电动力学百问

于洛平　编

山东教育出版社

教师出版基金理事会

编者的话

电动力学是高等院校物理专业理论物理课程中的四大力学之一。它的特点是物理理论较深、数学推演较多，故学生在学习过程中往往沉缅于繁杂的数学演算，而忽视了其物理内涵；常常只注意个别问题的解答，而不能完整地把握其物理思想。为此，结合教学体会编写了本书，旨在回答学生在学习中可能遇到的问题。

本书基本上是按照郭硕鸿教授所著《电动力学》的顺序编写的。全书共分六大部分。其中，每一部分均以思考题的形式提出，然后给予解答，以便于学生阅读。对所提出的问题，尽量用简明扼要的文字加以解答，而避免繁杂的数学演算。对某些问题的论述，尽量引用爱因斯坦、牛顿等物理学家的原作，以让学生了解他们的物理学思想，进而去了解物理学的全貌。

由于作者水平所限，在短短的108问中不可能涵盖电动力学中的思考题，甚至有些重要思考题没有被提出，在思考题的回答上也有欠缺之处，恳请专家和读者给予批评指正。

本书可作为综合性大学和高等师范院校物理专业及相近专业的教学参考书，对于广大的函授生亦有一定的参考价值。

于洛平

1995年7月于山东师范大学

目　录

一、电磁现象的普遍规律

1. 为什么麦克斯韦方程组是关于电场和磁场的二个散度方程和二个旋度方程的组合，而不是其他函数方程？

答：因为电场和磁场都是矢量场，据矢量场的亥姆霍兹定理，一个矢量场被唯一确定下来需要三个条件，即需知道这个矢量场的散度和旋度及这个矢量场的边界条件．其中边界条件是确定特定场的条件，而散度和旋度条件是确定矢量场的一般条件．因此，要研究电场和磁场，首先要知道电场的散度、旋度方程和磁场的散度、旋度方程，故麦克斯韦方程组是关于电场和磁场的二个散度方程和二个旋度方程的组合．

2. 若把一个矢量函数或标量函数看做一个物理场的数学表示式，那么应如何理解它们的散度、旋度和梯度？其图像是什么？若矢量函数为静电场 $\boldsymbol{E}$ 和稳恒电流的磁场 $\boldsymbol{B}$，其散度和旋度的物理图像是什么？

答：一个标量场 $f(x, y, z)$ 的梯度是一个矢量，用 $\mathrm{grad} f(x, y, z)$ 表示，其方向为该标量函数 $f(x, y, z)$ 对距离变化率最大的方向，其模为 $f(x, y, z)$ 在该方向上的方向导数．由此可知，梯度方向总是指向标量函数增加最快的方向．其图像可从两方面去看：

（1）标量函数在给定场点沿任意方向的方向导数，等于该标量函数的梯度在该方向上的投影．

(2) 在任一场点 M，标量函数 $f(x, y, z)$ 的梯度垂直于过该点的等值面，亦即垂直于过 M 点的等值面的切平面(图 1—1)．这样，等值面上任一点的法向单位矢 $\boldsymbol{n}$，都可用该点梯度表示

$$\boldsymbol{n}=\frac{\operatorname{grad} f(x, y, z)}{|\operatorname{grad} f(x, y, z)|}$$

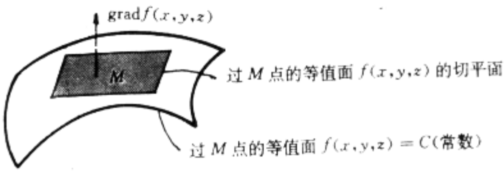


图 1—1

一个矢量场 $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ 的散度是一个标量，用 $\operatorname{div}\boldsymbol{f}(x, y, z)$表示，$\operatorname{div}\boldsymbol{f}(x, y, z)$ 表示在该矢量场中任意一点处，通过包围该点的单位体积的表面的通量．所以 $\operatorname{div}\boldsymbol{f}(x, y, z)$ 又可称为“通量源密度”．这种通量源可用散度的零与非零状态描述，其图像为 (1) 在场点 M 处，若 $\operatorname{div}\boldsymbol{f}(x, y, z)>0$，则该点有发出通量线的源（正源）；若 $\operatorname{div}\boldsymbol{f}(x, y, z)<0$，则该点有吸收通量线的沟（负源）；若 $\operatorname{div}\boldsymbol{f}(x, y, z)=0$，则该点无源（图 1—2）．(2) 若矢量场所有点的散度都等于零，则称该矢量场为无源场（亦称无散场）．

总之，矢量场散度表征了矢量场线的源与非源结构．

一个矢量场 $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ 的旋度是一个矢量，用 $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}(x, y, z)$ 表示．$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}(x, y, z)$ 在场点 M 上任一个方向

$\mathrm{div}\boldsymbol{f}(x,y,z)>0$　　$\mathrm{div}\boldsymbol{f}(x,y,z)<0$　　$\mathrm{div}\boldsymbol{f}(x,y,z)=0$

图 1—2

$\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{n}$ 为该方向单位矢）上的分量，表示在 M 处该矢量场 $\boldsymbol{f}$（x，y，z）沿 $\boldsymbol{n}$ 方向上的环量面密度．$\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$（$x$，$y$，$z$）描述了该矢量场中各点的场与涡旋源的关系，这种关系可用旋度的零与非零状态描述，其图像为（1）在场点 M 处，若 $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$（$x$，$y$，$z$）$\neq 0$，则说明在 M 处矢量场线有涡旋结构，其涡旋中心在 M 处，此涡旋中心即为涡旋源．（2）在场点 M 处，若 $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$（$x$，$y$，$z$）$=0$，则说明在 M 处矢量场线无涡旋结构，场线之间呈平行状态，M 点不是涡旋源．若矢量场中各点旋度处处为零，则这种矢量场不可能有涡旋源，称为无旋场或保守场，在这种场中必定存在势函数（图 1—3）．

$\mathrm{rot}\boldsymbol{f}(x,y,z)\neq 0$　　　　$\mathrm{rot}\boldsymbol{f}(x,y,z)=0$

图 1—3

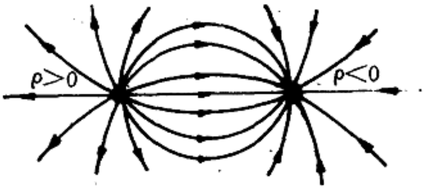
总之，矢量场的旋度表征了矢量场线有无涡旋结构．

静电场 $\boldsymbol{E}$ 是一个矢量场，场方程有稳恒条件下的麦克斯韦方程形式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon},\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

由前一个方程可知，矢量场 $\boldsymbol{E}$ 是有源的，其源在 ρ 处，且 $\boldsymbol{E}$ 线从正 ρ 处发出到负 ρ 处结束，因而场线是有头有尾的非闭合曲线.

由后一个方程可知，矢量场 $\boldsymbol{E}$ 无涡旋源，它是一个无旋场或保守场，其图像如图 1—4 所示.



$\rho>0$ $\rho<0$

图 1—4

稳恒电流磁场 $\boldsymbol{B}$ 是一个矢量场，场方程有稳恒条件下的麦克斯韦方程形式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{j}$$

由前一个方程可知，矢量场 $\boldsymbol{B}$ 是无源场，因而没有发出和吸收场线的源和沟，亦即场线是无头无尾的闭合曲线.

由后一个方程可知，矢量场 $\boldsymbol{B}$ 是有旋场，其场线具有涡旋结构，其涡旋中心即涡旋源在 $\boldsymbol{j}$ 存在处（图 1—5）.

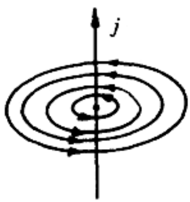


图 1—5

3. 一般矢量场可以分为纵场和横场，纵场和横场的定义分别是什么？

答：旋度为零而散度不为零的矢量场称为纵场，旋度不为零而散度为零的矢量场称为横场.

4. 在真空中，把稳恒电磁场麦克斯韦方程组推演到迅变电磁场麦克斯韦方程组时，修正了哪几个方程？修正的依据是什么？

答：稳恒电磁场麦克斯韦方程组有四个：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$$

其中，$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$和$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$分别表征了电荷激发电场和无磁单极存在，这在迅变情况下也是正确的，因而具有普遍意义，故不修正. 而另外两个旋度方程$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$是在稳恒条件下得到的，不适用于迅变情况，故要加以修正. 修正依据如下：

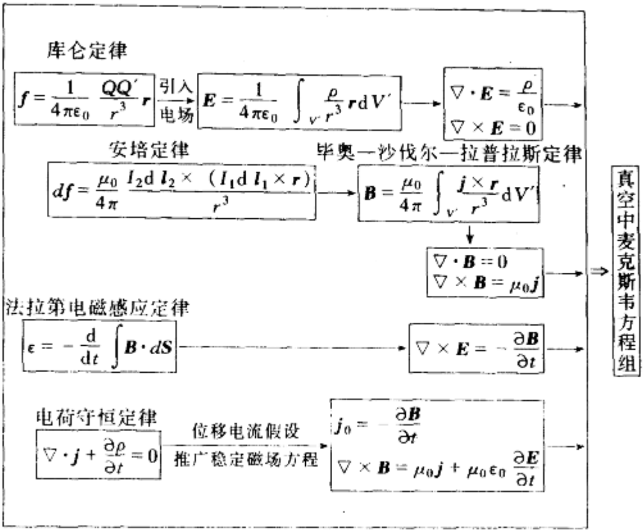
$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$依据法拉第电磁感应定律修正为$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$；

$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$依据电荷守恒定律和位移电流假设修正为$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$.

5. 真空中麦克斯韦方程组主要建立在哪几个实验定律基础上？

答：真空中麦克斯韦方程主要建立在如下实验定律基础上：库仑定律、安培定律、毕奥—沙伐尔—拉普拉斯定律、法

拉第电磁感应定律和电荷守恒定律上，其推演关系如下：



6．为什么要修正真空中麦克斯韦方程组使之适用于介质情况？

答：真空中不存在介质，因而不存在极化和磁化现象．在介质中，由于极化和磁化现象，出现了束缚（极化）电荷、磁化电流和极化电流．而这些束缚电荷、磁化电流和极化电流将产生电场和磁场，从而影响总的电磁场分布，所以在介质中一定要考虑到这些影响因素．又因为这些影响因素具有场源性质，所以对真空中麦克斯韦方程组中涉及到场源的方程做如下修正：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\text{修正为}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho+\rho_P}{\epsilon_0}\xrightarrow{\text{引入}\boldsymbol{D}}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho.$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \text{修正为} \nabla \times \boldsymbol{B}$$
$$= \mu_0\left(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_M + \boldsymbol{j}_p + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \xrightarrow{\text{引入}\boldsymbol{H}} \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

7. 电荷面密度 σ 和电流面密度 $\boldsymbol{\alpha}$ 是怎样定义的？它们所居空间真的是无厚度的吗？

答：所谓面电荷和面电流，并不是分布在一个几何面（没有厚度的数学面）上，而是分布在含有相当多分子的物理薄层内，它们产生的效应是一种平均的宏观效应.

设面电荷分布在一个厚度为 Δh 的薄层内，取一个扁圆柱体积元 ΔV，有 $\Delta V = \Delta h \Delta S$，其中 ΔS 为扁圆柱上下底面面积，此体积元内有电荷 $\Delta Q = \rho \Delta h \Delta S$，可得

$$\frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho \Delta h$$

当 $\Delta h \to 0$，$\rho \to \infty$ 时的极限，就被定义为电荷面密度

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \lim_{\substack{\Delta h \to 0 \\ \rho \to \infty}} \rho \Delta h$$

设面电流分布在一个厚度为 Δh 的薄层内，取一个矩形面积元 $\Delta \boldsymbol{S}$，其法向单位矢为 $\boldsymbol{n}$，有 $\Delta \boldsymbol{S} = \Delta h \Delta l \boldsymbol{n}$，其中 Δl 和 Δh 为矩形面积元的两条边. 此面积元上通过电流为 $\Delta I = \Delta h \Delta l \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j}$，可得

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\Delta I}{\Delta l}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} = \Delta h \boldsymbol{j}$. 当 $\Delta h \to 0$，$\boldsymbol{j} \to \infty$ 时的极限，就被定义为电流面密度

$$\boldsymbol{\alpha} = \lim_{\substack{\Delta h \to 0 \\ j \to \infty}} \Delta h \boldsymbol{j}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 方向为 $\boldsymbol{j}$ 方向，由 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{n} = \dfrac{\Delta I}{\Delta l}$ 可知，其大小为垂直通过单位长

度的表面薄层横截面的电流.

由上述可知，电荷面密度和电流面密度所居空间不是没有厚度的几何面，而是含有相当多分子的有厚度的表面物理薄层.

8.洛仑兹力公式中的电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁场强度 $\boldsymbol{B}$ 是总场，还是除了电荷密度 ρ、电流密度 $\boldsymbol{j}$ 以外的其他电荷电流激发的场？其中速度 $\boldsymbol{v}$ 是谁的速度？

答：洛仑兹力公式反映了电磁场与带电体之间相互作用相互制约的关系，其密度表达式为

$$\boldsymbol{f}=\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

其中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是带电体 ρ 所在处总的电磁场，包括带电体本身所激发的电磁场在内；$\boldsymbol{v}$ 为带电体运动的速度，这个速度不是带电体相对于磁场的速度，也不是相对于磁场源(如产生磁场的运动电荷、电流或磁体)的速度.它是相对于观察者坐标系的速度.这一点在狭义相对论中有明确的意义.

9.为什么极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 场的源头(正源)是负极化电荷而不是正极化电荷？

答：这可从两个角度去理解.

(1)数学角度：由于 $\boldsymbol{P}$ 的散度方程为

$$\Delta\cdot\boldsymbol{P}=-\rho_p$$

方程中右端为 $-\rho_p$，故根据散度的意义，可知 $\boldsymbol{P}$ 矢量场为有散场，其源头(正源)为 $-\rho_p$，即负极化电荷.

(2)物理角度：极化强度的物理定义为

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V}$$

其中，$\boldsymbol{p}_i$ 为第 i 个分子的电偶极矩，求和是对体积内所有分子进

行．由此可知，极化强度 $\boldsymbol{P}$ 实质上是体积 ΔV 内分子电偶极矩单位体积的平均值，是一种电偶极矩体密度，其方向与平均电偶极矩的方向相同．电偶极矩方向从负极化电荷指向正极化电荷，因而 $\boldsymbol{P}$ 方向也从负极化电荷指向正极化电荷．做为 $\boldsymbol{P}$ 矢量场的场线，是从负极化电荷发出，而被正极化电荷吸收，所以 $\boldsymbol{P}$ 矢量场的源头（正源）是负极化电荷而不是正极化电荷．

10．极化电流的实质是什么？

答：介质处在外电场之中，由于电场作用而发生极化，这种极化由极化强度

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V}=\frac{\sum_i q_i \boldsymbol{X}_i}{\Delta V}$$

描述．其中 $\boldsymbol{p}_i$ 为 ΔV 内第 i 个分子的电偶极矩，q_i 为 ΔV 内第 i 个带电粒子所带电量，$\boldsymbol{X}_i$ 为带电粒子位置矢量．当外电场发生变化时，则极化强度也发生变化，由这种变化而产生的电流称为极化电流．可见极化电流归根到底是由于电场变化而产生的电流，因而它是一种诱导电流．在引进辅助场量 $\boldsymbol{H}$ 之后，它是麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 中位移电流 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 的一部分．这是极化电流实质的宏观描述．

由极化电流的定义可以得到：

$$\boldsymbol{j}_p=\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sum_i q_i \boldsymbol{X}_i}{\Delta V}=\frac{\sum_i q_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial t}}{\Delta V}=\frac{\sum_i q_i \boldsymbol{v}_i}{\Delta V}$$

式中，$\boldsymbol{v}_i$ 为带电粒子 q_i 的运动速度．显然这种带电粒子的运动会形成电流．尽管这种电流具有分子线度的束缚性，不过其实质仍应属传导电流的组成部分，这是极化电流的微观描述，从以上所述可知．极化电流与纯粹位移电流（真空中位移电流 $\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$）

不同,纯粹位移电流不伴随任何带电质点(电荷)的运动,不放出焦耳热;而极化电流伴随带电质点(粒子)运动,它将产生热效应.当然,这种热效应不同于宏观传导电流产生的焦耳热,它将遵从另外不同的规律性.

11. 极化电荷密度 ρ_p 和自由电荷密度 ρ_f 有何异同? 摩擦一块介质使其带电荷, 这是什么电荷? 使孤立导体产生感应电荷, 这又是什么电荷?

答: 极化电荷密度 ρ_p 和自由电荷密度 ρ_f 相同之处有两点. (1) 这两种电荷都可以激发电场, 且成为总电场的组成部分; (2) 两种电荷密度都描述了某种电荷的分布状态. 但这两种电荷又有着质的不同. 极化电荷被分子所束缚不能自由移动, 所以又称为束缚电荷. 它是由于极化强度分布不均匀, 使某些区域正负分子电荷不能抵消, 造成电荷积累, 因而出现宏观上的电荷分布而产生的. 为了描述这种电荷分布, 特定义单位体积介质内所具有的极化电荷为极化电荷密度 ρ_p. 若介质原来是中性的, 那么不论用什么方法使其出现了极化电荷, 这些极化电荷的总和仍为零, 遵循着电荷守恒定律. 摩擦介质使其带有电荷, 这种电荷为极化电荷. 自由电荷与极化电荷就不同了, 它是由可自由移动的带电粒子所组成的, 它不受分子所束缚. 人们定义单位体积内具有的自由电荷为自由电荷密度 ρ_f. 自由电荷的定向移动是由电场控制的. 当孤立导体处于电场之中时, 它上面的自由电荷在电场作用下将发生移动, 使原来正负自由电荷均匀混和的无序状态, 变为正负电荷分离的有序状态, 这时对外产生宏观电效应, 从而使导体带电荷. 若当初导体为中性, 则无论其上的电荷在电场作用下如何运动和分布, 其正负电荷的总和仍为零, 遵循电荷守恒定律.

12. 介质的电磁性质方程常用的有哪几个？它们的适用条件是什么？

答：介质的电磁性质方程常用的有三个：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B}=\mu \boldsymbol{H},\ \boldsymbol{j}=\sigma \boldsymbol{E}$$

它们适用的条件是各向同性线性介质，这里应注意：对于各向同性线性非均匀介质，ε、μ 和 σ 一般是位置的函数；对于各向同性线性均匀介质，ε、μ 和 σ 是常数；对于各向异性线性介质，ε、μ 和 σ 是张量；对于高频情况，ε、μ 和 σ 是频率的函数.

13. 为什么要讨论边值关系?

答：在电磁场作用下，两介质界面一般出现面电荷面电流分布，这些面电荷可以是束缚电荷，也可以是自由电荷（例如导体表面的感应电荷）；面电流可以是磁化电流也可以是传导电流．这些面电荷面电流的存在，使得它们激发的电磁场影响原场分布；而新的外场分布反过来又影响面电荷面电流分布(亦即影响它们激发的电磁场分布)，直至达到一种平衡，这时面电荷面电流激发的电磁场与外电磁场叠加而成总的电磁场．显然总场是受外电磁场和面电荷面电流激发的电磁场的共同影响，在这种共同影响下总场在空间中有了确定的分布．这种共同影响反映了作为矛盾双方的面电荷面电流和外场之间互相制约的关系，这种制约关系的表现就是边值关系（亦称边界条件）．边值关系是面电荷面电流与外电磁场相互作用规律的微分形式，是麦克斯韦方程在边界上的形式．由于边值关系和总场分布密不可分的整体性，所以由边值关系可以确定总场分布．这就是为什么要讨论边值关系的来由．这是从物理角度去

说明的．如果从数学角度去说明讨论边值关系的必要性，那是因为麦克斯韦方程是偏微分方程，要得到偏微分方程的唯一解，必须要有边界条件，这种问题在数学上称为边值问题．

14．*为何引入位移电流？其物理意义是什么？*

答：由毕奥—沙伐尔定律推得的麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$，在稳恒情况下解释电流激发磁场是成功的，并且完全与电荷守恒定律无矛盾，即

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{j}=\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0\ (\rho\ \text{在稳恒情况不是}\ t\ \text{的函数})\end{cases}$$

这是自洽的．

在非稳恒情况下，在电路中有传导电流 $\boldsymbol{j}$ 中断的地方（例如交变电路中的电容处），而在电路其他地方却存在传导电流．

根据电荷守恒定律，$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\neq0$（这时 ρ 为 t 的函数，故 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\neq0$）；而根据麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$，两边求散，有 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=0$．其中 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\equiv0$ 是数学恒等式．一个由迄今为止自然界精确定律之一的电荷守恒定律得到 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}\neq0$，一个由数学恒等式得到 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$，这显然是一个矛盾．

检查下来，问题出在 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$ 是由稳恒条件下的实验定律得出，在非稳恒条件下显然不再适用而导致了上述矛盾．因此必须对 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$ 加以修正．这种修正是麦克斯韦引入位移电流而完成的．

麦克斯韦把 $\boldsymbol{j}$ 中断处假设用一种不同于传导电流 $\boldsymbol{j}$ 的电流 $\boldsymbol{j}_D$ 续断，这样在整个电路中电流形成闭合；同时麦克斯韦认为这