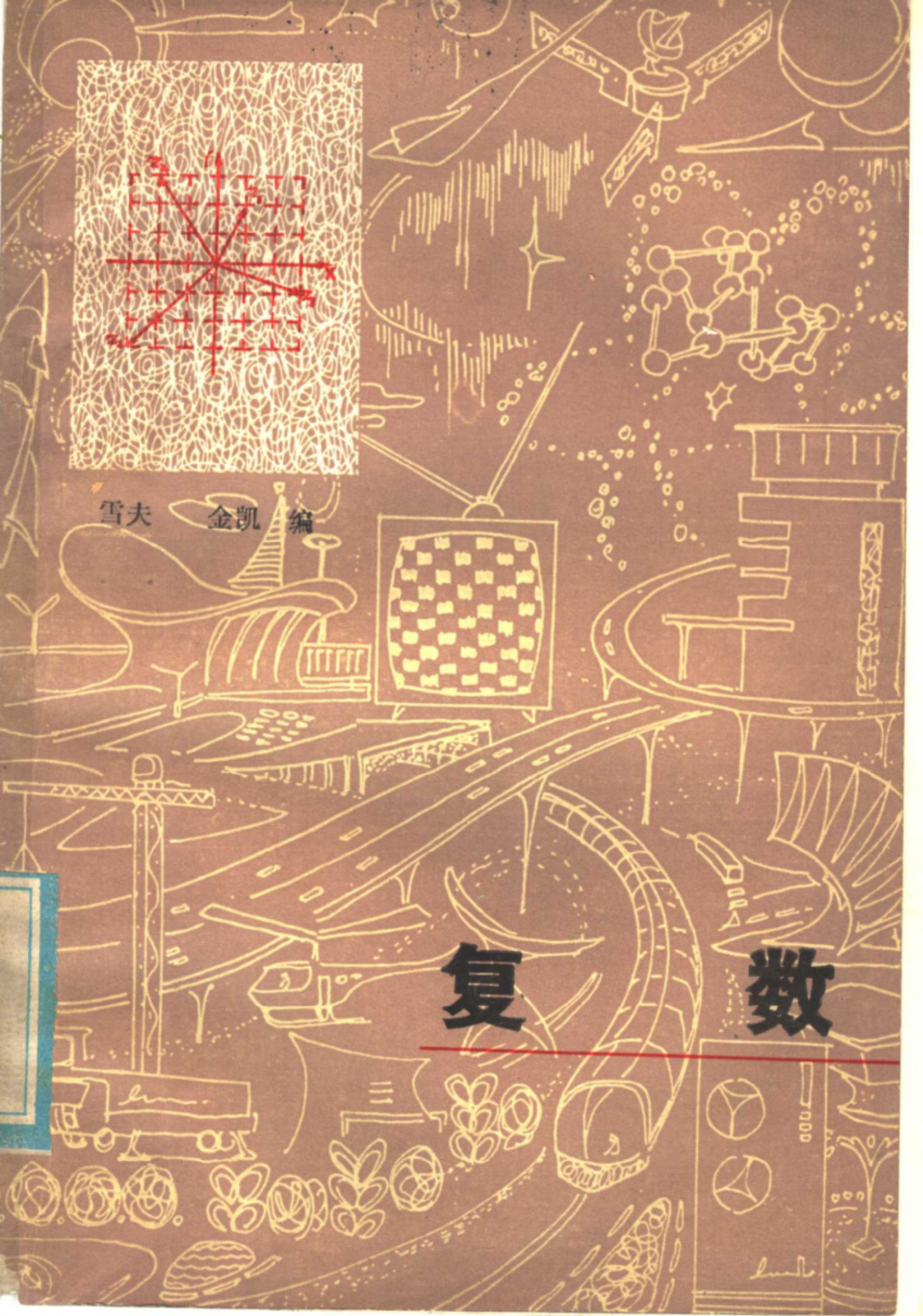

雪夫　金凯　编

复　数

复　　数

雪夫　金凯　编

黑龙江人民出版社

1980年·哈尔滨

复　　数

雪夫　金凯　编

黑龙江人民出版社出版

（哈尔滨市道里森林街 14—5 号）

肇东印刷厂印刷　　黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092 毫米 1/32・印张 6・字数 130,000

1980 年 7 月第 1 版　　1980 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—71,000

统一书号：13093・32　　定价：0.43 元

出 版 说 明

为加速实现四个现代化，迅速培养和造就大批又红又专的建设人材的需要，我们将陆续出版一套《中学生课外读物》。

这套读物包括数学、物理、化学、语文、历史、地理等基础知识和典型题解答几十种。这本《复数》就是其中的一种。

本书以全国统编中学数学教学大纲为基础，适当扩大了知识范围，按照复数的产生、复数的概念、复数的几何表示、复数的表示式、复数的运算等部分，全面系统地讲述了复数的基础知识和运算法则。为了进一步引导读者去了解复数在自然科学和技术领域里的广泛应用，书中还介绍了复数在解决有关代数学、几何学、三角学、物理学等方面的某些实际问题的基础理论和典型例题。

本书可供中学生、知识青年自学之用，也可供中学数学教师参考。

目　　录

一　复数的产生

1. 实数的拙阻

在历史的长河中，数的概念每经过一次扩展，都是为了适应人类生产斗争的实际需要而被提出来的。

人类在最初阶段，由于计数和测量的需要而产生了正整数(自然数)。随着人类社会的发展，正整数满足不了表记测量结果的需要，便产生了正分数。为了表示相反意义的量，引进了负整数和负分数。正负整数、正负分数和零，统称为有理数。随着生产斗争的不断发展，人类要求对诸如$\sqrt{2}$、π这类数进行研究，于是又引进了无理数。有理数和无理数统称为实数。

在实数集合内，数的系统可列成下表：

- 实数
  - 有理数
    - 正有理数
      - 正整数（自然数）
      - 正分数
    - 零
    - 负有理数
      - 负整数
      - 负分数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

数的概念扩展到实数以后，对于生产斗争中经常遇到的有关运用四则运算（加、减、乘、除）和正数开方运算求值的大量实际问题，都得到了解决。这在数学史上，曾是一次较大的飞跃。

但随着生产斗争的不断深入发展，所遇到的有关涉及负数开方运算的一类问题，却使实数无法给予解决。

例如：一架飞机在空中作垂直于地面的圆周飞行表演，已知半径长为1公里，圆心到地面距离为2公里；这时，在距离圆心到地面垂足A点4公里的B点处有一望远镜，如果按45°的仰角，在飞机飞行的平面内向高空望去（图1），问能否看到飞机的表演？

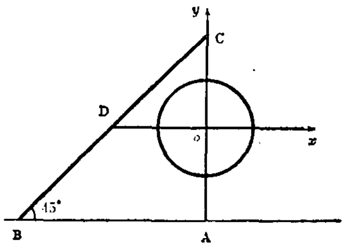

图 1

解答这个问题，实质上是求望远镜的视线BC与飞机的飞行轨道$\odot O$有无交点。如果有交点（不论是一个交点，还是两个交点），则望远镜就能看到飞机的表演；如果没有交点（BC远离$\odot O$），则望远镜就看不到飞机的表演。

建立直角坐标系：取点O为坐标原点，水平直线为x轴，垂直地面的直线为y轴。

因为$\angle B=45°$，B点坐标为$(-4,-2)$，所以，根据点斜式得到直线BC的方程为$y=x+2$；而飞机的轨道方程为$x^2+y^2=1$，这样，得到下面的方程组：

$$\begin{cases}x^2+y^2=1, & (1)\\ y=x+2. & (2)\end{cases}$$

将(2)代入(1)，得

$$2x^2+4x+3=0. \qquad (3)$$

对于一元二次方程(3)，因为判别式

$$\Delta=4^2-4\times2\times3=-8<0,$$

所以直线$y=x+2$与圆$x^2+y^2=1$无交点。从而得知，如果

望远镜按45°的仰角，在飞机飞行的平面内向高空望去，是看不到飞机表演的。

这个问题虽然得到了回答，但由于$\Delta<0$，方程(3)在实数集合内已经没有意义了。因负数在实数集合内不能开平方，则使方程(3)在实数集合内不可解。由于实数受到抽阻，在实际的生产斗争中就需要把数的概念再做进一步的扩展。

2. 虚数的引入

人类对负数开平方的认识（从提出问题到解决问题），曾经历过漫长的岁月，这中间至少经历了二百多年的时间。

早在1545年，意大利米兰城的卡尔丹①，在求解三次方程时，就产生了负数开平方的思想，他把40写成$5+\sqrt{-15}$与$5-\sqrt{-15}$的乘积形式。但他在当时并不理解这种表示法的深刻意义，特别对负数开平方后是否还是一个数的问题抱有怀疑态度。这在以后相当长的时间里，一直不被人们所认识，就连一些大数学家也是如此。十七世纪著名的法国数学家笛卡儿②，竟把负数的开平方说成是“不可思议的”。十八世纪著名的数学家莱布尼兹③，仍然把它看作是“神灵美妙与惊奇的避难所，它几乎是又存在又不存在的两栖物”。当然，

---

① 卡尔丹(Hieronimo Cardana, 1501—1576)，意大利数学家，对物理学、医学、哲学、占卜术等也有很多著述。1562年到1570年，为波伦亚大学教授，是当时第一流的代数学者。

② 笛卡儿 (Rene' Descartes, 1596—1650)，法国数学家、物理学家、哲学家、生理学家。解析几何的创始人。

③ 莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716)，德国自然科学家、数学家、唯心主义哲学家。同牛顿并称为微积分的创始人。数理逻辑的前驱者。改进了帕斯卡的加法器，设计并制造了一种手摇的演算机。提出了他认为是和中国“先天八卦”相吻合的二进位制，影响到后代计算技术的发展。

这些糊涂观念的存在，是受到当时历史条件的限制，关键在于没有条件能够寻找到负数开平方后在现实世界中的模型。

负数开平方究竟有没有实际意义，这一问题直到十八世纪中叶后才得到逐步认识。1747年，法国的著名数学家达朗贝尔①作了具有推动数学发展作用的研究工作，他指出，如果按照多项式的四则运算规则对任何负数开平方的数进行运算，那么它的结果总可以写成$a+b\sqrt{-1}$的形式（其中a、b均为实数）。这实际是在实数基础上又引进一个新的数，这个数平方后等于负数。这个新引进来的数（平方后为负数），称为**虚数**。后来人们用符号i代表$\sqrt{-1}$，这样任何一个新的数都可以写成$a+bi$（其中$i=\sqrt{-1}$）的形式。

"虚数"这个名词，早在1637年由笛卡儿提出；1873年由我国清代数学家华蘅芳②在他翻译的《代数术》一书中开始采用。它的原意是"虚假的数"或"想象当中的、实际并不存在的数"的意思。由此可见，"虚数"一词还残留着人们长达数百年之久的认识过程中的痕迹。因为虚数是从求解方程的实践过程中产生的，所以虚数并不虚，它也同其他数学概念一样，来源于实践，应用于实践。

由于虚数的引入和关于虚数计算法则的建立，使数的概

① 达朗贝尔（Jean Le Rond d'Alembert, 1717—1783），法国数学家、启蒙思想家、哲学家。对偏微分方程有贡献。提出一个力学的原理，后来被称为达朗贝尔原理。主要著作有《力学原理》、《数学论文集》、《哲学原理》等。

② 华蘅芳（1833—1902），字若汀，江苏人，是我国清代著名数学家和外国自然科学著作翻译家。他的主要数学著作有《抛物浅说》（徐寿作图）、《行素轩算稿》六种二十三卷。他先后与美国人玛高温、金楷理和英国人傅兰雅等人合译了《地学浅释》、《代数术》、《微积溯源》、《三角数理》、《合数术》、《决疑数学》等十余种外国近代数理著作。西方国家的常微分方程、概率论和近代矿务学，都是由他首先翻译成中文介绍到我国的。

念又得到一次扩展．十九世纪，德国数学家高斯① 把这种扩展后的数的概念用“复数”这个名词给出．但关于复数理论的建立，早在 1777 年就由瑞士数学家欧拉② 完成了．他系统地阐述了复数理论，在此基础上又创立了以复数为变数的复变函数理论的一些基本定理，并把这些理论应用到水力学和地图学上．从此以后，复数才被人们正式承认和广泛应用．

练 习 题 一

1. 指出下列方程在什么数的集合里没有解？要使方程有解需要引进怎样的数？

   (1) $3x-2=0$；　　(2) $5x+3=0$；

   (3) $x^2-2=0$；　　(4) $x^2+1=0$。

2. 讨论下列方程 k 为何值时在实数集合里没有解：

   (1) $kx^2-2x+1=0$；

   (2) $x^2+kx+1=0$；

   (3) $3x^2-2x+k=0$。

---

① 高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)，德国数学家、物理学家和天文学家．早期研究数论，成果都收入所著《算术》一书中．对超几何级数、复变函数论、统计数学、椭圆函数论有重大贡献．他的曲面论是近代微分几何的开端．对于非欧几里德几何的研究生前虽未发表，但事实证明他是创始人之一．他建立了最小二乘法，并沿着拉普拉斯的思想方法，继续发展了势论．他对物理学、天文学、测地学等都有很大成就．此外，还有关于向量分析的高斯定理、代数基本定理的证明、正十七边形的作图、关于正态分布的正规曲线、质数定理的验算等研究成果．

② 欧拉 (Leonhard Euler, 1707—1783)，瑞士数学家．变分法的奠基人，复变函数论的先驱者，理论流体动力学的创始人．受学于贝努利家族．在数论和微分方程等方面有重大成就；在力学、天文学和物理学等方面也有很大贡献．所著《无穷小分析引论》对牛顿和莱布尼兹的微积分和富里叶级数的发展起了相当大的推动作用．

二　复数的概念

1. 复数定义

形如 $a+bi$ 的数称为**复数**。其中 a、b 为实数。a 称为复数的**实部**，bi 称为复数的**虚部**，b 称为复数**虚部的系数**，$i=\sqrt{-1}$ 称为**虚数单位**。

复数 $a+bi$ 有下列四种情形：

(1) 当 $a\neq0$，$b\neq0$ 时，则复数表示为 $a+bi$ 的形式；

(2) 当 $a=0$，$b\neq0$ 时，则复数表示为 bi 的形式；

(3) 当 $a\neq0$，$b=0$ 时，则复数即为实数 a；

(4) 当 $a=0$，$b=0$ 时，则复数就是数 0。

根据上述情形，可做如下规定：

形如 $a+bi$ 的复数，称为复数的一般形式。

形如 bi 的复数，称为**纯虚数**。

形如 $a+bi$ 的复数和形如 bi 的复数，均称为**虚数**。

实数和实数的特殊情形——零，可视为复数的特例。

这样，复数 $a+bi$ 按照 a、b 是否为零的情形可分类如下：

- 复数 $(a+bi)$
  - 虚数 $(a+bi,\ b\neq0)$
    - 复数一般形式即非纯虚数 $(a+bi,\ a\neq0,\ b\neq0)$
    - 纯虚数 $(0+bi=bi,\ a=0,\ b\neq0)$
  - 实数 $(a+0i=a,\ b=0)$
    - 不等于零的实数 $(a+0i=a,\ a\neq0,\ b=0)$
    - 零 $(0+0i=0,\ a=0,\ b=0)$

复数定义引进后，数的扩展情况可列表如下：

$$
\begin{array}{c}\text{复 数}\\(a+bi)\end{array}\begin{cases}
\begin{array}{c}\text{实 数}\\(b=0)\end{array}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\left.\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\right\}\begin{array}{l}\text{有限小数和}\\ \text{无限循环小数}\end{array}\end{cases}\\ \text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}\\
\begin{array}{c}\text{虚 数}\\(b\neq 0)\end{array}
\end{cases}
$$

例 1 指出下列复数的实部、虚部和虚部的系数：

（1）$5+8i$；（2）$12-3i$；

（3）$9-i$；（4）$-2+\frac{\sqrt{2}}{2}i$；

（5）$7-\sqrt{3}+i$；（6）$4i$；

（7）$\sqrt{5}$；（8）0。

解 （1）实部为 5，虚部为 $8i$，虚部的系数为 8。

（2）实部为 12，虚部为 $-3i$，虚部的系数为 -3。

（3）实部为 9，虚部为 $-i$，虚部的系数为 -1。

（4）实部为 -2，虚部为$\frac{\sqrt{2}}{2}i$，虚部的系数为$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

（5）实部为 $7-\sqrt{3}$，虚部为 i，虚部的系数为 1。

（6）实部为 0，虚部为 $4i$，虚部的系数为 4。

（7）实部为$\sqrt{5}$，虚部为 $0i$，虚部的系数为 0。

（8）实部为 0，虚部为 $0i$，虚部的系数为 0。

例 2 指出下列复数哪个是虚数，哪个是纯虚数：

（1）$5-\sqrt{3}i$；（2）$3i$；

（3）$-6+i$；（4）$-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

解 $5-\sqrt{3}i$，$3i$，$-6+i$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 都是虚数，

而 $3i$、$-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是纯虚数。

例 3 实数 m 取哪些值时，复数

$$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$$

是：(1) 实数；(2) 纯虚数；(3) 零。

解 (1) 若复数是实数时，则其虚部的系数

$$m^2-5m-6=0.$$

解方程得 $m_1=6$，$m_2=-1$。

由此可知，此复数当 m 为 6 或 -1 时为实数，且此实数为

$$m^2-3m-4=6^2-3\cdot 6-4=14,$$

或 $$m^2-3m-4=(-1)^2-3(-1)-4=0.$$

(2) 若复数是纯虚数时，则其实部

$$m^2-3m-4=0, \tag{1}$$

而虚部系数 $$m^2-5m-6\neq 0. \tag{2}$$

解(1)得 $m_1=4$，$m_2=-1$。

将 $m_2=-1$ 代入虚部系数，得

$$m^2-5m-6=(-1)^2-5(-1)-6=0,$$

与(2)矛盾，应舍去。

所以，此复数当 $m=4$ 时为纯虚数．且此纯虚数为

$$(m^2-5m-6)i=(4^2-5\cdot 4-6)i=-10i.$$

(3) 若复数是零时，则其实部和虚部的系数均为零，即

$$\begin{cases} m^2-3m-4=0; \\ m^2-5m-6=0. \end{cases}$$

解此方程组得，$m=-1$。

由此可知，此复数当 $m=-1$ 时为零。

2. 虚数单位

根据虚数引入的实际意义知道，

$$i=\sqrt{-1}.$$

由此可以规定虚数单位 i 具有下面两条性质：

(1) $i^2=-1$；

(2) i 与实数在一起，可以按照实数的运算法则进行运算。

数的概念从实数扩展到复数后，有关实数的基本运算定律对新的数——复数，仍保持不变，但有些运算性质却有了改变。例如，

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},$$

这个运算在实数里是正确的(必须 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$)；但如果认为

$$i^2=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$$

就错了。在复数里，规定 $i^2=-1$，这对求负数的偶次方根提供了运算条件。

按照这种规定，容易推出虚数单位 i 的乘幂有以下的重要性质：

$$i^1=i;$$

$$i^2=-1;$$

$$i^3=i^2\cdot i=-i;$$

$$i^4=i^3\cdot i=-i^2=1;$$

$$i^5=i^4\cdot i=i;$$

$$i^6=i^4\cdot i^2=-1;$$

$$i^7=i^4\cdot i^3=-i;$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1;$$

……

一般来说，若 n 为整数，则

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1;$$

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = i;$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = -1;$$

$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = -i.$$

这个性质通常称为虚数单位 i 的**周期性**。

例 4 计算：i^{-1}，i^{-2}，i^{-3}，i^{-4}。

解

$$i^{-1} = i^{-4+3} = \frac{i^3}{i^4} = -i;$$

$$i^{-2} = i^{-4+2} = \frac{i^2}{i^4} = -1;$$

$$i^{-3} = i^{-4+1} = \frac{i}{i^4} = i;$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1.$$

例 5 计算：$i^{22} + i^{36} + i^{45} + i^{63}$。

解

$$i^{22} + i^{36} + i^{45} + i^{63}$$

$$= i^{4\cdot 5+2} + i^{4\cdot 9} + i^{4\cdot 11+1} + i^{4\cdot 15+3}$$

$$= (-1) + 1 + i + (-i) = 0.$$

例 6 计算：$i^{k+1} \cdot i^{k+2} \cdot i^{k+3} \cdot i^{k+4}$（$k$ 为整数）。

解

$$i^{k+1} \cdot i^{k+2} \cdot i^{k+3} \cdot i^{k+4}$$

$$= i^{4k+10} = i^{4(k+2)} \cdot i^2 = -1.$$

例 7 解方程 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$。

解

$$x^4 + 3x^2 - 10 = 0,$$

$$(x^2 + 5)(x^2 - 2) = 0,$$