小球数来做投票结果的记录方式. 如果你赞成 A_1，你就放入一个小球，如果你赞成 A_2，你就不放入小球. 当收到至少 m 个小球时，判 A_1 赢，否则就判 A_2 赢. 注意，对于 $A_i, i=1,2$ 来说，其获胜的准则一般是不同的. 在许多情况下，人们要研究具有同等获胜准则的情况，也就是把同一准则同等地运用到所有的 $A_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ 上. 当 $k=2$ 时，这个同等的条件就是我们例子中 $m=[n/2]$[①]的情况. 这时获胜的一方也就是收到多数选票的一方，注意这时弃权者被认为是投了另一方的票. 在有着弃权者打折扣的情况下，我们可以宣布获胜的一方就是收到多数票的一方. 这种方法显然是对 A_1 和 A_2 同等的准则，且可以用于 $k \geqslant 2$ 的情况，即就是谁得票最

---

① $[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.

多谁赢. 然而在 $k>2$ 的情况，这种方法也有其不足之处. 虽然获胜的一方可以被认为是综合地反映了投票者的心愿，但是投票者之中的相当大的多数人可能会是强烈地反对胜方. 但是，这种不足之处并不单是限于这种特定的投票选择方式，而是在多方的社会选择理论中所产生的根深蒂固的问题.

这个问题就是，对于已经排好顺序的各方 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，请您给出一种令人满意的投票选择方法. 对此我们有一个著名的 Kenneth Arrow（诺贝尔经济奖获得者）定理：当 $k>2$ 时，如果有一个明确的完全合理的条件存在，那么就不存在令人满意的选择方法.

关于社会选择（即熟知的选择理论）的论题的极好的介绍，请读者参看[2]的第十章和[3]的第七章. [3]中的关于 Arrow 不存在定理（7.2.2）的讨论是目前为止最好的，它提供了许多很好的实例表明：当理论的结论与实际要求相反或不一致时就能引发出进一步的数学研究工作.

（杨燕昌编译，潘承彪校）

参 考 文 献

[1] C. L. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1968.

[2] J. Malkevitch and W. Meyer, Graphs, Models and Finite Mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974.

[3] F. S. Roberts, Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological and Environmental Problems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

[4] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom, Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol. 1, Holden-Day, San Francisco, 1964.